Vol.2013-MPS-96 No.17
Vol.2013-BIO-36 No.17
2013/12/12

ポートフォリオのレプリケーション問題における進化計算の探索効果改善のための探索空間無制約化モデルの提案

柴田 峻輔[1,a)]　折登 由希子[2]　山本 久志[1]　花田 良子[3]

概要：投資配分比率の組合せが公開されていない未知ポートフォリオ（複製対象ポートフォリオ）が良好なリターンを示しているとき，そのポートフォリオの複製を行いたいという要望がある．しかしながら，ポートフォリオのレプリケーション問題は，等式制約付き不定問題であり，進化計算の適用により評価値を最小化することで真の解である複製対象ポートフォリオを見つけることはできない．つまり，進化計算による評価値の最小化と解の改良が連動してないという問題がある．このような問題に対して，本研究では，等式制約付き最適化問題を無制約化する新たなモデルを提案する．本提案モデルは，ポートフォリオのレプリケーション問題における従来の探索空間を，進化計算の探索効果を改善するような制約の無い探索空間へ変換する．数値実験結果から，本提案モデルによる探索空間において，進化計算により評価値を最小化することで複製対象ポートフォリオの投資配分比率に極めて近い良解を生成可能であることを示す．

キーワード：ポートフォリオの複製，進化計算，等式制約の無制約化，探索空間の変換

Unconstrained Search Space Model Proposal for Search Effect Improvement of Evolutionary Algorithms in Portfolio Replication Problems

Abstract: It is desired to make the replication portfolio when a benchmark portfolio has delivered good returns. However, the portfolio replication problem is an equality constrained indeterminate problem. We cannot find the same portfolio as the benchmark portfolio by minimizing the evaluation values of solutions even if we use any evolutionary algorithm. We have an important problem that minimizing the evaluation value does not depend on improving the solution. In this paper, we propose a new model which removes the equality constraint. Our model transforms the equality constrained search space to the unconstrained search space for the portfolio replication problems. In the experiments, we show that the evolutionary algorithms can generate the good solutions by minimizing the evaluation values in our unconstrained search space.

Keywords: Portfolio Replication, Evolutionary Algorithm, Unconstrained Equality Constraints, Search Spaces Transformation

1. はじめに

本研究で研究対象とするポートフォリオの複製（レプリケーション）問題を含むポートフォリオの最適化問題は，与えられた目的関数を最小化あるいは最大化するよう，ポートフォリオに組み入れられた個々のアセットの投資配分比率を決定する問題であり，遺伝的アルゴリズム，タブーサーチ，メメティックアルゴリズム，分布推定アルゴリズム（EDA: Estimation of Distribution Algorithm）などの進化計算を適用した多くの研究報告がある [1], [2], [3]．ポートフォリオの最適化問題において，解であるポートフォリオの生成を行う場合，ポートフォリオを構成するアセットの投資配分比率の合計が 1 となる等式制約を満たすよう個々のアセットの投資配分比率を決定する必要があ

[1] 首都大学東京 大学院システムデザイン研究科
Graduate School of System Design, Tokyo Metropolitan University, 6-6, Asahigaoka, Hino, Tokyo 161-0095, Japan
[2] 広島大学 大学院社会科学研究科
Graduate School of Social Sciences, Hiroshima University
[3] 関西大学 システム理工学部
Faculty of Engineering Science, Kansai University
[a)] shibata-shunsuke@ed.tmu.ac.jp

る．しかしながら，進化計算による解生成操作においては，等式制約を満たさない実行不可能解が生成されることが多い．このため，従来の研究報告のほとんどにおいて，実行不可能解であるポートフォリオの個々のアセットの投資配分比率をそれらの合計で除することで，投資配分比率の合計が1となるよう調整を行い，実行不可能解を実行可能解に変換する "**等式制約付き探索空間（ECSS: Equality Constrained Search Space）**" における正規化を行っている．進化計算により生成された解自身は実行不可能解であり，ECSS における正規化により，進化計算が探索した解を構成する変数の値（個々のアセットの投資配分比率）は収縮もしくは伸張されるという問題が生じている．

