Vol.2013-CVIM-187 No.8
2013/5/30

三角測量における2-ノルム最適化問題の線形行列不等式に基づく解法

遠藤 健[1,a)]　伊藤 義道[2]　馬場口 登[1]

概要：本報告では，多視点からの三角測量において，線形行列不等式を用いて再投影誤差を最小化する手法を提案する．その手法は，トレース最小化問題の性質を利用することにより，非凸な 2-ノルム最適化問題を凸な線形行列不等式の問題に帰着するという考えに基づいている．これにより，Kahl らが提案した線形行列不等式に基づく手法に比べて推定する変数の数を抑えることができるため，計算時間の低減が期待できる．本報告では，数値例を通して，推定精度，及び計算時間の観点から提案手法と Kahl らの手法を比較し，その結果を考察する．

1. はじめに

三角測量は，観測された複数の画像上の特徴点の座標とカメラの内部，及び外部パラメータから，3 次元空間中における特徴点の座標を推定する問題であり，古くから研究がなされている．この問題は，再投影誤差の 2-ノルム[*1]で定義されるコスト関数を最小化する問題として定義されるが，そのコスト関数は一般に特徴点の座標に関する複雑な非線形関数となるため，最適解の計算が困難であることが知られている [1], [2], [3], [4]．例えば，代数的解法について考察した文献 [4] では，三角測量においては，カメラの視点数が増えるにつれて高次の多項式の根を計算することが必要となり，3 視点の場合は実に 47 次の多項式の根を求める問題になることが報告されている．このため，代数的解法以外にも，レーベンバーグ・マーカート法 [5] を用いたバンドル調整 [2], [6]，分枝限定法 [7], [8], [9]，線形行列不等式解法 [10] など，様々な手法が提案されている[*2]．

Kahl らにより提案された線形行列不等式解法 [10] は，再投影誤差最小化問題に現れる非凸 2 次制約条件に対し，文献 [15] で提案された階層的な凸緩和を施すことによって，線形な行列不等式を制約条件とする凸最適化問題に帰着させている．階層的な凸緩和手法は，緩和の次数を上げることにより最適解への収束が保障されるという利点があるが，これに伴い変数の数や，扱う行列のサイズが緩和次数の増加に伴い爆発的に大きくなるため，多くの計算時間と複雑な手続きが必要となるという問題がある．このため，文献 [10] では部分的緩和と呼ばれる手法を用いて扱う行列のサイズを小さくしているが，それでも緩和次数の 3 次のオーダーで大きくなるため，やはり計算に多くの時間が必要となる．また，部分的緩和を施した場合は，緩和次数を上げても最適解への収束性が必ずしも保証されないという問題もある．さらに，制約条件に対する重みづけを表すパラメータが存在するため，その値を試行錯誤的に求める必要があるという実装上の問題も含んでいる．

そこで，本報告では，トレース最小化問題の性質を利用することにより，複雑な手続きと多くの計算時間を必要としない 2 種類の線形行列不等式に基づく手法を提案する．第 1 の手法は，ラグランジュ型コスト関数に基づく手法，第 2 の手法は二分法に基づく手法である．ラグランジュ型コスト関数の基づく手法は，Kahl らの手法と同様に制約条件に対する重みづけを表すパラメータが存在するため，その値を試行錯誤的に決定しなければならない．しかし，計算に用いる変数の数が少ないため，少ない計算時間により特徴点の 3 次元座標を推定できる特徴がある．一方，二分法に基づく手法は，重みづけを表すパラメータを必要としない手法である．計算時間は，Khal らの手法とほぼ同程度必要となる一方で，より再投影誤差の小さい特徴点の 3 次元座標を推定することができる．

1　大阪大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Osaka University
2　大阪電気通信大学工学部
Faculty of Engineering, Osaka Electro-Communication University
a)　endo@nanase.comm.eng.osaka-u.ac.jp

