

ペンシルパズルにおける「解き筋」の概念の提案

是川 空[†], 五十嵐 力[†], 柴原 一友^{††}, 但馬 康宏^{††}, 小谷 善行^{††}

[†]東京農工大学 工学府 情報工学専攻

^{††}東京農工大学 共生科学技術研究院 先端情報科学部門

korekawa@fairy.ei.tuat.ac.jp

概要

パズルは探索問題としての見地からその性質が考えられてきた。しかし数独やカックロなどのペンシルパズルでは、探索経路が一本道であり、探索問題として考えるのは意味がない。効率的な解法のためには数字を入れる図中の箇所を選ぶ順序が重要である。本研究ではこの点に着目して新しい概念を提起し、理論化する。ペンシルパズルにおいて一般的に存在している、制約による解答の順序構造を問題の「解き筋」として定義した。解き筋を問題から抽出することで、問題の難易度や良し悪しの判定をするために使用する。効率的に解き筋を抽出するために、解き筋の中でも重複した部分を取り除いた有用な解き筋のみを得るアルゴリズムを設計する。ラテン方陣問題による実験を行い、その解き筋を得た。得られた解き筋から問題の特徴を考察する。

A Proposal of the Concept “Solution Path” for Pencilpuzzle Takashi korekawa, Chikara Igarashi, Kazutomo Shibahara Yasuhiro Tajima, Yoshiyuki Kotani

Abstract

Puzzle problems are usually considered as examples of tree search. Problems of "Pencil Puzzles" such as sudoku and kakkuro have only one search path without branch. So dealing with them as search problem has no meaning. It is important to determine the ordering of the position where a number is fixed. We propose the new concept "solution path". It defined structure by restriction of the order of solution. It is used to get the value of problem difficulty. Additionally, an algorithm to remove redundant path is designed. We experiment about solution path in Latin magic square problems and consider feature of problems.

1. はじめに

パズルを状態空間の探索問題として捉えたとき、局面から可能な候補値（ゲームで言う候補手）を選択して局面を遷移させることで探索を行うことができる。しかし、ナンプレなどのペンシルパズルでは、多くの確定的な推論規則が存在し、候補値による探索を行わずに一本道の探索経路を得ることができる。この場合、全ての遷移は確定的でバックトラックが存在しな

いが、どこを確定させていくかの順序によって得られる局面が異なる。本研究では、このようなペンシルパズルの解順序の構造に着目した新しい概念を提起する。

本研究では、ペンシルパズルに一般的に存在している、解順序の構造が問題の特徴に関係すると考え、問題の解順序経路の構成を表す解き筋を定義する。推論規則による局面の部分的な確定を局面への手（確定手）としたとき、解き筋とは、この確定手

のリストになる.ある確定手に対する解き筋とは,その確定手が可能な全ての局面での,初期局面からその局面に至るための全ての解き筋である.

確定手に対する解き筋は非常に多く存在するが,手順の前後によって意味の変わらない部分を持つものや,その確定手に本質的に関わらない部分を多く含んでいる.これらを重複した解き筋として取り除き,有用な解き筋だけを得るアルゴリズムを提案する.このアルゴリズムによってナンプレ及び,ラテン方陣問題の解き筋を得るシステムを作成する.

2. ペンシルパズル

2.1. ペンシルパズルの例

ペンシルパズルとはパズルの種類であり,完全情報で,図示された問題に対して徐々に解答を書き込んでいくことによって,最終的な解答を得るか,またはそのような形式をとることが出来るものである[4].具体的な例としては,ナンバープレース,カックロ,スリザーリンクやお絵かきロジックなどが挙げられる.

ペンシルパズルは問題の領域が分割されており,複数の解答箇所が存在する.解答箇所に入る候補の値は有限個である.既にパズルに書き込まれている値によって候補値の制約が存在する.未確定だった箇所に解答を書き込んで確定させた場合,その解答は問題に新たな候補値の制約として加えられる.部分的な解答を行うことを繰り返し,全ての箇所を解答済みにすることでペンシルパズルの解を得ることが出来る.