一方，制約付き最適化問題において，EDA をはじめとする直接探索によるアプローチを行う進化計算の探索性能が良いことは知られているが，制約を満たす実行可能解を効果的に探索する解生成方法は確立されていない．このため，Kimura ら [4] は，マルコフ連鎖モンテカルロ法と修正アルゴリズムを利用し，与えられた確率分布に従う実行可能解のみを生成するアプローチを持つ進化計算を提案している．我々は先行研究 [5] において，等式制約のあるポートフォリオのレプリケーション問題に対して，解の生成に ECSS における正規化と Kimura ら [4] のアプローチを適用した．結果として，解の生成に両アプローチを用いた EDA から得られた両ポートフォリオは，非常に近い評価値を持つことを示した．実行不可能解の全てを実行可能解に変換できる ECSS における正規化は計算コストが小さいという利点があることに対し，Kimura ら [4] のアプローチは確率分布に従うことが保証された実行可能解を生成できるという利点がある．そこで，我々は先行研究 [6] において，ポートフォリオのレプリケーション問題に対して ECSS における正規化を利用した新たな EDA を提案した．しかしながら，ECSS における正規化を利用した EDA では，解の評価値は最小化できるが最適解に近づく解の探索はできないという問題が明らかになった．つまり，評価値の最小化と解の改良が連動していないという問題がある．

そこで本研究では，ECSS を無制約化する新たなモデルとして "**探索空間無制約化モデル（USSM: Unconstrained Search Space Model）**" を提案する．USSM は，ポートフォリオのレプリケーション問題における従来の探索空間 ECSS を，進化計算の探索効果を改善するような無制約の探索空間へ変換することで，ポートフォリオのレプリケーション問題において効果的な解の生成が行える新たなモデルである．

2. ポートフォリオのレプリケーション問題

本研究では，同一アセットに対してロング（購入）とショート（売却）の両方のポジションを取るロングショートポートフォリオを複製対象ポートフォリオとして取り上げる．なお，複製対象ポートフォリオを "**ベンチマークポートフォリオ**"，進化計算により複製されたポートフォリオを "**複製ポートフォリオ**" と呼ぶ．本研究で使用する記号とその意味を以下に定義する．

N ：ポートフォリオを構成するアセット数．
i ：アセット i $(i = 1, \cdots, N)$．
t ：時点 t $(t = 1, \cdots, T, T+1, \cdots, T+S)$．
$r_i(t)$ ：時点 t におけるアセット i のリターン．
w_i ：アセット i の投資配分比率．
$\boldsymbol{w}$ ：ポートフォリオ $\boldsymbol{w} = (w_1, \cdots, w_N)$．
$\boldsymbol{w}^L$ ：ポートフォリオ $\boldsymbol{w}$ のロングの投資配分比率の組合せ $\boldsymbol{w}^L = \left(w_1^L, \cdots, w_N^L\right)$．
$\boldsymbol{w}^S$ ：ポートフォリオ $\boldsymbol{w}$ のショートの投資配分比率の組合せ $\boldsymbol{w}^S = \left(w_1^S, \cdots, w_N^S\right)$．
$r_{\boldsymbol{w}}(t)$ ：ポートフォリオ $\boldsymbol{w}$ の時点 t におけるリターン．
$\boldsymbol{w}^B$ ：ベンチマークポートフォリオ $\boldsymbol{w}^B = \left(w_1^B, \cdots, w_N^B\right)$．
$r_{\boldsymbol{w}^B}(t)$ ：ベンチマークポートフォリオの時点 t におけるリターン．
$E_{\boldsymbol{w}}$ ：時点1から T までのベンチマークポートフォリオに対する複製ポートフォリオのリターンの追随の割合を計る目的関数．
M ：ポートフォリオ $\boldsymbol{w}$ を導出する USSM における設計変数の数．
$\boldsymbol{\theta}$ ：ポートフォリオ $\boldsymbol{w}$ を導出する USSM における設計変数の組合せ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_M)$．
$\boldsymbol{\theta}^L$ ：ポートフォリオ $\boldsymbol{w}$ のロングの投資配分比率を導出する USSM における設計変数の組合せ $\boldsymbol{\theta}^L = \left(\theta_1^L, \cdots, \theta_M^L\right)$．
$\boldsymbol{\theta}^S$ ：ポートフォリオ $\boldsymbol{w}$ のショートの投資配分比率を導出する USSM における設計変数の組合せ $\boldsymbol{\theta}^S = \left(\theta_1^S, \cdots, \theta_M^S\right)$．