*1　ベクトルに対して 2-ノルム (ユークリッドノルム) を L_2 ノルムと呼んでいる文献があるが，L_2 ノルムは本来 Lebesgue 空間 L_2 に属する関数のノルムを表す別の概念であるので，本報告では使わない．
*2　2-ノルムの代わりに ∞-ノルムを用いて大域的最適解への収束が保証される準凸最適化問題に帰着する方法も提案されているが [11]-[14]，2-ノルム最適化ではないので本報告では触れない．

本報告の構成について述べる．第 2 節では，線形行列不等式に基づく従来手法として文献 [10] の手法について記述する．第 3 節において，提案するトレース最小化問題の性質を利用する線形行列不等式解法について述べる．第 4 節では，数値例を通して，推定精度，及び計算時間の観点から提案手法と文献 [10] の手法を比較し，その結果を考察する．

2. 階層的凸緩和に基づく線形行列不等式解法

再投影誤差最小化問題の制約条件は非凸 2 次制約であるため，解の探索領域は非凸領域となる．文献 [10] では，解の探索領域を凸な領域に緩和することにより問題を凸最適化問題の 1 つである線形行列不等式の問題に帰着する手法を提案している．しかしながら，文献 [10] の記述は，2 次以上の凸緩和に関する説明が不十分なため，非常に分かりにくい．そこで以下では，まず，2 視点からの三角測量を対象とし，n 次の凸緩和を施す文献 [10] の線形行列不等式に基づく解法を分かりやすい形でまとめておく．次に，その手法の問題点を述べる．

2 視点からの三角測量に関する再投影誤差最小化問題は，次のように定式化できる．

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{2} \left\| \quad \widetilde{\mathbf{x}}_i - \frac{\mathbf{A}_i\mathbf{X}+\mathbf{b}_i}{\mathbf{c}_i^\top\mathbf{X}+d_i} \right\|^2. \tag{1}$$

ただし，$\widetilde{\mathbf{x}}_i$ は第 i カメラで観測された特徴点の 2 次元座標，$\mathbf{X}$ は特徴点の 3 次元座標を表す．また，$\mathbf{A}_i$，$\mathbf{b}_i$，$\mathbf{c}_i^\top$ 及び d_i は，第 i カメラの投影行列 $\mathbf{P}_i$ を構成する行列であり，次式で与えられる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{b}_i \\ \mathbf{c}_i^\top & d_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} p^i_{11} & p^i_{12} & p^i_{13} & p^i_{14} \\ p^i_{21} & p^i_{22} & p^i_{23} & p^i_{24} \\ \hline p^i_{31} & p^i_{32} & p^i_{33} & p^i_{34} \end{array}\right] = \mathbf{P}_i. \tag{2}$$

式 (1) の再投影誤差最小化問題は次の最小化問題と等価である．

$$\text{minimize} \qquad \gamma_1+\gamma_2, \tag{3}$$

$$\text{subject to} \qquad \left\|\widetilde{\mathbf{x}}_i - \frac{\mathbf{A}_i\mathbf{X}+\mathbf{b}_i}{\lambda_i(\mathbf{X})}\right\|^2 \leq \gamma_i \qquad (i=1,2). \tag{4}$$

ただし，$\lambda_i(\mathbf{X})$ は次式で与えられる．

$$\lambda_i(\mathbf{X}) = \mathbf{c}_i^\top\mathbf{X}+d_i. \tag{5}$$

式 (4) は次のように記述できる．

$$\gamma_i - \left(\widetilde{\mathbf{x}}_i - \frac{\mathbf{A}_i\mathbf{X}+\mathbf{b}_i}{\lambda_i(\mathbf{X})}\right)^\top \left(\widetilde{\mathbf{x}}_i - \frac{\mathbf{A}_i\mathbf{X}+\mathbf{b}_i}{\lambda_i(\mathbf{X})}\right) \geq 0 \quad (i=1,2). \tag{6}$$

