

完全グラフのオイラー回帰長の上界と下界の改良

神保 秀司¹ 丸岡 章²

概要: 連結グラフのすべての点の次数が偶数であるならば、すべての辺を含む回路、すなわちオイラー回路をもつ。与えられたグラフのオイラー回路で最短部分閉路の長さが最大であるものの最短部分閉路の長さをそのグラフのオイラー回帰長と呼ぶ。3以上の奇数 n に対して $e(n)$ で n 点からなる完全グラフ K_n のオイラー回帰長を表す。計算機を使った検証実験により、3以上13以下の奇数 n に対する $e(n)$ の値が完全に解明されている。例えば、7以上13以下のすべての奇数 n について $e(n) = n - 3$ が成り立つ。一方、従来15以上の奇数 n については、 $e(n)$ の値が $n - 6$ 以上 $n - 2$ 以下であることが知られていた。本報告では、15以上の任意の奇数 n について $e(n)$ が $n - 4$ または $n - 3$ であることを示す。その証明の一部に計算機による検証実験の出力が使われている。

キーワード: 完全グラフ, オイラー回路, 最短部分閉路, 計算機実験

An Improvement of Upper and Lower Bounds on the Eulerian Recurrent Lengths of Complete Graphs

JIMBO SHUJI¹ MARUOKA AKIRA²

Abstract: If the degree of every vertex of a connected graph is even, then the graph has a circuit that contains all of edges, namely an Eulerian circuit. If the length of the shortest subcycle of an Eulerian circuit of a given graph is the largest among those of all Eulerian circuits of the graph, then the length is called the Eulerian recurrent length of the graph. For odd integer n greater than or equal to 3, $e(n)$ denotes the Eulerian recurrent length of K_n , the complete graph that consists of n vertices. Values $e(n)$ for all odd integers n greater than or equal to 3 and less than or equal to 13 have been found by computer simulation. If n is 7, 9, 11, or 13, then $e(n) = n - 3$ holds, for example. On the other hand, it is known that $e(n)$ is greater than or equal to $n - 6$ and less than or equal to $n - 2$ in previous researches. In this paper, it is proved that $e(n)$ is $n - 4$ or $n - 3$ for every odd integer n greater than or equal to 15. Outputs of verification experiments with computers are used in the proof of the main results in this paper.

Keywords: complete graphs, Eulerian circuits, shortest subcycles, computer simulation

1. はじめに

オイラーグラフ G のすべてのオイラー回路が長さ k 以下の部分閉路をもち、かつ、 G のオイラー回路で長さ $k - 1$ 以下の部分閉路をもたないものが存在するとき、 k

を G のオイラー回帰長と呼ぶ。別の言い方をすれば、オイラーグラフ G のオイラー回路の最短部分閉路長の最大値を G のオイラー回帰長と呼ぶ。本論文では、オイラーグラフ G のオイラー回帰長を $e(G)$ で表し、奇数 n について、 n 点からなる完全グラフ K_n のオイラー回帰長 $e(K_n)$ を $e(n)$ と略記する。ただし、グラフ G の閉路 $C = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_0$ が歩道 (walk) $W = w_0 \rightarrow w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \dots \rightarrow w_l$ の部分閉路であるとは、 C が W の部分列になっていること、すなわち、 $w_i = v_0, w_{i+1} = v_1, w_{i+2} = v_2, \dots, w_{i+k} = v_k, w_{i+k+1} = v_0$ を

¹ 岡山大学大学院自然科学研究科
Graduate School of Natural Science and Technology,
Okayama University

² 石巻専修大学理工学部
Department of Science and Engineering, Ishinomaki Senshu
University

満たす非負整数 i が存在することである。

本論文では、7以上の任意の奇数 n について、 n 点からなる完全グラフ K_n のオイラー回帰長が $n-3$ 以下であること、すなわち、 $e(n) \leq n-3$ が成り立つことを証明する。証明は、 K_n のオイラー回路で部分閉路の長さがすべて $n-2$ 以上であるものが存在すると仮定して矛盾を導く。そのために、 K_n のオイラー回路 C が与えられたとき、 K_n の各辺 $e = vw$ について、辺 e に含まれる異なる2点 v と w のオイラー回路上の並び方についての正負の属性を導入し、さらに、 K_n の異なる2点 v と w がオイラー回路上で2回ずつ並び並び方についての反転配置の概念を導入する。