更に本研究で扱うパズルは全て,問題が用意された時点で得られる最終的な解答の形が一通りであるもののみを扱うこと

にする.

2.2. ナンバープレースとラテン方陣問題

ナンバープレース (略称ナンプレ) は縦9行横9列に並べられた正方形のマスと,マスの中に書き込まれた数字によって構成されるペンシルパズルである.(図1) マスは9×9のサイズをさらに3×3の9ブロックに切り分けられている.マスの中に書き込む数字は1~9のどれかで,各ブロックと各行各列に同じ数字が入らないと言う制約がある.ナンバープレースの問題には予めマスのうち幾つかに数字を書き込んであり,それをヒントとしてのこりの空白マスに入る数字の候補を検討し,部分的に解を決定していく.

		3		2		6	4	
		6			9			
	8							3
		5	2	4				7
4			9		8			1
6				7	1	2		
7							8	
			7			9		
	6	4		8		7		

図1 ナンバープレース問題

ナンバープレースの解は9×9のサイズであるラテン方陣の解でもある.ラテン方陣にはブロックの考えが無く,行と列に制約があるだけである.そこでナンバープレースからブロックの独特の制約を除いたラテン方陣によるペンシルパズル問題を考えることが出来る.このラテン方陣の問題は任意の大きさn×nのサイズのマス数で構成され,各マスの数字の候補が1~nまでになる.ナンバープレースと同様に予めいくつかのマスに数字を記入して

おき,各行各列に同じ数字が入らないという制約を用いて各マスの解答を決定していくパズルである.本稿では問題サイズが 9×9 で固定されている数独より小さい類題としてこの $n \times n$ のラテン方陣の問題を用いる. (図2)

1	2		4	
2			5	1
4				3
	1		3	

図2 5×5ラテン方陣問題

3. 確定定理と解き筋

3.1. ペンシルパズルの確定定理

ペンシルパズルは,問題の最小単位(マスなどがそれにあたる)について,問題の種類によってその候補となる値が決まっている.問題の周囲の状況などが候補値の制約となり,候補値が一通りになったときその部分の候補値が確定する.確定した部分は問題の新たな制約として追加される.

最小単位一部分を確定させるための制約(の組み合わせ)をその問題の確定定理と呼ぶ.多くの問題でこの確定定理は複数存在する.しかし,全ての確定定理を用いなくても問題を解ける場合がある.

ラテン方陣問題のルールである,同一行と列の中に同じ数字が存在しないというルールを元に,「確定済みのマスの値を,そのマスが所属している行と列の,未確定マスの候補値から削除する操作を行ったとき,候補値が一通りになったマスをその値で確定する」という確定定理を導くことが出来る.図3左図のラテン方陣問題の場合,この局面において斜線の未確定マスは,その所属する行と列を入力として,確

定定理によって候補値が一通りに定まる.

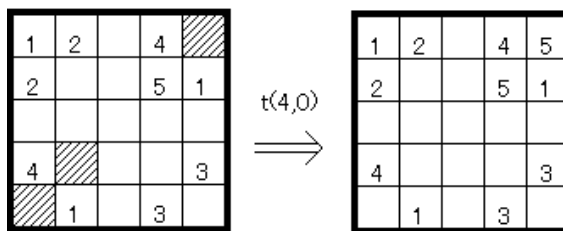


図3 ラテン方陣の確定手

3.2. 確定手

局面に対して確定定理を用いて一部分を確定させることを,確定手 t と呼ぶ.確定手は局面の一部分を確定させることで,局面に t を新たに制約として加える.

図3左図のラテン方陣問題のうち,右上の斜線の未確定マス(4,0)を確定定理で確定した場合,図3右図の局面が得られる.確定されたマスは解答として記入され,局面において新たな制約となる.