さらに，式 (6) は次のように変換することができる．

$$\begin{aligned}&\gamma_i - \Big(\lambda_i(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_i - (\mathbf{A}_i\mathbf{X}+\mathbf{b}_i)\Big)^\top \Big(\lambda_i(\mathbf{X})^2\mathbf{I}_2\Big)^{-1} \\ &\quad\times \Big(\lambda_i(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_i - (\mathbf{A}_i\mathbf{X}+\mathbf{b}_i)\Big) \geq 0 \qquad (i=1,2).\end{aligned} \tag{7}$$

ただし，$\mathbf{I}_2$ は 2 次の単位行列である．式 (7) に対して，シュールの補題[*3] を適用すると次式を得る．

$$\begin{bmatrix} \lambda_i(\mathbf{X})^2\mathbf{I}_2 & \lambda_i(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_i - (\mathbf{A}_i\mathbf{X}+\mathbf{b}_i) \\ * & \gamma_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (i=1,2). \tag{8}$$

ただし，$*$ はブロック対称行列を簡便に記述するために導入した記号であり，対応する非対角ブロックの転置を表す．また，実対称行列 $\mathbf{X}$ に対し，$\mathbf{X} \geq 0$ は，行列 $\mathbf{X}$ が半正定行列であることを表す．

一般に n 次の凸緩和を考える場合，n 次のモーメント行列，及び $n-1$ 次のモーメント行列が必要になる．n 次のモーメント行列 $\mathbf{M}_n$ は，n 次の基底ベクトル $\mathbf{v}_n$ から構成される．対象とする問題が三角測量であるとき，n 次の基底ベクトル $\mathbf{v}_n$ は次式のように 3 変数 n 次多項式を構成する全ての単項式を用いて定義される．

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_n^\top = \Big[\quad & 1 \quad X \quad Y \quad Z \quad X^2 \quad XY \quad XZ \\ & Y^2 \quad YZ \quad Z^2 \quad X^3 \cdots Z^3 \cdots X^n \cdots Z^n \Big].\end{aligned} \tag{9}$$

また，n 次モーメント行列 $\mathbf{M}_n$ は，次式で定義される．

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^\top. \tag{10}$$

ここで，X，Y，及び Z は，推定する 3 次元空間中の特徴点の X 成分，Y 成分，及び Z 成分である．また，式 (10) より $\mathbf{M}_n$ はランクが 1 の行列であることが分かる．

次に，式 (8) に現れる $\mathbf{X}$ に関して非線形な多項式要素 $\lambda_i(\mathbf{X})^2$ に，$n-1$ 次のモーメント行列を作用させ，次式の制約条件を新たに加える．

$$\lambda_i(\mathbf{X})^2\mathbf{M}_{n-1} \geq 0 \qquad (i=1,2). \tag{11}$$

さらに，n 次モーメント行列が半正定行列となる条件，及びそのランクが 1 となる条件を表す以下の制約条件を加える．

$$\mathbf{M}_n \geq 0, \tag{12}$$

$$\text{rank}(\mathbf{M}_n) = 1. \tag{13}$$

以上の操作により，式 (3) 及び式 (4) で表される最小化問題から次の最小化問題を得る．

[*3] シュールの補題とは，$\mathbf{R}$ が正則行列である場合に，$\mathbf{Q}-\mathbf{S}^\top\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S} \geq 0$ と $\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^\top & \mathbf{Q}\end{bmatrix} \geq 0$ が等価であることをいう補題である．

$$\text{minimize} \quad \gamma_1 + \gamma_2, \tag{14}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \lambda_i(\mathbf{X})^2\mathbf{I}_2 & \lambda_i(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_i - (\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{b}_i) \\ * & \gamma_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (i = 1, 2), \tag{15}$$

$$\lambda_i(\mathbf{X})^2\mathbf{M}_{n-1} \geq 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{16}$$