完全グラフのオイラー回帰長の上界についての従来の結果として、 $n \geq 7$ ならば $e(n) \leq n-2$ が成り立つことが知られていた。この結果は、比較的容易に導かれる。本論文の結果は、この上界を改良している。一方、下界についての従来の結果として、 n が7以上の奇数ならば、 $n = 4k+3$ を満たす整数 k が存在するとき $e(n) \geq n-4$ が成り立ち、 $n = 4k+1$ を満たす整数 k が存在するとき $e(n) \geq n-6$ が成り立つことが知られている [4]。この結果の証明では、奇数個の点からなる完全グラフ K_n の辺集合のハミルトン閉路への分解方法を応用して最短部分閉路長が $n-4$ または $n-6$ である K_n のオイラー回路の構成方法を与えている。本論文では、この構成方法をわずかに修正し、7以上の任意の奇数 n について最短部分閉路長が $n-4$ である K_n のオイラー回路の構成方法を与え、 $e(n) \geq n-4$ を導く。従って、 n が7以上の奇数であるとき $n-4 \leq e(n) \leq n-3$ が成り立つことが導かれる。なお、 $e(3) = e(5) = 3$ が成り立つことは明らかであり、さらに、 n が $7 \leq n \leq 13$ を満たす奇数であるとき $e(n) = n-3$ が成り立つことが計算機を使った検証実験により検証されている。

一般のオイラーグラフ G のオイラー回帰長を求める問題が NP 完全であることが著者らにより導かれている [3]。さらに、オイラー回帰長 $e(G)$ の近似可能性について、どのように大きい実数 $\rho \geq 1$ についてもオイラー回帰長の近似値 $e'(G)$ が常に $e(G)/e'(G) \leq \rho$ を満たす近似アルゴリズムは存在しない (有界な近似比率をもつ近似アルゴリズムが存在しない) ことが著者らにより導かれている [2]。一方、オイラーグラフ G のオイラー回路の最短部分閉路長の最小値を求める多項式時間アルゴリズムが存在する。下にその例を挙げる。

オイラーグラフ G の閉路 C が G のあるオイラー回路の部分閉路になっていることは、オイラー回路を構成するための Fleury のアルゴリズム [1] より、 G から C に含まれる辺をすべて除去して得られるグラフ $G - E(C)$ が連結グラフであることと同値である。従って、 G の点 v を根とする幅優先探索を次に挙げる修正を施して実行することにより、 v を通り $G - E(C)$ が連結である閉路 C で長さが

最小のものを見付けることができる。

1. 点 v に到達したとき辺 e で点 v と結ばれている点 w が存在するとする。このとき、既に構築されている幅優先探索木における根 r から点 v までの道の上のすべての辺と辺 e を G から除去して得られるグラフが非連結であれば、幅優先探索において点 v から辿る辺として e を選ばないようにする。
2. 点 v に到達したとき点 v と根 r を結ぶ辺 $e = vr$ が存在したとする。このとき、既に構築されている幅優先探索木における根 r から点 v までの道と辺 e からなる閉路の上のすべての辺を G から除去して得られるグラフが連結であれば、その閉路が解であり探索を終了する。

このアルゴリズムを G の各点を根として実行し、得られた閉路の中で長さが最小のものを C とすれば、 C は、 $G - E(C)$ が連結である閉路 C で長さが最小のものである。

以下、第2節では、本論文に特有の用語および概念を定義する。第3節では、7以上の任意の奇数 n について最短部分閉路長が $n-4$ である K_n のオイラー回路の構成方法を与え、7以上の任意の奇数 n について完全グラフ K_n のオイラー回帰長 $e(n)$ が $e(n) \geq n-4$ を満たすことを示す。第4節では、7以上の任意の奇数 n について最短部分閉路長が $n-2$ 以上である K_n のオイラー回路が存在しないことを証明し、 $e(n) \leq n-3$ を導く。第5節では、本論文をまとめ、今後の課題について述べる。

2. 定義

有限集合 S の要素数を $|S|$ で表す。整数 i と正整数 j について、 $i \bmod j$ で $k \equiv i \pmod{j}$ を満たす j 未満の非負整数 k を表す。

グラフ $G = (V, E)$ はオイラーグラフであり、 $C = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v_0$ は G のあるオイラー回路を表しているとする。 m は、 G の辺の総本数 $|E|$ である。オイラー回路 C における位置は、通常 m 未満の非負整数で表す。ただし、 m を法として合同な整数は、オイラー回路 C における同一の位置を表す。従って、 C における位置は m を法とする剰余類環 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の要素と見なせる。特に、 $0 \leq i < j \leq m-1$ を満たす2整数 i と j について「整数 k が $j \leq k \leq i$ を満たす」という表現は、 $j \leq k < m$ あるいは $0 \leq k \leq i$ が成り立つことを表している。また、オイラー回路 C における位置 i から位置 j までの長さは、 $(j-i) \bmod m$ である。