3.3. 解き筋

解き筋とは,解答手順を表す確定手の手順リストである.初期局面から局面 P へは通常複数の解き筋が存在し,それらは解き筋 $Q(P)$ の集合として定義される.局面 P は初期局面から任意の解き筋 $Q(P)$ の順番に確定手を適用すること得ることができる.

3.4. 確定手に対する解き筋

ある確定手 t が確定定理によって適用可能な局面の集合 S_t を考える.ここで S_t は

$$S_t = \{p_1, \dots, p_n\} \\ = \{p | p \text{ において確定手 } t \text{ が定理によって確定可能, 初期局面 } p_0 \text{ から } p \text{ までの解き筋が存在する}\}$$

で表すことができる.ここで,確定手 t を次に適用可能な解き筋の集合 $R[t]$ を

$$R[t] = \bigcup_{p \in S_t} Q(p)$$

と定義する. $R[t]$ の要素である t に対する

解き筋を $Q[t]$ とする。

4. 解き筋の改良

4.1. 解き筋の問題点

解き筋は一つの確定手に対して非常に多くのパターンを含む。その中には、その確定手を可能とするに必要でない箇所を確定させている場合があり、また手順を入れ替えてもあまり変わらない複数の手順を含んでいる場合がある。このような解き筋は本質的ではなく、幾つかの解き筋を同一解き筋として統合することで、得られる解き筋からの情報量を損なうことなく、解き筋を得るためのコストの削減が望める。

4.2. 解き筋の改良

4.1 であげた順不同である解き筋や確定手に関係の無い解き筋を取り除くことで、その問題の情報として必要なものだけを得るために解き筋の集合 $R'[t]$ を考える。

このとき $R'[t]$ の要素である $Q[t]$ は、確定手のリストから順序を取り除いた集合に置き換える関数 $\text{set}(Q[t])$ を用いて、

$$\bullet R'[t] \subseteq \{\text{set}(Q[t_i]) \mid \forall i\}$$

$\bullet R'$ は $Q[t_1] \neq Q[t_2]$ である任意の $\text{set}(Q[t_1]) \in R$ と任意の $\text{set}(Q[t_2]) \in R$ について、 $\text{set}(Q[t_1]) \not\subseteq \text{set}(Q[t_2])$ かつ $\text{set}(Q[t_2]) \not\subseteq \text{set}(Q[t_1])$ が成り立つ

の二つの条件を満たす。

例として確定手 t_5 と、それに対する解き筋 $R[t_5]$ を考える。図4はその $\text{set}(Q[t_5])$ を図として表したものである。 $Q[t_5]$ は3通りでそれぞれ $Q[t_5]_1 = \{t_1, t_2, t_3\}$, $Q[t_5]_2 = \{t_1\}$, $Q[t_5]_3 = \{t_3, t_4\}$ である。このとき、 $R'[t_5]$ になる解き筋は $Q[t_5]_1 = \{t_1\}$ と $Q[t_5]_2 = \{t_3, t_4\}$ の二つだけである。 $Q[t_5]_1$ はその集合の中に

$Q[t_5]_2$ を含んでいるため $R'[t_5]$ にはならない。

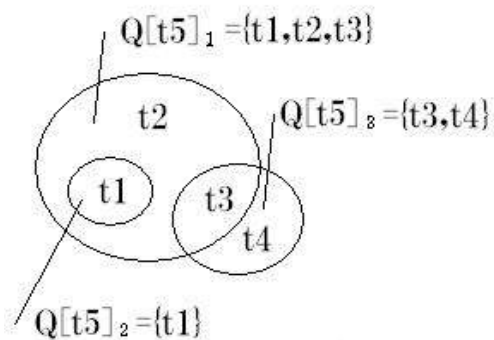


図4 確定手 t_5 に対する解き筋 $Q[t_5]$

初期局面で適用可能である確定手 t_0 の解き筋 $Q'[t_0]$ は初期状態の制約のみを解き筋に含んでいるため $Q'[t_0] = \{\}$ である。

このような解き筋 $Q'[t]$ を定義すると、 $Q'[t]$ で得られる局面が確定手 t を持つための最小限の制約になる確定手の集合になる。

5. 解き筋抽出アルゴリズム

5.1. 確定手探索

確定手による局面の遷移をたどるため、確定手による探索を考える。局面においてその局面から可能な確定手を検出し、次の局面への遷移候補とする。その後遷移候補のうち一つを選択し、その確定手を局面の制約に加え、次局面を得て同様の処理を繰り返す。