一般に，ポートフォリオ最適化問題において，等式制約のある ECSS においてアセットがロングのポジションだけを取るロングオンリーポートフォリオは，個々のアセットの投資配分比率を正の実数値とした次式で定義される．

$$\boldsymbol{w} = (w_1, \cdots, w_N) \quad \text{s.t.} \sum_{i=1}^{N} w_i = 1. \tag{1}$$

一方，我々は先行研究 [6] において，等式制約のある ECSS において同一アセットに対してロングとショートの両方のポジションを取るロングショートポートフォリオを次式で定義した．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= (w_1, \cdots, w_N) \\ &= \left(w_1^L - \alpha w_1^S, \cdots, w_N^L - \alpha w_N^S\right), \\ \boldsymbol{w}^L &= \left(w_1^L, \cdots, w_N^L\right), \boldsymbol{w}^S = \left(w_1^S, \cdots, w_N^S\right), \\ &\text{s.t.} \sum_{i=1}^{N} w_i^L = 1, \sum_{i=1}^{N} w_i^S = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，α はロングに対してショートで利用できる資金の

レバレッジを表す．

式 (2) は，アセット i に対してロングの投資配分比率 $w_i^L > 0$ かつショートの投資配分比率 $w_i^S > 0$ を許すことを意味し，両ポジションとも独立した正の値の投資配分比率で与えられる．

本研究では，簡単なレプリケーション問題を取り扱うため，ベンチマークポートフォリオへ組み入れた全アセットとリターンの情報が公表されていると仮定する．つまり，ベンチマークポートフォリオを構成するアセットは既知であるが，その投資配分比率は未知である．このような仮定の下，T 時点 N アセットで構成される複製ポートフォリオのリターンとポートフォリオを構成する個々のアセットのリターンの関係を次式に示す．

$$\begin{pmatrix} r_{\boldsymbol{w}}(1) \\ \vdots \\ r_{\boldsymbol{w}}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(1) & \cdots & r_N(1) \\ & \vdots & \\ r_1(T) & \cdots & r_N(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}. \tag{3}$$

式 (3) において，複製ポートフォリオのリターンは与えられたベンチマークポートフォリオのリターンと同値であるため，$(r_{\boldsymbol{w}}(1), \cdots, r_{\boldsymbol{w}}(T))$ は既知である．また，個々のアセットのリターン $(r_i(1), \cdots, r_i(T))$ も既知である．以上より，複製ポートフォリオへの組入れアセット数 N が時点数 T と同数の $N = T$ の場合，T 連立 N 変数の連立方程式を解くことにより，ベンチマークポートフォリオと同じ真の解として複製ポートフォリオの投資配分比率 $(w_1, \cdots, w_N)$ を決定することが可能である．しかしながら，一般的には，ベンチマークポートフォリオはそのパフォーマンスを維持するため，短期間でリバランス（アセットの組み換えや投資配分比率の変更）が行われる．このため，組入れアセット数 N が複製に利用できる時点数 T より多い $N > T$ の不定問題となり，アセットが既知であったとしても真の解と同一の複製ポートフォリオの投資配分比率を求めることは不可能である．

そこで，本研究では，先行研究 [6] と同様に，$t = 1$ から $t = T$ における既知の一期間におけるベンチマークポートフォリオのリターン挙動を追随するようなリターンを持つ複製ポートフォリオの最適化を試みる．ベンチマークポートフォリオに対する複製ポートフォリオのリターン挙動の連動の割合を測定するため，$t = 1$ から $t = T$ におけるこれら二変量のリターンの誤差と時点 t と $t+1$ のリターンの変化の割合を用いた目的関数を次式で定義する．

$$\begin{aligned} E_{\boldsymbol{w}} &= \sum_{t=1}^{T} \left(r_{\boldsymbol{w}}(t) - r_{\boldsymbol{w}^B}(t) \right)^2 \qquad (4) \\ &+ \rho \sum_{t=1}^{T-1} \left(1 - \frac{r_{\boldsymbol{w}}(t+1) - r_{\boldsymbol{w}}(t)}{r_{\boldsymbol{w}^B}(t+1) - r_{\boldsymbol{w}^B}(t)} \right)^2. \end{aligned}$$