$$\mathbf{M}_n \geq 0, \tag{17}$$

$$\mathrm{rank}(\mathbf{M}_n) = 1. \tag{18}$$

式 (15)-式 (18) における制約条件は，$\mathbf{X}$ に関して非線形な項を含んでいるため，線形行列不等式条件ではない．そこで，式 (15)-式 (18) における，$\mathbf{X}$ の要素に関する非線形な単項式 $X^{k_1}Y^{k_2}Z^{k_3}$ に対応した $\alpha_{k_1k_2k_3}$ という変数を導入する．ここでベクトル α_{2n} を

$$\alpha_{2n}^\top = \begin{bmatrix} \alpha_{100} & \alpha_{010} & \alpha_{001} & \alpha_{200} & \alpha_{110} & \alpha_{101} & \alpha_{020} \\ \alpha_{011} & \alpha_{002} & \alpha_{300} \cdots \alpha_{003} \cdots \alpha_{(2n)00} \cdots \alpha_{00(2n)} \end{bmatrix}^\top \tag{19}$$

と定義し，$\lambda_i(\mathbf{X})^2$，式 (16) の左辺，式 (17) の左辺，及び式 (18) の左辺において単項式 $X^{k_1}Y^{k_2}Z^{k_3}$ を変数 $\alpha_{k_1k_2k_3}$ に置き換えたものを，それぞれ $\ell_i(\alpha_{2n})$，$\mathbf{L}_i(\alpha_{2n})$，及び $\mathbf{M}(\alpha_{2n})$ と置くと，式 (14)-式 (18) の最小化問題は次の最小化問題に変換される．

$$\text{minimize} \quad \gamma_1 + \gamma_2, \tag{20}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \ell_i(\alpha_{2n})\mathbf{I}_2 & \lambda_i(\alpha_1)\widetilde{\mathbf{x}}_i - (\mathbf{A}_i\alpha_1 + \mathbf{b}_i) \\ * & \gamma_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (i = 1, 2), \tag{21}$$

$$\mathbf{L}_i(\alpha_{2n}) \geq 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{22}$$

$$\mathbf{M}(\alpha_{2n}) \geq 0, \tag{23}$$

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{M}(\alpha_{2n})\right) = 1. \tag{24}$$

ただし，α_1 は次式で定義する．

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{100} \\ \alpha_{010} \\ \alpha_{001} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{X}. \tag{25}$$

したがって α_1 は，変数 α_{2n} の一部である．式 (20)-式 (24) で表された最小化問題において，式 (20)-式 (23) は変数 α_{2n} に関する線形な制約であるが，式 (24) のランク条件は α_{2n} に関する非線形な制約であるため，このままでは解くことが困難である．そこで文献 [10] では，$\mathbf{M}(\alpha_{2n})$ のランクが 1 であるという条件を，$\mathbf{M}(\alpha_{2n})$ のトレースを小さくするという条件に置き換え，これに重みをつけてコスト関数に加えた，次の最小化問題を提案している．

$$\text{minimize} \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \varepsilon\mathrm{Tr}(\mathbf{M}(\alpha_{2n})), \tag{26}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \ell_i(\alpha_{2n})\mathbf{I}_2 & \lambda_i(\alpha_1)\widetilde{\mathbf{x}}_i - (\mathbf{A}_i\alpha_1 + \mathbf{b}_i) \\ * & \gamma_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (i = 1, 2), \tag{27}$$

$$\mathbf{L}_i(\alpha_{2n}) \geq 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{28}$$

$$\mathbf{M}(\alpha_{2n}) \geq 0. \tag{29}$$

ただし，$\mathrm{Tr}(\cdot)$ は，行列のトレースを表す．ε はモーメント行列の制約に対する重みづけを表すパラメータである．このようにコスト関数に重みづけした制約条件を加えたコスト関数を，本報告ではラグランジュ型コスト関数と呼ぶ．式 (26)-式 (29) で表された最小化問題は変数 α_{2n} に関する線形な行列不等式によって記述されているため[*4]，SeDuMi[16] や Matlab などの半正定値計画問題 [17], [18] を解くためのソルバで容易に解くことができる．ただし，ε の値として何を選べば良いかは入力データによって異なるため，試行錯誤によって決める必要がある．