オイラー回路 C における位置 j にある点、すなわち始点 v_0 から j 本の辺を辿って到達する点 v_j を $C(j) \in V$ で表す。 C における位置 i について、 $n_C(i)$ で点 $C(i)$ がオイラー回路 C において位置 i の一つ後に現れる位置を表す。詳しくは、 $n_C(i)$ は、 $C(i) = C(k)$ および $i < j < k$ を

満たすすべての位置 j について $C(j) \neq C(i)$ が成り立つという条件を満たす唯一の位置 k である. 同様に, $p_C(i)$ で点 $C(i)$ がオイラー回路 C において位置 i の一つ前に現れる位置を表す. 詳しくは, $n_C(i)$ は, $C(i) = C(k)$ および $k < j < i$ を満たすすべての位置 j について $C(j) \neq C(i)$ が成り立つという条件を満たす唯一の位置 k である. 以上の定義より, オイラー回路 C における任意の位置 i について, $p_C(n_C(i)) = n_C(p_C(i)) = i$ が成り立つ. n が 7 以上の奇数であり, グラフ G が完全グラフ K_n であるならば, G のオイラー回路 C における任意の位置 i について, $p_C(i), i, n_C(i)$ は, C における互いに異なる 3 つの位置である.

G の辺 $e = vw$ がオイラー回路 C において位置 i と $i+1$ に現れている, すなわち $C(i) = v, C(i+1) = w$ であるとする. このとき,

$$p_C(i+1) < p_C(i) \text{ かつ } n_C(i) < n_C(i+1)$$

あるいは

$$p_C(i) < p_C(i+1) \text{ かつ } n_C(i+1) < n_C(i)$$

が成り立つとき, 辺 e は C において負であるという. 辺 e が C において負でないとき, 辺 e は C において正であるという.

オイラー回路 C における 4 つの位置の組 (i, j, k, l) が $i+1 < j, j+1 < k, k+1 < l, p_C(i) = l$, および $p_C(j) = k$ をすべて満たすとき, (i, j, k, l) は C における反転配置であるという. オイラー回路 C が明確であるときは, 「 C における」の部分省くことができる. 位置の組 (i, j, k, l) が C における反転配置であり, かつ, $v = C(i), w = C(j)$ あるいは $v = C(j), w = C(i)$ であるとき, (i, j, k, l) は C における v と w についての反転配置であるという. オイラー回路 C における位置 i を第 1 成分とする C における反転配置が存在するとき, i は反転配置の開始位置であるという.

3. 完全グラフのオイラー回帰長の下界の改良

本節では, 奇数個の点からなる完全グラフ K_n の辺集合のハミルトン閉路への分解方法を応用することにより, 7 以上の任意の奇数 n について最短部分閉路長が $n-4$ である K_n のオイラー回路の構成方法を与える. このことから, 7 以上の任意の奇数 n について $e(n) \geq n-4$ が成り立つことが直ちに導かれる.

以下, 特に断わらなければ n は 7 以上の奇数を表す. n 点からなる完全グラフ K_n の点集合を $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ とし, 各 $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ について, K_n のハミルトン道 $H_k = n-1 \rightarrow v_0(k) \rightarrow v_1(k) \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-2}(k)$ を $v_0(k) = k$, および, $1 \leq i \leq n-2$ を満たす各整数 i について $v_i(k) = (v_{i-1}(k) - (-1)^i i) \bmod (n-1)$ を

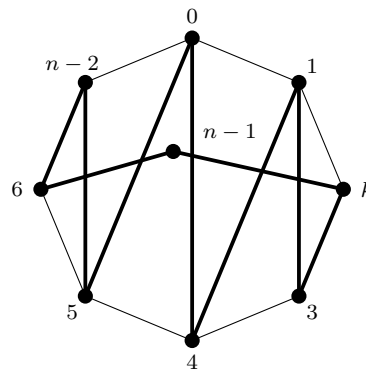


図 1 ハミルトン閉路 $H_k \rightarrow n-1$ の幾何学的表現

Fig. 1 Geometric representation of Hamiltonian cycle $H_k \rightarrow n-1$

満たすものとして定義する. このとき, $n-1$ は偶数であり, 各 $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ について $v_{n-2}(k) = (k + (n-1)/2) \bmod (n-1)$ が成り立つ. H_k に終点と始点を結ぶ辺を付け加えて得られるハミルトン閉路

$$n-1 \rightarrow v_0(k) \rightarrow v_1(k) \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-2}(k) \rightarrow n-1$$