なお，ρ は数値実験において与えられる第 2 項の重みパラメタである．

以上より，リターンの誤差最小かつ時点間のリターンの変化の割合最小を目的としたロングショートポートフォリオのレプリケーション問題を次式で定義する．

$$\min_{\boldsymbol{w}} E_{\boldsymbol{w}} \quad \text{s.t.} \ \sum_{i=1}^{N} w_i^L = 1, \ \sum_{i=1}^{N} w_i^S = 1. \tag{5}$$

3. 探索空間無制約化モデル USSM

式 (5) で定義したポートフォリオのレプリケーション問題は，$N > T$ のとき不定問題であり，不定解の中から真の解を決定することは，真の解の決定に利用できる他の情報がない限り不可能である．このため我々は，先行研究 [6] では，等式制約のある ECSS において式 (4) を評価値とした EDA によりポートフォリオの複製を試みたが，得られた複製ポートフォリオは真の解であるベンチマークポートフォリオとは異なった．そこで本研究においては，評価値の最小化と解の改良を連動させるため，進化計算の探索空間に着目する．

提案モデルの詳細を単純化して説明するため，式 (1) で定義したロングオンリーポートフォリオの探索空間を取り上げる．多くの従来研究においては，ECSS において進化計算により生成された解自身は実行不可能解であるため，実行不可能解であるポートフォリオを構成する個々のアセットの投資配分比率をそれらの合計で除することで，投資配分比率の合計が 1 となるよう調整を行い，実行不可能解を実行可能解に変換する正規化操作を行っている．このため，進化計算が探索した解を構成する個々のアセットの投資配分比率は，収縮もしくは伸張されており，この正規化により ECSS は進化計算が解を効果的に探索できない探索空間になっていると考えられる．

この問題を改善するため，本研究ではポートフォリオにおける等式制約の無制約化を試み，探索空間無制約化モデル USSM を以下に提案する．USSM の探索空間では，ECSS のような解の正規化を行う必要はなく，進化計算により探索した解自身をポートフォリオとして利用できる．

ポートフォリオを構成するアセット数を $N = 2^M$ $(M = 1, 2, \cdots)$ とし，ビット列の大きさが M のとき 10 進数の i $(i = 1, \cdots, N)$ から 1 を引いた数 $0, \cdots, N-1$ を 2 進数に変換したときの j 桁目の数を $a_j \in \{0, 1\}$ $(j = 1, \cdots, M)$ と表現する．このとき，式 (1) で定義したロングオンリーポートフォリオを以下に再定義する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= (w_1, \cdots, w_N), & (6) \\ w_i &\equiv \prod_{j=1}^{M} \left(\cos^2 \theta_j \right)^{a_j} \left(\sin^2 \theta_j \right)^{1-a_j} \quad (i = 1, \cdots, N). \end{aligned}$$

ピタゴラスの定理，すなわち，

$$\sin^2 \theta_j + \cos^2 \theta_j = 1 \qquad (j = 1, \cdots, M), \tag{7}$$

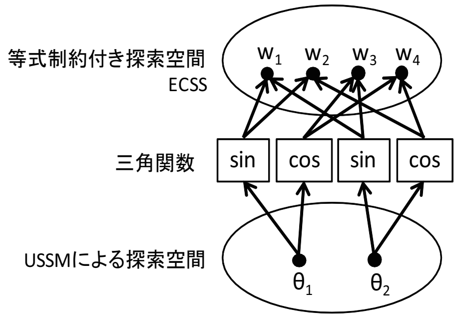

図 1　探索空間の変換
Fig. 1　Search Space Transformation.