以上に述べた線形な問題への凸緩和手法は，文献 [15] の手法を基にして Kahl らが新たに提案した手法である．文献 [15] の手法は，式 (11) の条件の代わりに，

$$\mathbf{M}_{n-1}(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{\Lambda}_i(\mathbf{X}) \geq 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{30}$$

を導入する．ただし，$\otimes$ はクロネッカー積[*5] を表し，$\mathbf{\Lambda}_i(\mathbf{X})$ は式 (8) の左辺の行列を表す．

文献 [15] の手法に現れる行列は，式 (30) に示すようなクロネッカー積によって生成されるため，扱う行列の規模が文献 [10] の手法に比べて爆発的に増大し，必要な変数の数も多くなる．しかし，文献 [10] の手法とは異なり，モーメント行列の次数を増加させることによる解の漸近的最適性が保証される．文献 [10] の手法は，式 (11) のように $\mathbf{\Lambda}_i(\mathbf{X})$ の非線形な多項式要素 $\lambda_i(\mathbf{X})^2$ のみをモーメント行列に作用させているため，推定するパラメータ数や扱う行列のサイズを減らすことができる一方，モーメント行列の次数を増加させても解の漸近的最適性が保証されないという問題がある．ただし，文献 [10]，及び文献 [15] の手法はともに，モーメント行列のランクが 1 となれば解の最適性が保証される．

以上をまとめると，文献 [10] で提案された行列不等式に基づく解法は，文献 [15] の方法よりも程度は少ないものの，モーメント行列の次数の増加に伴い，扱う行列の規模

*4 α_1 は α_{2n} の要素に含まれるため，式 (26)-式 (29) の最小化問題は α_{2n} に関する線形な行列不等式とみなせる．

*5 行列 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ と行列 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ のクロネッカー積 $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{np\times mq}$ は $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1m}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & \cdots & a_{nm}\mathbf{B} \end{bmatrix}$ で定義される．

や変数の数が増大し制約条件の凸緩和に複雑な手続きを要する．また，モーメント行列の次数を増大させても解の漸近的最適性は保証されないという問題もある．

そこで次節では，モーメント行列の作成に伴う複雑な手続きが不要で，かつ推定するパラメータの数が少ない線形行列不等式に基づく再投影誤差最小化手法を提案する．

3. トレース最小化問題を利用した凸緩和に基づく線形行列不等式解法

本節では，凸緩和にトレース最小化問題の性質を利用する線形行列不等式解法について述べる．初めに，再投影誤差最小化問題における非凸 2 次制約条件を凸緩和するために必要な準備を行う．次に，コスト関数最小化手法としてラグランジュ型コスト関数に基づく手法，及び二分法に基づく手法について述べる．以下では，2 視点からの三角測量について述べるが，3 視点以上の場合にも容易に拡張できる．

3.1 制約条件の凸緩和のための準備

2 視点からの三角測量において，再投影誤差は次式のように表現することができる．

$$E(\mathbf{X}) = \left\| \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}}_1 - \dfrac{\mathbf{A}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{b}_1}{\lambda_1(\mathbf{X})} \\ \widetilde{\mathbf{x}}_2 - \dfrac{\mathbf{A}_2\mathbf{X}_2 + \mathbf{b}_2}{\lambda_2(\mathbf{X})} \end{bmatrix} \right\|^2 . \tag{31}$$

したがって，再投影誤差最小化問題は，次式のように定式化できる．

$$\text{minimize} \quad \gamma, \tag{32}$$

$$\text{subject to} \quad \left\| \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}}_1 - \dfrac{\mathbf{A}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{b}_1}{\lambda_1(\mathbf{X})} \\ \widetilde{\mathbf{x}}_2 - \dfrac{\mathbf{A}_2\mathbf{X}_2 + \mathbf{b}_2}{\lambda_2(\mathbf{X})} \end{bmatrix} \right\|^2 \le \gamma. \tag{33}$$