を $H_k \rightarrow n-1$ で表す. ハミルトン閉路 $H_{(k+(n-1)/2) \bmod (n-1)} \rightarrow n-1$ は, $H_k \rightarrow n-1$ の向きを逆転したものであり, それらの辺集合は同一である. 完全グラフ K_n の点 $n-1$ を正 $n-1$ 角形の中心に割り当て, それ以外の $n-1$ 個の点を正 $n-1$ 角形の頂点に 0 から順に時計回りに並ぶように割り当てれば, ハミルトン閉路 $H_k \rightarrow n-1$ は図 1 のように表される.

完全グラフ K_n の辺集合を $(n-1)/2$ 個のハミルトン閉路 $H_0 \rightarrow n-1, H_1 \rightarrow n-1, H_2 \rightarrow n-1, \dots, H_{(n-1)/2-1} \rightarrow n-1$ の辺集合に分解することができる. このことは, 幾何学的表現 (図 1) における K_n の各辺に対応する線分の角度について考察することにより容易に導かれる. この分解方法は, 奇数個の頂点からなる完全グラフのハミルトン閉路への Walecki の分解として知られている. これらのハミルトン閉路を適当な順番に並べ, 点 $n-1$ で接続することにより K_n のオイラー回路

$$C = H_{k(0)} \rightarrow n-1 \rightarrow H_{k(1)} \rightarrow n-1 \rightarrow \dots \rightarrow H_{k((n-1)/2-1)} \rightarrow n-1$$

が得られる. C における位置 i がハミルトン道 $H_{k(j)}$ に含まれれば, 位置 $n_C(i)$ はハミルトン道 $H_{k((j+1) \bmod (n-1))}$ に含まれる. このとき,

$$k((i+1) \bmod (n-1)) \equiv k(i) \pm 1 \pmod{n-1}$$

であるならば

$$(n_C(i) - i) \bmod (n-1) \geq n-2$$

が成り立ち,

$$k((i+1) \bmod (n-1)) \equiv k(i) \pm 2 \pmod{n-1}$$

であるならば

$$(n_C(i) - i) \bmod (n-1) \geq n-4$$

が成り立つ。従って、各 $i \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)/2 - 1\}$ について

$$\begin{aligned} & (k((i+1) \bmod (n-1)) - k(i)) \bmod n-1 \\ & \in \{1, 2, n-2, n-3\} \end{aligned}$$

が成り立っていれば、 C の最短部分閉路長が $n-4$ 以上であることが直ちに導かれる。

例えば、次のように $k(i)$ を定義すればよい。 $(n-1)/2$ が奇数のとき、 $k(0) = 0$, $0 \leq i < (n-3)/4$ のとき $k(i+1) = k(i)+2$, $i = (n-3)/4$ のとき $k(i+1) = k(i)-1$, かつ、 $(n-3)/4 < i < (n-1)/2$ のとき $k(i+1) = k(i)-2$ とする。 $(n-1)/2$ が偶数のとき、 $k(0) = 0$, $0 \leq i < (n-1)/4$ のとき $k(i+1) = k(i) + 2$, $i = (n-1)/4$ のとき $k(i+1) = k(i) + 1$, $(n-1)/4 < i < (n-1)/2$ のとき $k(i+1) = k(i) - 2$ とする。

以上の議論より次の定理が導かれる。

定理 1 7 以上の任意の奇数 n について、 n 点からなる完全グラフ K_n のオイラー回路で最短部分閉路長が $n-4$ 以上であるものを明示的に構成することができる。従って、完全グラフのオイラー回路長について n が 7 以上の奇数であれば $e(n) \geq n-4$ が成り立つ。

4. 完全グラフのオイラー回路長の上界 $n-3$

本節では、7 以上の任意の奇数 n について、 n 点からなる完全グラフ K_n のオイラー回路長が $n-3$ 以上であること、すなわち、 $e(n) \leq n-3$ が成り立つことを証明する。証明は背理法でなされ、 K_n のオイラー回路で部分閉路の長さがすべて $n-2$ 以上であるもの $C = C(0) \rightarrow C(1) \rightarrow C(2) \rightarrow \dots \rightarrow C(m-1) \rightarrow C(0)$ が存在すると仮定して矛盾を導く。ただし、 m は K_n の辺の総本数 $n(n-1)/2$ を表す。