から，任意の $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_M)$ において次式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1. \tag{8}$$

以上より，式 (1) で定義した ECSS におけるポートフォリオ $\boldsymbol{w} = (w_1, \cdots, w_N)$ を探索する問題は，式 (6) で提案した USSM の探索空間においては，任意の設計変数の組合せ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_M)$ において式 (8) が満たされるため，等式制約のない探索空間において $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_M)$ を探索することで導出されるポートフォリオ $\boldsymbol{w} = (w_1, \cdots, w_N)$ を最適化する問題となる．例として，USSM の探索空間における設計変数の数を $M = 2$，ポートフォリオを構成するアセット数を $N = 2^2 = 4$ としたポートフォリオのレプリケーション問題において，ECSS から USSM への探索空間の変換の様子を図 1 に示す．

USSM の探索空間におけるポートフォリオのレプリケーション問題を，等式制約のない次式で再定義する．

$$\min_{\boldsymbol{w}} E_{\boldsymbol{w}}. \tag{9}$$

USSM の探索空間では，探索した解自身を正規化せずポートフォリオとして利用できるため，進化計算により効果的に解の探索を行えることが期待できる．

4.　固定幅ヒストグラムを利用した EDA

EDA とは，従来の交叉や突然変異に代えて，親集団をもとに作成した解（個体）の分布を子集団の確率分布と仮定し，その確率分布に従って子集団の個体を生成することに特徴を持つ進化計算の直接探索アルゴリズムである．本研究では，確率分布として固定幅ヒストグラムを利用したシンプルな EDA により複製ポートフォリオの最適化を行う．

4.1　個体表現と評価値

本研究におけるロングショートポートフォリオのレプリケーション問題において，EDA における個体は USSM におけるロングとショートそれぞれの設計変数の組合せ $\boldsymbol{\theta}^L = \left(\theta_1^L, \cdots, \theta_M^L\right)$ と $\boldsymbol{\theta}^S = \left(\theta_1^S, \cdots, \theta_M^S\right)$ を意味する．

ここで，ロングとショートそれぞれの l 世代の集団の k 番目の個体を以下のように表現する．

$$\boldsymbol{\theta}^{L(l,k)} = \left(\theta_1^{L(l,k)}, \cdots, \theta_M^{L(l,k)}\right). \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\theta}^{S(l,k)} = \left(\theta_1^{S(l,k)}, \cdots, \theta_M^{S(l,k)}\right). \tag{11}$$

本 EDA においては，ロングとショートそれぞれの個体の集団に対して独立に子個体生成や選択操作を行う．l 世代の集団の k 番目のポートフォリオ $\boldsymbol{w}^{(l,k)}$ は，ロングとショートの二種の個体 $\boldsymbol{\theta}^{L(l,k)}$ と $\boldsymbol{\theta}^{S(l,k)}$ から導出される．

また，式 (4) で定義した l 世代の集団の k 番目のポートフォリオの目的関数を $E_{\boldsymbol{w}^{(l,k)}}$ と記述し，本 EDA における最小化問題の評価値とする．

4.2　固定幅ヒストグラムを利用した EDA のアルゴリズム

EDA のアルゴリズムを以下の手順 (1) から (5) に示す．

(1) 初期集団の生成
アルゴリズムの初期世代 $l = 0$ において，M_{pop} 個の個体で構成されるロングとショートそれぞれの初期集団 $\left\{\boldsymbol{\theta}^{L(0,k)} \middle| k = 1, \cdots, M_{pop}\right\}$ と $\left\{\boldsymbol{\theta}^{S(0,k)} \middle| k = 1, \cdots, M_{pop}\right\}$ を生成する．

(2) 親集団のヒストグラムの構築
ロングの個体 $\boldsymbol{\theta}^{L(l,k)}$ において，l 世代における設計変数 θ_j^L のための探索空間 $[0, \pi/2]$ をビン数 H に分割し，親集団を構成する M_{pop} 個の個体から設計変数 θ_j^L のヒストグラムを構築する．ビン h $(h = 1, \cdots, H)$ が探索空間 $\left[\dfrac{\pi(h-1)}{2H}, \dfrac{\pi h}{2H}\right]$ を表すとき，h に対する度数 $v_j^{L(l)}[h]$ を次式で定義する．

$$v_j^{L(l)}[h] = \#\left\{k \middle| \frac{\pi(h-1)}{2H} \leq \theta_j^{L(l,k)} < \frac{\pi h}{2H}\right\}$$
$$(k \in \{1, \cdots, M_{pop}\}, j = 1, \cdots, M, h = 1, \cdots, H).$$