式 (33) は次式のように表すことができる．

$$\gamma - \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}}_1 - \dfrac{\mathbf{A}_1\mathbf{X} + \mathbf{b}_1}{\lambda_1(\mathbf{X})} \\ \widetilde{\mathbf{x}}_2 - \dfrac{\mathbf{A}_2\mathbf{X} + \mathbf{b}_2}{\lambda_2(\mathbf{X})} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}}_1 - \dfrac{\mathbf{A}_1\mathbf{X} + \mathbf{b}_1}{\lambda_1(\mathbf{X})} \\ \widetilde{\mathbf{x}}_2 - \dfrac{\mathbf{A}_2\mathbf{X} + \mathbf{b}_2}{\lambda_2(\mathbf{X})} \end{bmatrix} \ge 0. \tag{34}$$

さらに，式 (34) は次のように変形できる．

$$\gamma - \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_1 - (\mathbf{A}_1\mathbf{X} + \mathbf{b}_1) \\ \lambda_2(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_2 - (\mathbf{A}_2\mathbf{X} + \mathbf{b}_2) \end{bmatrix}^\top \times \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{X})^2\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2(\mathbf{X})^2\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_1 - (\mathbf{A}_1\mathbf{X} + \mathbf{b}_1) \\ \lambda_2(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_2 - (\mathbf{A}_2\mathbf{X} + \mathbf{b}_2) \end{bmatrix} \ge 0. \tag{35}$$

式 (35) に対して，シュールの補題を適用すると次式が得られる．

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{X})^2\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \lambda_1(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_1 - (\mathbf{A}_1\mathbf{X} + \mathbf{b}_1) \\ * & \lambda_2(\mathbf{X})^2\mathbf{I}_2 & \lambda_2(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_2 - (\mathbf{A}_2\mathbf{X} + \mathbf{b}_2) \\ * & * & \gamma \end{bmatrix} \ge 0. \tag{36}$$

式 (36) の要素 $\lambda_i(\mathbf{X})^2$ を展開すると

$$\begin{aligned} \lambda_i(\mathbf{X})^2 = \lambda_i(\mathbf{X})\lambda_i(\mathbf{X})^\top &= (\mathbf{c}_i^\top\mathbf{X} + d_i)(\mathbf{c}_i^\top\mathbf{X} + d_i)^\top, \\ &= \mathbf{c}_i^\top\mathbf{X}\mathbf{X}^\top\mathbf{c}_i + 2d_i\mathbf{c}_i^\top\mathbf{X} + d_i^2 \\ &\qquad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{37}$$

となる．式 (37) より，式 (36) は行列の要素として $\mathbf{X}\mathbf{X}^\top$ という非線形な項を含んでいるため線形行列不等式条件ではない．そこで，$\mathbf{Y}$ という変数を導入し，式 (36) における $\mathbf{X}\mathbf{X}^\top$ を $\mathbf{Y}$ に置き換え，$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top$ という等式制約を加える．これにより，式 (32)，及び式 (33) で表される最小化問題は，次の行列不等式に基づく最小化問題に帰着できる．

$$\text{minimize} \quad \gamma, \tag{38}$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \lambda_1(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_1 - (\mathbf{A}_1\mathbf{X} + \mathbf{b}_1) \\ * & \lambda_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{I}_2 & \lambda_2(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_2 - (\mathbf{A}_2\mathbf{X} + \mathbf{b}_2) \\ * & * & \gamma \end{bmatrix} \ge 0, \tag{39}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top. \tag{40}$$

ただし，$\lambda_i(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ は次式で与えられる．

$$\lambda_i(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{c}_i^\top\mathbf{Y}\mathbf{c}_i + 2d_i\mathbf{c}_i^\top\mathbf{X} + d_i^2 \qquad (i = 1, 2). \tag{41}$$

このとき，式 (40) の等式条件 $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\mathrm{T}$ をいかに扱うかが本質的に重要な問題となる．本論文では，この問題に対し，次に示す補題を利用する．