5.2. 解き筋データベース

確定手探索によって局面を走査していく過程で、必要な解き筋の集合 $R'[t]$ に所属する解き筋だけを確定手に対して登録していく解き筋データベース G を作成する。

局面の確定手になるものがあるとき、その確定手をインデックスとした解き筋データベースと照らし合わせ、局面に適用された確定手の集合が $Q'[t]$ の条件を満たし

ている場合のみ,新たな解き筋として解き筋データベースに登録する.

5. 3. 解き筋抽出アルゴリズム

問題から解き筋を抽出するためのアルゴリズムの擬似コードを付録1に示す.解き筋データベースに登録される解き筋は,要素数が小さいものから登録する限り部分集合になりえるものが既に登録されていることになる.これを利用し,局面の確定手をキューに登録して幅優先探索を行う.同一の局面が探索中に現れた場合,その先の探索による解き筋も同じになるため,トランスポジションテーブルによって同一局面の枝刈りを行う.

探索の終了条件については,解き筋の抽出を目的としているため,局面において全ての未確定箇所がその局面からの確定手として可能である場合バックトラックを行うこととする.その様な局面ではある箇所を確定して次の箇所の解き筋を判定する時点で,現在局面への解き筋が既にその局面に含まれることになるからである.

このアルゴリズムは,ペンシルパズル問題からその解き筋をデータベースとして得ることができる.ペンシルパズルには様々な問題の種類が存在するが,その問題の構造と,候補値の種類,確定定理がわかっているならば,本システムは問題の種類によってそれらを入れ替えることで,どのようなペンシルパズル問題についても同様の解き筋を得ることができる.

6. 実験

6. 1. ラテン方阵問題の確定定理

ペンシルパズルにふくまれる確定定理は複数あり,単純なものから複雑なものまで様々である.確定手探索に使用する確定定理によっては問題を最後まで解くこと

が出来ない場合もある.問題の解が一通りしかないと言う条件がある場合は,解けない問題についても確定定理を追加すれば最後まで解くことが出来る.

ラテン方阵問題を例にとると,一箇所を確定させる定理として「あるマスの所属する行と列にある確定済マスを候補値から削除したとき,候補値が一通りになるときこのマスを確定する」という定理がある.今回の実験ではこの確定定理一つのみを使用して確定手を検出することにする.

6. 2. 実験

付録2の5題の5×5ラテン方阵問題について,初期状態での空きマスの数が16のものについて,確定手探索によって解き筋を得た.その後空きマスのうち一つをランダムで選び(付録2下図),そこに答えを書き込み,初期状態での空きマスを減らした場合についても同様の探索を行った.この実験により,各問題での解き筋の違いだけではなく,確定手探索によるノード数などを比較する.(表1)

表1 ノード数

初期 空きマス	問題番号				
	①	②	③	④	⑤
16	79801	44026	92223	33380	18461
15	139093	1009512	1836993	27447	×
14	66573	×	×	25132	×
13	326190	1304981	566987	52774	1725859
12	130500	168598	301080	117972	415600
11	59767	42050	19962	7396	97907
10	6521	10390	4063	3921	9010
9	1817	1943	1501	1286	11
8	496	463	181	110	10
7	9	151	103	43	9

×印は計算量爆発のため探索不可能

①の初期空きマスが16の問題について得られた解き筋を,解き筋データベースに初めて登録されたのが早い順に確定手を並べ替えてa~pまでの名前をつけたのが図4である.実際に得られた解き筋の一部として,確定手pに登録された解

き筋を表2に示す.表2の横1行が p に対する解き筋の一つであり,アルファベットが図4の箇所の確定手にあたる.いずれかの解き筋が現局面への解き筋に含まれている場合,p が局面の確定手になる.