同様に，ショートの個体 $\boldsymbol{\theta}^{S(l,k)}$ によるヒストグラムのビン h に対する度数 $v_j^{S(l)}[h]$ を次式で定義する．

$$v_j^{S(l)}[h] = \#\left\{k \middle| \frac{\pi(h-1)}{2H} \leq \theta_j^{S(l,k)} < \frac{\pi h}{2H}\right\}$$
$$(k \in \{1, \cdots, M_{pop}\}, j = 1, \cdots, M, h = 1, \cdots, H).$$

(3) 確率分布による子個体生成
ロングの個体 $\boldsymbol{\theta}^{L(l,k)}$ において，親集団のヒストグラムを子個体生成の確率分布とみなし，h に対する確率 $P_j^{L(l)}[h]$ を次式で定義する．

$$P_j^{L(l)}[h] = \frac{1}{M_{pop}}\left(v_j^{L(l)}[h]\right) \tag{12}$$
$$(j = 1, \cdots, M, h = 1, \cdots, H).$$

式 (12) と同様に，ショートの個体 $\boldsymbol{\theta}^{S(l,k)}$ における h に対する確率 $P_j^{S(l)}[h]$ を次式で定義する．

$$P_j^{S(l)}[h] = \frac{1}{M_{pop}}\left(v_j^{S(l)}[h]\right) \tag{13}$$

$$(j = 1, \cdots, M, h = 1, \cdots, H).$$

式 (12)，(13) でそれぞれ定義した確率分布に従う一様乱数を発生させ，新たにロングとショートそれぞれの個体を決定し，独立の子集団とする．

(4) 選択
ロングとショートそれぞれの l 世代の親集団と子集団からエリート選択とルーレット選択の併用により M_{pop} 個の個体を $l+1$ 世代の親集団へ重複なく選択する．なお，ポートフォリオ $\boldsymbol{w}^{(l,k)}$ の評価値は，USSM のロングとショートそれぞれの探索空間における設計変数の組合せ $\boldsymbol{\theta}^{L(l,k)}$ と $\boldsymbol{\theta}^{S(l,k)}$ から導出されている．

(5) 終了条件
手順 (2) から手順 (5) までの操作を，世代数が $l = L_{max}$ に到達するまで繰り返す．

以上のアルゴリズムにより，最終世代の集団内で評価値が最小となった個体から導出されるポートフォリオを本 EDA により得られた複製ポートフォリオとする．

5. 数値実験結果

数値実験では，ベンチマークポートフォリオを構成するアセットとして東京証券取引所一部市場の時価総額上位 N アセットを利用した．2005 年から 2010 年の実験期間を過去期間 T 日 ($t = 1 \cdots, T$)，将来期間 S 日 ($t = T+1 \cdots, T+S$) の全 $T+S$ 日から成る 13 期間に区切り，期間 1 から期間 13 のそれぞれにおいて過去期間のデータを用いて EDA によりポートフォリオの複製を行い，その複製ポートフォリオの将来期間のパフォーマンスを評価する．

本 EDA に適用したパラメタ値を以下に示す: 親集団サイズ $M_{pop} = 100$，子集団サイズ $M_{off} = 200$，エリート選択確率 0.1，ビン数 $H = 100$（ビン幅は $\pi/2H$ となる），最終世代数 $L_{max} = 100$，アルゴリズムの実行回数 10．これらのパラメタ値を用いて，USSM における設計変数の数を $M = 7$，アセット数を $N = 2^M = 128$，レバレッジを $\alpha = 1$，過去期間の時点数を $T = 20$，将来期間の時点数を $S = 100$，式 (4) に定義した目的関数の重みパラメータを $\rho = 1.0E-08$ とし，EDA により複製ポートフォリオの最適化を行った．

数値実験においては，以下の 2 種類のベンチマークポートフォリオを構築し，“**BP1**”，“**BP2**” と呼ぶ．

- ベンチマークポートフォリオ BP1
  従来の ECSS において $[0, 1]$ における一様乱数によりロングとショートの投資配分比率 $\boldsymbol{w}^L$ と $\boldsymbol{w}^S$ を与え正規化操作を行うベンチマークポートフォリオ
- ベンチマークポートフォリオ BP2
  提案した USSM の探索空間において $[\pi/6, \pi/3]$ における一様乱数によりロングとショートの設計変数 $\boldsymbol{\theta}^L$ と $\boldsymbol{\theta}^S$ を与え，投資配分比率 $\boldsymbol{w}^L$ と $\boldsymbol{w}^S$ を算出したベンチマークポートフォリオ