完全グラフ K_n のオイラー回路 C に関する

条件 A: C の部分閉路の長さがすべて $n-2$ 以上である

という条件は

条件 B: $0 \leq i < m$ を満たす任意の整数 i について $(n_C(i) - i) \bmod m \geq n-2$ が成り立つ

という条件と同値である。背理法における矛盾の導出は、これらの条件を満たす完全グラフ K_n のオイラー回路 C の存在を仮定し、 C における負の辺の本数を α 、反転配置の開始位置の個数を β とおいたとき、 $\alpha \leq \beta$ および $\alpha > \beta$ の両方を証明することによりなされる。

初めに基本的な 2 つの補題を述べる。

補題 2 n を 6 以上の整数とする。完全グラフ K_n の歩道 W の長さが $n+3$ であれば、 W に同一の辺が 2 回以上出現するか、あるいは、 W の長さ $n-2$ の部分歩道で同一の点が 2 回以上出現するものが存在する。

証明. $W = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n+4}$ とおき、 $1 < i < j \leq n+4$ を満たす任意の 2 整数 i と j について辺 $v_{i-1}v_i$ と $v_{j-1}v_j$ は異なると仮定する。さらに、 W の長さ $n-2$ の部分歩道

$$W_1 = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-1},$$

$$W_2 = v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow \dots \rightarrow v_n,$$

$$W_3 = v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n+1},$$

$$W_4 = v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n+2},$$

$$W_5 = v_5 \rightarrow v_6 \rightarrow v_7 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n+3},$$

$$W_6 = v_6 \rightarrow v_7 \rightarrow v_8 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n+4}$$

のどれにおいても同一の点が 2 回以上出現することはないと仮定する。これらの仮定の下で矛盾を導くことにより背理法で証明する。

上の仮定の下では、完全グラフ K_n の点集合を $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ とおき、 $v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 3, \dots, v_{n-1} = n-1$ とおいても一般性を失わない。 $\{6, 7, 8, \dots, n-1\} \cap \{v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3}, v_{n+4}\} \neq \emptyset$ であれば W_6 において同一の点が 2 回以上出現する。従って、 $\{v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3}, v_{n+4}\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, n\}$ が成り立たなくてはならない。このとき、 $v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3}, v_{n+4}$ に $\{1, 2, 3, 4, 5, n\}$ の要素をどのように割り当てても W に同一の辺が 2 回以上出現するか、あるいは、 W_1, W_2, \dots, W_6 のどれかに同一の点が 2 回以上出現してしまい背理法の仮定と矛盾する。 \square

補題 3 n を 7 以上の奇数とする。完全グラフ K_n のオイラー回路 C が条件 B を満たせば、 $0 \leq i < m$ を満たす任意の整数 i について $n-2 \leq (n_C(i) - i) \bmod m \leq n+3$ が成り立つ。

証明. C が条件 B を満たすと仮定する。条件 B より $n-2 \leq (n_C(i) - i) \bmod m$ が成り立つことは明らかである。

一方、条件 B より $K_n = (V, E)$ の部分歩道 $W = C(i+1) \rightarrow C(i+2) \rightarrow \dots \rightarrow C(n_C(i)-1)$ には、同一の辺が 2 回以上出現せず、かつ、 W の長さ $n-3$ 以下のどの部分歩道にも同一の点が 2 回以上出現しない。さらに W には $V - \{C(i)\}$ の点しか含まれないので W を $V - \{C(i)\}$ を点集合とする完全グラフ K_{n-1} の部分歩道と見なすことができる。従って、補題 2 より W の長さが $n-1+2 = n+1$ 以下であることが導かれる。従って、

$$((n_C(i)-1)-(i+1)) \bmod m = (n_C(i)-i-2) \bmod m \leq n+1$$

が成り立ち、

$$(n_C(i) - i) \bmod m \leq n + 3$$

が導かれる。□

補題 3 より完全グラフ K_n のオイラー回路 C に関する条件 B を次の条件 B' に置き換えてよい。

条件 B': $0 \leq i < m$ を満たす任意の整数 i について $n - 2 \leq (n_C(i) - i) \bmod m \leq n + 3$ が成り立つ

次の定理は、反転配置が存在するためには厳しい条件を満たさなければならないこと、別の言い方をすれば反転配置は存在し難いことを主張している。

定理 4 n を 7 以上の奇数とする。 n 点からなる完全グラフ K_n のオイラー回路 C で条件 B を満たすものが存在すると仮定する。 m で K_n の辺の総本数 $n(n-1)/2$ を表す。