1	e	3	b	5
c	l	k	h	1
3	o	m	1	2
a	n	p	2	d
5	l	j	f	g

図5 ①の未確定マスの登録順

表2 確定手pに対する解き筋

(2,3)	p	a	b	c		f		h		k		m		
(2,3)	p	a	b		d	e	f	g		i			n	
(2,3)	p		b			e	f	g	h	i	j	k	m	
(2,3)	p	a	b	c		e	f	g	h	i		k	l	n
(2,3)	p	a	b			e	f	g	h	i	j	k	l	n

7. 考察

7.1 確定手探索についての考察

表1より,一つの確定定理だけで問題を解くという条件であるに関わらず,同じ初期確定マス数の問題でもノード数や,初期局面の確定手の数,解き筋に違いが生じている.この違いに対して,それぞれの解き筋を解析することで問題の特徴を得ることができる.

確定手探索のノード数は初期確定マス数との単純な相関は無いと考えられる.数字を追加し,初期確定数を増やすことで,探索木の深さが減少するが,確定手による局面の分岐数が多くなることがあるためである.そのため数字を追加する箇所によって,ノード数の変化に差があり,解き筋に頻出する確定手の確定定理に関わる箇所が追加される場合等に,問題が単純化するためにノード数も減少する.

7.2 ペンシルパズルの難易度

ペンシルパズルは同じルールによっていくつもの問題を作成することができ,作成者と解答者の間でそれらの問題の良し悪しや難易度の認識が存在している.現在でもこの良し悪しや難易度に関する議論や研究が行われており,自動的に難易度を得るシステムは有用であると考えられる.今までも,初期状態で確定している部分の割合,問題を解くために必要な制約,問題の進捗数[1]や部分問題を解くために用いられる確定的な推論規則[2][3]を用いて,難易度や良問判定を行うシステムが存在した.

人間がペンシルパズルを解いていく際には,確定的な制約の組み合わせによる推論規則を用いる.それを適用して部分問題を解決することで,部分的な解を新たな制約として解へ近づいていく.問題の中にはその人が知っている規則によって,現在の状態では解くことが出来ない部分が多く存在する.解けるところから解いていくということは,問題の解答手順によって,残りの問題が違うものになるということになる.このような部分問題の繋がりにはパズルの難易度や良し悪しに影響する有用な情報が含まれていると考えられる.

このような制約による解答の順序構造は全てのペンシルパズルに存在している.問題の種類によって異なるのは,問題の最小単位の候補値と,制約の関わる箇所だけである.一般化された解答の順序構造を解析することで,全てのペンシルパズルに応用することが出来ると考えられる.

7.3 解き筋の解析による難易度の考察

ペンシルパズルの解に至るまでの解き筋には全ての確定手が含まれることになる.確定手に対する解き筋を分析するこ

とで,各確定手が序盤から終盤のどのあたりに現れるのか,また確定手同士の相関関係などを得ることができる.

序盤に現れる解き筋で,それ以降の解き筋に多く含まれているものは問題全体への影響が大きい.序盤の解き筋でもその後の解き筋にほとんど現れないものもあるため,解き筋の出現頻度は問題の特徴における重要度に関わってくる.

一つの問題における全ての確定手に対して,その確定手の解き筋の中で最も確定手数が少ない解き筋を比較したとき,その確定手数が最も多い確定手を最長確定手とする.それはその問題において最も制約が厳しく,難易度の高い確定手の有力な候補になる.図4の問題では確定手 p がそれに当たる.

p を解くための改良解き筋は表2の5通りである.解き筋には全て b と f が含まれていることから,この二つは少なくとも必ず解く必要がある.このことより,確定手 p は b, f よりも解答の難易度が高いことが自明である.