ECSS と USSM の探索空間のそれぞれにおいて，BP1 と BP2 に対して EDA により複製ポートフォリオの最適化を行う．数値実験においては，以下の 2 種類の複製ポートフォリオを，“**RP1**”，“**RP2**” と呼ぶ．

- 複製ポートフォリオ RP1
  従来の ECSS において BP1 と BP2 に対して EDA によりロングとショートの投資配分比率 $\boldsymbol{w}^L$ と $\boldsymbol{w}^S$ を与え正規化操作を行う複製ポートフォリオ
- 複製ポートフォリオ RP2
  提案した USSM の探索空間において BP1 と BP2 に対して EDA によりロングとショートの設計変数 $\boldsymbol{\theta}^L$ と $\boldsymbol{\theta}^S$ を与え，投資配分比率 $\boldsymbol{w}^L$ と $\boldsymbol{w}^S$ を算出した複製ポートフォリオ

これらの問題設定下の数値実験において，EDA により得られた最良の複製ポートフォリオの評価値（過去期間の目的関数値），ベンチマークポートフォリオに対する複製ポートフォリオの投資配分比率の誤差の和，ベンチマークポートフォリオに対する複製ポートフォリオの将来期間のリターンの誤差の和を表 1(a)，(b) にそれぞれ示す．

表 1(a) より，BP1 に対する複製を行った場合，期間 2，13 を除いた全ての期間において RP1 の評価値が RP2 の評価値より小さい．これは，ECSS における解の評価値自体は，USSM の探索空間における解の評価値より良いことを意味している．しかしながら，期間 3，6，8，9 を除いた全期間における BP1 の投資配分比率に対する RP2 の投資配分比率の誤差は，RP1 の誤差より小さい．また，期間 3，4，6 を除いた全期間において，将来期間における BP1 のリターンに対する RP2 のリターンの誤差は RP1 の誤差と比較し非常に小さい．以上より，BP1 に対する複製を行った場合，USSM の探索空間において解の評価値は ECSS の評価値より大きいが，真の解である BP1 の投資配分比率と誤差の少ない良解が得られていると言える．

USSM の有効性については，表 1(b) においてより確立された結果を得ることができる．表 1(b) より，BP2 に対する複製を行った場合，期間 10 を除いた全ての期間において RP2 の評価値と投資配分比率の誤差が，RP1 のそれらより小さい．特に，将来期間における BP2 のリターンに対する RP2 のリターンの誤差は全期間において極めて小さくなっており，良解が得られている．以上より，USSM の探索空間は EDA によるベンチマークポートフォリオの複製に極めて有効であると言える．USSM の探索空間における複製ポートフォリオの最適化は，従来の ECSS における最適化と比較し，EDA により解の評価値を最小化することに連動して解の改良が行われていると言える．

6. おわりに

本研究では，ポートフォリオのレプリケーション問題に

表 1　ベンチマークポートフォリオ BP1 と BP2 に対する複製ポートフォリオ RP1 と RP2
Table 1 Results of Replication Portfolios RP1 and RP2 for Benchmark Portfolios BP1 and BP2.

(a) ベンチマークポートフォリオ BP1

	複製ポートフォリオ RP1			複製ポートフォリオ RP2		
期間	評価値	投資配分比率の誤差	将来期間のリターンの誤差	評価値	投資配分比率の誤差	将来期間のリターンの誤差
1	3.855E-06	0.8703	0.1122	1.013E-05	0.8548	0.0888
2	8.793E-06	1.0543	0.1769	6.141E-06	0.8105	0.1332
3	5.273E-06	0.7399	0.1054	1.100E-05	0.9432	0.1486
4	5.014E-06	0.9821	0.0913	1.528E-05	0.9477	0.1010
5	6.644E-06	1.0271	0.1460	7.163E-06	0.8283	0.1097
6	9.929E-06	0.8983	0.1688	1.383E-05	1.1731	0.2161
7	8.217E-06	1.0615	0.2289	1.856E-05	0.8552	0.1420
8	1.065E-05	0.9645	0.1960	2.263E-05	1.0619	0.1898
9	6.168E-06	0.9708	0.3086	7.548E-06	1.0011	0.3077
10	1.511E-05	0.9564	0.2311	3.695E-05	0.7727	0.1562
11	1.001E-05	0.9842	0.1754	1.297E-05	0.9726	0.1325
12	6.445E-06	1.0209	0.1334	1.047E-05	0.8084	0.1095
13	5.132E-06	1.0630	0.1184	2.558E-06	0.8170	0.0916