このとき、 i が C 上の反転配置の開始位置であれば

$$n_C(i) - i \equiv n + 3 \pmod{m}, \quad (1)$$

$$n_C(i+1) - (i+1) \equiv n - 2 \pmod{m}, \quad (2)$$

および

$$n_C(i+2) - (i+2) \equiv n - 1 \pmod{m} \quad (3)$$

がすべて成り立つ。

(略証) i が条件 B' を満たす完全グラフ $K_n = (V, E)$ のオイラー回路 C における反転配置 $(i, j, n_C(j), n_C(i))$ の開始位置であるならば、 C についての条件 B' と反転配置の定義より次に挙げる 4 つの条件のどれかが成り立たなくてはならない。

1. $n_C(i) \equiv i + (n + 2) \pmod{m}$, $j = i + 2$, かつ $n_C(j) \equiv i + n \pmod{m}$.
2. $n_C(i) \equiv i + (n + 3) \pmod{m}$, $j = i + 2$, かつ $n_C(j) \equiv i + n \pmod{m}$.
3. $n_C(i) \equiv i + (n + 3) \pmod{m}$, $j = i + 3$, かつ $n_C(j) \equiv i + (n + 1) \pmod{m}$.
4. $n_C(i) \equiv i + (n + 3) \pmod{m}$, $j = i + 2$, かつ $n_C(j) \equiv i + (n + 1) \pmod{m}$.

上の 1. あるいは 2. が成り立つときは、 C において同一の辺が 2 回以上出現しないこと、 および条件 B' より $V = \{C(i), C(i+1), C(i+2), \dots, C(i+n)\}$ が成り立つ。このとき $C(i+n+1)$ が V のどの要素であっても C において同一の辺が 2 回以上出現しないこと、 あるいは条件 B と矛盾する。

上の 3. が成り立つときは、 C において同一の辺が 2 回以上出現しないこと、 および条件 B' より $V = \{C(i+3), C(i+4), C(i+5), \dots, C(i+n+3)\}$ が成り立つ。このとき $C(i+2)$ が V のどの要素であっても C にお

いて同一の辺が 2 回以上出現しないこと、 あるいは条件 B と矛盾する。

従って、 上の 4. が成り立たなくてはならない。 このとき C において同一の辺が 2 回以上出現しないこと、 および条件 B' より $V = \{C(i), C(i+2), C(i+3), \dots, C(i+n)\}$ が成り立つ。 $C(i+1) = C(i+(n-1))$ が成り立つことは、 C において同一の辺が 2 回以上出現しないこと、 および条件 B' から導かれる。 □

次の定理 5 は、 オイラーグラフ G が正則グラフである、 すなわち、 G のどの 2 点の次数も等しいとき G のオイラー回路 C における反転配置の個数が負の辺の本数よりも少なくないことを主張している。

定理 5 オイラーグラフ G の点の次数がすべて定数 $2d$ に等しい、 すなわち G が $2d$ 正則グラフであるならば、 G の任意のオイラー回路 C において、 反転配置の個数は負の辺の本数よりも少なくない。

証明. G が $2d$ 正則グラフであるので、 G のどの点も G のオイラー回路 C において丁度 d 回出現する。 もし、 C における負の辺 $e = vw = C(i)C(i+1)$ で v と w についての反転配置が存在しないものが存在すれば、 v と w は、

$$C(i+2) \rightarrow \dots \rightarrow v \rightarrow \dots \rightarrow w \rightarrow \dots \\ \rightarrow v \rightarrow \dots \rightarrow w \rightarrow \dots \rightarrow C(i-1)$$

のように辺 i と $i+1$ 以外では C に沿って交互に出現しなくてはならない。 このことは、 辺 e が負の辺であることと矛盾する。 □

一方、 計算機を使って比較的簡単な検証実験により下に挙げる 2 つの定理が導かれる。

定理 6 $X = (x(0), x(1), x(2), \dots, x(9))$ および $Y = (y(0), y(1), y(2), \dots, y(9))$ は、 -2 以上 3 以下の整数を成分とする長さ 10 の数列とする。 7 以下の正整数 i で $x(i) < x(i+1)$ かつ $y(i) < y(i+1)$, あるいは、 $x(i) > x(i+1)$ かつ $y(i) > y(i+1)$ を満たすものの個数を $N(X, Y)$ で表す。