5つの解き筋は似通っている部分が多く,似通った部分では解き筋の分岐が少ない.このような解き筋が現れる確定手では,一部分の難易度が上昇することでこの確定手の難易度も上昇する可能性が高く,総じてこの確定手の難易度が高いと考えることができる.

7.4 今後の改良

現在のアルゴリズムでは,得ようとしている解き筋のサイズが膨大であるため,大きな問題での解き筋を得ることができない.今後の改良としては,解き筋を得るための改良の方法としては,①解き筋自体を改良し,有用な情報だけが残るよう

にする.②確定手探索の効率化などが方法として挙げられる.また,難易度判定に的を絞った場合,③全体の解き筋を得ずに問題の難易度を推定する方法の考案も効果的であると考えられる.

8. おわりに

ペンシルパズルの難易度判定の指標にするため,確定定理と,パズルの構成による解き筋を定義した.この解き筋から問題の分析に不必要である重複した部分を取り除くことで有用な解き筋のみを得る方法と,局面を確定手によって探索することで問題から解き筋を抽出するアルゴリズムを作成した.このアルゴリズムをナンプレに対して適用し,問題の解き筋を得る実験を行った.解き筋による難易度判定には有用な解き筋だけを得るシステムが必要である.

参 考 文 献

- [1] 乾 伸雄,小谷 善行.ナンプレの解法,難易度の算出,問題の作成,第7回ゲームプログラミングワークショップ,pages 163-169,2002.
- [2] 松原 康夫.数独の推論規則と難易度に関する考察,情報処理学会エンターテインメントコンピューティング研究報告 EC-5-1,pages 1-6,2006.
- [3] 伊藤 毅志.ヒューリスティックスを用いたイラストロジックの難易度自動評価,第10回ゲームプログラミングワークショップ,pages 146-149,2005.
- [4] 八登 崇之.完全なペンシルパズルの一覧 第2.0版,2006/07/03.
URL:
<http://www-imai.is.s.u-tokyo.ac.jp/~yat/o/data2/puzcc.pdf>

[5] ロジックお絵かきタイム 7月号, フ
 ロム出版, 2007.

付録1 解き筋抽出アルゴリズム

```

確定手探索(局面){
  if(現局面がトランスポジションテーブルに登録されている){
    トランスポジションフラグ=true;
  } else {
    現局面をトランスポジションテーブルに登録;
  }
  if(現局面の全ての未確定箇所確定定理が適用可能){
    return; //探索終了
  }
  for(局面に対する確定手){
    //解き筋をデータベースに登録
    if(この確定手に対して解き筋が未登録){
      初期局面から現局面への解き筋を登録;
    } else {
      for(データベース中のこの確定手にインデックスされる解き筋){
        if(not(現局面への確定手の集合≡データベースの解き筋)){
          初期局面から現局面への解き筋を登録;
        }
      }
    }
  }
  if(トランスポジションフラグ==true){
    return; //トランスポジション
  }
  確定手を適用後の局面をキューの末尾に登録;
}
確定手探索(キューの先頭から復帰した局面);
}
  
```

付録2 5×5 ラテン方陣問題

①	②	③	④	⑤																																																																																																																													
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td>1</td><td></td><td>3</td><td></td><td>5</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1		3		5					1	3			1	2				2		5					<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>5</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1			4	5	2	3						5			4			3			1				<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td>1</td><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td>1</td><td></td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td>5</td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr> </table>	1		3			2		1		4		5		2		4							2			<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1			4			3							5		4		1	2		5	1				<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td></td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td>4</td><td></td><td></td></tr> </table>					5	2		1	5						4		1		3		5		4		
1		3		5																																																																																																																													
				1																																																																																																																													
3			1	2																																																																																																																													
			2																																																																																																																														
5																																																																																																																																	
1			4	5																																																																																																																													
2	3																																																																																																																																
		5																																																																																																																															
4			3																																																																																																																														
	1																																																																																																																																
1		3																																																																																																																															
2		1		4																																																																																																																													
	5		2																																																																																																																														
4																																																																																																																																	
		2																																																																																																																															
1			4																																																																																																																														
	3																																																																																																																																
			5																																																																																																																														
4		1	2																																																																																																																														
5	1																																																																																																																																
				5																																																																																																																													
2		1	5																																																																																																																														
				4																																																																																																																													
	1		3																																																																																																																														
5		4																																																																																																																															