補題 1 ベクトル $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，次式の最小化問題の最適解 $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は，$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\mathrm{T}$ を満たす．

$$\text{minimize} \quad \mathrm{Tr}(\mathbf{Y}), \tag{42}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{X}^\mathrm{T} \ge 0. \tag{43}$$

補題 1 の証明 $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top + \mathbf{Z}$ と置く．このとき，式 (42)，及び式 (43) は次式と等価である．

$$\text{minimize} \quad \mathrm{Tr}(\mathbf{X}\mathbf{X}^\mathrm{T} + \mathbf{Z}), \tag{44}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{Z} \ge 0. \tag{45}$$

$\mathbf{X}$ は与えられた定数ベクトルであるため，式 (44)，及び式 (45) は次式と等価である．

$$\text{minimize} \quad \mathrm{Tr}(\mathbf{Z}), \tag{46}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{Z} \ge 0. \tag{47}$$

式 (46)，及び式 (47) で表される最小化問題の最適解 $\mathbf{Z}$ は，$\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ で与えられる．そのため，式 (42)，及び式 (43) の最小化問題の最適解 $\mathbf{Y}$ は，$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top$ を満たす．以上より，補題の証明を示すことができた．□

式 (42)，及び式 (43) で与えられる最小化問題は，シュールの補題を用いて次式で表すことができる．

$$\text{minimize} \quad \mathrm{Tr}(\mathbf{Y}), \tag{48}$$

$$\text{subject to} \quad \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{X}^\top \\ \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \geq 0. \tag{49}$$

こうして得られた式 (48)，及び式 (49) で表される最小化問題を式 (40) の等式条件と置き換えることができれば良いが，式 (38)，及び式 (39) で表される最小化問題と式 (48)，式 (49) で表される最小化問題は同時に解くことができない．これは最小化すべきコスト関数が式 (38) と式 (48) と 2 つあるためである．次節では，文献 [10] と同様に，ラグランジュ型コスト関数を導入することによってこれら 2 つの最小化問題を統合する方法を提案する．また，それとは別に，二分法に基づく手法を提案する．

3.2 コスト関数最小化手法

本節では，文献 [10] と同様のラグランジュ型コスト関数に基づく手法，ならびに二分法に基づく手法を提案する．

3.2.1 ラグランジュ型コスト関数に基づく手法

本節では，式 (38) のコスト関数に式 (48) のコスト関数を重みづけした項を加えた新たなラグランジュ型コスト関数を導入する．この操作により，式 (38)-式 (40) で表される最小化問題は次式の最小化問題に変更される．

$$\text{minimize} \quad \gamma + \varepsilon \mathrm{Tr}(\mathbf{Y}), \tag{50}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \lambda_1(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_1 - (\mathbf{A}_1\mathbf{X} + \mathbf{b}_1) \\ * & \lambda_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{I}_2 & \lambda_2(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_2 - (\mathbf{A}_2\mathbf{X} + \mathbf{b}_2) \\ * & * & \gamma \end{bmatrix} \geq 0, \tag{51}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{X}^\top \\ \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \geq 0. \tag{52}$$

ここで，ε は式 (52) の制約に対する重みづけを表すパラメータであり，文献 [10] の手法と同様に，入力データごとに試行錯誤によって最適な値を決定する．式 (50)-式 (52) で表される最小化問題は，変数 $\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$ に関する線形行列不等式によって記述されている．したがって，半正定値計画問題 [17], [18] を解くためのソルバで容易に解くことができる．

3.2.2 二分法に基づく手法

文献 [10] の手法，及び第 3.2.1 節で記述したラグランジュ型コスト関数に基づく提案手法において，制約条件に関する重みづけのパラメータ ε の値は，対象とするデータによって最適な値が異なるため試行錯誤によって決定しなければならない．そのため，本節ではそのような重みづけに関するパラメータを用いない手法として，二分法に基づく手法を提案する．