(b) ベンチマークポートフォリオ BP2

	複製ポートフォリオ RP1			複製ポートフォリオ RP2		
期間	評価値	投資配分比率の誤差	将来期間のリターンの誤差	評価値	投資配分比率の誤差	将来期間のリターンの誤差
1	4.953E-06	1.0431	0.1427	1.068E-06	0.3086	0.0492
2	8.296E-06	1.1498	0.1683	3.423E-06	0.4149	0.0793
3	6.411E-06	1.0048	0.1822	2.797E-06	0.3440	0.0681
4	4.416E-06	1.1423	0.1511	3.834E-06	0.4805	0.0646
5	4.228E-06	1.0154	0.1245	3.595E-06	0.6028	0.1051
6	7.898E-06	1.0158	0.1728	2.082E-06	0.3749	0.0693
7	1.205E-05	1.0152	0.1799	8.491E-06	0.4747	0.0947
8	1.400E-05	1.0895	0.2185	1.147E-05	0.4537	0.0895
9	9.388E-06	1.0638	0.2888	6.833E-07	0.1479	0.0484
10	1.208E-05	1.0918	0.2587	2.714E-05	1.1676	0.2464
11	9.380E-06	1.1256	0.2298	5.845E-06	0.3987	0.0734
12	9.702E-06	1.2130	0.1550	7.764E-06	0.2970	0.0425
13	4.285E-06	1.0816	0.1233	7.803E-07	0.2184	0.0317

おける従来の等式制約付き探索空間 ECSS を無制約化する探索空間無制約化モデル USSM を提案した．USSM の探索空間においては，進化計算による解探索において制約を満たすことを考慮する必要はない．

数値実験結果から，本研究の範囲内で言えることではあるが，USSM の探索空間における進化計算による複製ポートフォリオの最適化は，従来の ECSS における最適化と比較し，解の評価値を最小化することに連動して解の改良が行われることを示した．

USSM は，これまで真の解であるベンチマークポートフォリオを生成することが困難であったポートフォリオのレプリケーション問題に対して，ベンチマークポートフォリオの投資配分比率に非常に近い良解を生成できる探索空間を提示する極めて有効なモデルであると言える．

参考文献

[1] Xia, Y., Liu, B., Wang, S. and Lai, K.K.: A Model for Portfolio Selection with Order of Expected Returns, *Computers & Operations Research*, Vol.27, pp.409–422 (2000).

[2] Chang, T.J., Meade, N., Beasley, J.E. and Sharaiha, Y.M.: Heuristics for Cardinality Constrained Portfolio Optimization, *Computers & Operations Research*, Vol.27, pp.1271–1302 (2000).

[3] Orito, Y., Sugizaki, S., Yamamoto, H., Tsujimura, Y. and Kambayashi, Y.: Index Fund Rebalancing Using Probabilistic Model-building Genetic Algorithm with Narrower Width Histograms, *Proceedings of WCCI 2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence*, pp.2974–2979 (2010).

[4] Kimura, S. and Matsumura, K.: Constrained Multimodal Function Optimization Using a Simple Evolutionary Algorithm, *Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation 2011*, pp.447–454 (2011).

[5] Orito, Y., Yamamoto, H. and Tsujimura, Y.: Equality Constrained Long-Short Portfolio Replication by Using Probabilistic Model-building GA, *Proceedings of WCCI 2012 IEEE World Congress on Computational Intelligence*, pp.513–520 (2012).

[6] 折登由希子, 花田良子, 柴田峻輔, 山本久志: 複製対象の解の特性を考慮した分布交換 EDA によるロングショートポートフォリオのレプリケーション, 情報処理学会論文誌数理モデル化と応用, (掲載決定).