実験で初期確定マスとして数字を追加した順番

①	②	③	④	⑤																																																																																																																													
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td>●</td><td></td><td>●</td><td>9</td><td>●</td></tr> <tr><td></td><td>2</td><td>5</td><td></td><td>●</td></tr> <tr><td>●</td><td></td><td>8</td><td>●</td><td>●</td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td>6</td><td>●</td><td></td></tr> <tr><td>●</td><td></td><td>1</td><td>7</td><td>4</td></tr> </table>	●		●	9	●		2	5		●	●		8	●	●		3	6	●		●		1	7	4	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td>●</td><td>8</td><td></td><td>●</td><td>●</td></tr> <tr><td>●</td><td>●</td><td>3</td><td></td><td>1</td></tr> <tr><td>9</td><td></td><td>●</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>●</td><td>4</td><td></td><td>●</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>●</td><td>5</td><td></td><td>7</td></tr> </table>	●	8		●	●	●	●	3		1	9		●	6	2	●	4		●			●	5		7	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td>●</td><td>7</td><td>●</td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>●</td><td></td><td>●</td><td></td><td>●</td></tr> <tr><td></td><td>●</td><td>9</td><td>●</td><td>6</td></tr> <tr><td>●</td><td></td><td>5</td><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td></td><td>1</td><td>●</td><td></td><td>4</td></tr> </table>	●	7	●	3		●		●		●		●	9	●	6	●		5	2	8		1	●		4	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td>●</td><td></td><td>4</td><td>●</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>●</td><td>6</td><td></td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td><td>9</td><td>●</td><td>1</td></tr> <tr><td>●</td><td></td><td>●</td><td>●</td><td></td></tr> <tr><td>●</td><td>●</td><td></td><td>7</td><td>3</td></tr> </table>	●		4	●			●	6		5	8	2	9	●	1	●		●	●		●	●		7	3	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td>5</td><td>2</td><td>8</td><td></td><td>●</td></tr> <tr><td>●</td><td></td><td>●</td><td>●</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td>1</td><td>6</td><td>●</td></tr> <tr><td></td><td>●</td><td>9</td><td>●</td><td></td></tr> <tr><td>●</td><td>3</td><td>●</td><td></td><td>7</td></tr> </table>	5	2	8		●	●		●	●		4		1	6	●		●	9	●		●	3	●		7
●		●	9	●																																																																																																																													
	2	5		●																																																																																																																													
●		8	●	●																																																																																																																													
	3	6	●																																																																																																																														
●		1	7	4																																																																																																																													
●	8		●	●																																																																																																																													
●	●	3		1																																																																																																																													
9		●	6	2																																																																																																																													
●	4		●																																																																																																																														
	●	5		7																																																																																																																													
●	7	●	3																																																																																																																														
●		●		●																																																																																																																													
	●	9	●	6																																																																																																																													
●		5	2	8																																																																																																																													
	1	●		4																																																																																																																													
●		4	●																																																																																																																														
	●	6		5																																																																																																																													
8	2	9	●	1																																																																																																																													
●		●	●																																																																																																																														
●	●		7	3																																																																																																																													
5	2	8		●																																																																																																																													
●		●	●																																																																																																																														
4		1	6	●																																																																																																																													
	●	9	●																																																																																																																														
●	3	●		7																																																																																																																													