このとき、 X と Y が

1. $i - x(i) = j - x(j)$ を満たす 9 以下の異なる 2 つの非負整数 i, j は存在しない。 同様に、 $i + y(i) = j + y(j)$ を満たす 9 以下の異なる 2 つの非負整数 i, j も存在しない。
2. $|(i - x(i)) - ((i+1) - x(i+1))| = |x(i+1) - x(i) - 1| = 1$ を満たす 8 以下の非負整数 i は存在しない。 同様に、 $|(i + y(i)) - ((i+1) + y(i+1))| = |y(i) - y(i+1) - 1| = 1$ を満たす 8 以下の非負整数 i も存在しない。
3. $|(i - x(i)) - (j - x(j))| = |(i + y(i)) - (j + y(j))| = 1$ を満たす 9 以下の異なる 2 つの非負整数 i, j は存在しない。

という条件を満たすならば

$$N(X, Y) \geq 2$$

が成り立つ。

定理 7 $X = (x(0), x(1), x(2), \dots, x(9))$ および $Y = (y(0), y(1), y(2), \dots, y(9))$ は, -2 以上 3 以下の整数を成分とする長さ 10 の数列とする. 7 以下の正整数 i で $x(i) < x(i+1)$ かつ $y(i) < y(i+1)$, あるいは, $x(i) > x(i+1)$ かつ $y(i) > y(i+1)$ を満たすものの個数を $N(X, Y)$ で表し, $y(i) = 3$, $y(i+1) = -2$, かつ $y(i+2) = -1$ を満たすものの個数を $R(X, Y)$ で表す.

このとき, 定理 6 と同様に X と Y が

1. $i - x(i) = j - x(j)$ を満たす 9 以下の異なる 2 つの非負整数 i, j は存在しない. 同様に, $i + y(i) = j + y(j)$ を満たす 9 以下の異なる 2 つの非負整数 i, j も存在しない.
2. $|(i - x(i)) - ((i+1) - x(i+1))| = |x(i+1) - x(i) - 1| = 1$ を満たす 8 以下の非負整数 i は存在しない. 同様に, $|(i + y(i)) - ((i+1) + y(i+1))| = |y(i) - y(i+1) - 1| = 1$ を満たす 8 以下の非負整数 i も存在しない.
3. $|(i - x(i)) - (j - x(j))| = |(i + y(i)) - (j + y(j))| = 1$ を満たす 9 以下の異なる 2 つの非負整数 i, j は存在しない. という条件を満たすならば

$$N(X, Y) \geq R(X, Y)$$

が成り立つ.

n が 13 以上の奇数であるとき, n 個の点からなる完全グラフ K_n のオイラー回路 C で条件 B' を満たすものが存在すれば, C において連続して並んでいる 10 個の位置を $i, i+1, i+2, \dots, i+9$ とおく. このとき $i \leq j < k \leq i+9$ を満たす任意の j, k について $C(j) \neq C(k)$ が成り立つ. $X = ((i - p_C(i)) \bmod m, ((i+1) - p_C(i+1)) \bmod m, \dots, ((i+9) - p_C(i+9)) \bmod m)$ かつ $Y = ((n_C(i) - i) \bmod m, (n_C(i+1) - (i+1)) \bmod m, \dots, (n_C(i+9) - (i+9)) \bmod m)$ とおけば, 長さ 10 の 2 つの数列 X と Y は, 定理 6 および定理 7 の条件を満たす. 従って,

$$N(X, Y) \geq 2$$

および

$$N(X, Y) \geq R(X, Y)$$

が成り立つ. X, Y についての定理 6 および定理 7 の条件, ならびに, $N(X, Y)$ および $R(X, Y)$ の定義より, C における位置 $j \in \{i+1, \dots, i+7\}$ で辺 $C(j)C(j+1)$ が負であるものの個数を $N_C(i+1, i+2, \dots, i+7)$ で表し, j が反転配置の開始位置であるものの個数を $R_C(i+1, i+2, \dots, i+7)$ で表せば,

$$N(X, Y) = N_C(i+1, i+2, \dots, i+7)$$

および

$$R(X, Y) = R_C(i+1, i+2, \dots, i+7)$$

が成り立つ.

定理 8 n が 13 以上の奇数であれば, 完全グラフ K_n のオイラー回路で最短閉路長が $n-2$ であるものは存在しない.

証明. 条件 B' を満たす K_n のオイラー回路 C が存在すると仮定して矛盾を導く. $m = n(n-1)/2$ とおく.

定理 5, 6, および 7 より, C における任意の位置 i について, 連続して並んでいる 7 つの位置 $i+1, i+2, \dots, i+7$ の中に反転配置の開始位置が 2 つ以上含まれていなければならない. しかしながら, 位置 j と $j+4$ がどちらも反転配置の開始位置であれば $n_C(j) \equiv j + (n+3) \equiv (\bmod m)$ および $n_C(j+5) \equiv (j+5) + (n-2) \pmod{m}$ が同時に成り立たなくてはならないが, $j + (n+3) = (j+5) + (n-2)$ であるのであり得ない. さらに, 定義より j が反転配置の開始位置であれば $j+1$ と $j+2$ は反転配置の開始位置であり得ないので, j が反転配置の開始位置であり, $j+3$ が反転配置の開始位置でなければ, 7 つの位置 $j+1, j+2, \dots, j+7$ の中で反転配置の開始位置になり得るものは, $j+5$ の 1 つだけである. 従って, 次の事実が成り立つ.

事実 A: C における任意の位置 i について i が反転配置の開始位置であれば, $(i+3) \bmod m$ も反転配置の開始位置である.

さらに, 定理 5 および定理 7 より次の事実が導かれる.

事実 B: C における任意の位置 i について, 7 本の辺 $C(i)C(i+1), C(i+1)C(i+2), \dots, C(i+6)C(i+7)$ の中の負の辺の本数は丁度 2 本である.

事実 A より, i が反転配置の開始位置であれば, i から始まる 10 個の位置 $i, i+1, i+2, \dots, i+9$ について, m を法として,

$$\begin{aligned} n_C(i) &\equiv i + (n+3), \\ n_C(i+1) &\equiv (i+1) + (n-2), \\ n_C(i+2) &\equiv (i+2) + (n-1), \\ n_C(i+3) &\equiv (i+3) + (n+3), \\ n_C(i+4) &\equiv (i+4) + (n-2), \\ n_C(i+5) &\equiv (i+5) + (n-1), \\ n_C(i+6) &\equiv (i+6) + (n+3), \\ n_C(i+7) &\equiv (i+7) + (n-2), \\ n_C(i+8) &\equiv (i+8) + (n-1), \\ n_C(i+9) &\equiv (i+9) + (n+3) \end{aligned}$$

が成り立つことが導かれる. さらに, 事実 A より次の (a), (b), (c) のどれかが成り立たなくてはならない.

- (a) $p_C(i) \equiv i - (n+3) \pmod{m}$,
- (b) $p_C(i) \equiv i - (n-2) \pmod{m}$,
- (c) $p_C(i) \equiv i - (n-1) \pmod{m}$.

(a) と (c) の場合は, 7 本の辺 $C(i)C(i+1), C(i+1)C(i+2), \dots, C(i+6)C(i+7)$

2), ..., $C(i+6)C(i+7)$ の中に負の辺が 5 本存在するため事実 B と矛盾する. 一方, (b) の場合は, $p_C(i) \equiv p_C(i+4)+1 \pmod{m}$ および $n_C(i) \equiv n_C(i+4)+1 \pmod{m}$ が成り立つので, C において同一の辺が 2 回以上出現することになり, C が回路であることと矛盾する. □

5. おわりに

7 以上の任意の奇数 n について, n 点からなる完全グラフ K_n のオイラー回帰長が $n-3$ 以上であること, すなわち, 完全グラフ K_n のオイラー回路には, 長さが高々 $n-3$ である部分閉路が必ず含まれることを証明した. 証明の重要な部分には, 計算機を使った検証実験の出力を使っている.

現在, $7 \leq n \leq 13$ を満たす奇数 n について K_n のオイラー回帰長 $e(n)$ が $e(n) = n-3$ を満たすことが計算機を使って検証されている. 一方, 本論文の結果より, $n \geq 15$ を満たす奇数 n について, $n-4 \leq e(n) \leq n-3$ が成り立つ. 現在, $n \geq 15$ を満たすすべての奇数 n について $e(n) = n-4$ が成り立つことを予想している. その証明にも計算機を使った検証実験の出力が有効であると期待している.

参考文献

- [1] M Fleury. Deux problemes de geometrie de situation. *Journal de mathematiques elementaires*, pp. 257-261, 1883.
- [2] 森和樹, 神保秀司. オイラー回帰長問題の近似不可能性の証明. 情報処理学会研究報告. AL, アルゴリズム研究会報告, Vol. 2010, No. 11, pp. 1-4, 2010.
- [3] 神保秀司, 押柄康明, 橋口攻三郎. オイラー小道の最短閉路長の最大値決定問題の NP 完全性. 電子情報通信学会技術研究報告. COMP, コンピューテーション, Vol. 104, No. 501, pp. 7-10, 2004.
- [4] 神保秀司, 乾勇治, 橋口攻三郎. オイラー小道上の同一点間の間隔について. 数理解析研究所講究録, Vol. 1106, pp. 25-36, 1999.