二分法は，式 (31) で定義される $E(\mathbf{X})$ と与えられた正の数 γ に対して，

$$\gamma \geq E(\mathbf{X}) \tag{53}$$

を満たす $\mathbf{X}$ が存在するか否かを判定し，存在する場合は γ を小さく，存在しない場合は γ を大きくすることによって，$\gamma \geq E(\mathbf{X})$ を満たすような $\mathbf{X}$ が存在する γ の下限を求める手法である．

第 3.1 節における式展開をそのままたどることにより，式 (53) を満たす $\mathbf{X}$ が存在することと，式 (39) 及び式 (40) を満たす $\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$ が存在することは等価であることが分かる．このことを定理の形にまとめておく．

定理 1 以下の条件は等価である．

(i) $\gamma \geq E(\mathbf{X})$ を満たす $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$が存在する．

(ii) 以下の条件を満たす $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$が存在する．

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \lambda_1(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_1 - (\mathbf{A}_1\mathbf{X} + \mathbf{b}_1) \\ * & \lambda_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{I}_2 & \lambda_2(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_2 - (\mathbf{A}_2\mathbf{X} + \mathbf{b}_2) \\ * & * & \gamma \end{bmatrix} \geq 0, \tag{54}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top. \tag{55}$$

ただし，$\lambda_i(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ は

$$\lambda_i(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{c}_i^\top \mathbf{Y}\mathbf{c}_i + 2d_i\mathbf{c}_i^\top\mathbf{X} + d_i^2 \qquad (i = 1, 2). \tag{56}$$

である．

前節と同様に，式 (55) の条件があるため，定理 1 の条件 (ii) は線形行列不等式となっていない．そこで式 (55) の条件を式 (48)，及び式 (49) で表される最小化問題に置き換えた，次の最小化問題を考える．

$$\text{minimize} \quad \mathrm{Tr}(\mathbf{Y}), \tag{57}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \lambda_1(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_1 - (\mathbf{A}_1\mathbf{X} + \mathbf{b}_1) \\ * & \lambda_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{I}_2 & \lambda_2(\mathbf{X})\widetilde{\mathbf{x}}_2 - (\mathbf{A}_2\mathbf{X} + \mathbf{b}_2) \\ * & * & \gamma \end{bmatrix} \geq 0, \tag{58}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{X}^\top \\ \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \geq 0. \tag{59}$$

式 (57)-式 (59) で表される最小化問題は線形行列不等式によって記述されているため，容易に解くことができる．こ

の最小化問題に基づく二分法は，以下のようになる．

初めに，コスト関数の上界 h，及び下界 l を与え，その平均値を γ とする．次に，式 (57)-式 (59) で表される最小化問題の最適解 $\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$ を計算する．その解が $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top$ を満たす場合は上界 h を γ の値で更新し，満たさない場合は下界 l を γ の値で更新する．以上の操作を上界 h と下界 l の差が，ある一定の値 δ 以下になるまで繰り返す．

式 (57)-式 (59) で表される最小化問題と定理 1 の条件 (ii) の間に以下の定理が成り立つことは明らかである．

定理 2　式 (57)-式 (59) で表される最小化問題の最適解 $\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$ が $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top$ を満たすならば，その解は定理 1 の条件 (ii) を満足する．

定理 2 は式 (57)-式 (59) で表される最小化問題の解が $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top$ を満たすことが，$\gamma \geq E(\mathbf{X})$ を満たす $\mathbf{X}$ が存在するための十分条件であることを意味している．したがって，この最小化問題を判定条件に用いた二分法によって得られる γ の下限は，再投影誤差の上界となることが保証される．

4. 数値例と考察

4.1 数値例のための環境

本節では既存手法として，文献 [10] で提案された Kahl らの 1 次の凸緩和手法 (Kahl order1)，2 次の凸緩和手法 (Kahl order2)，及び 3 次の凸緩和手法 (Kahl order3) を用い，本論文で提案した手法 (Lagrange type, Bisection) との比較を通して検討を行う．

提案手法は，第 3.2.1 節，及び第 3.2.2 節で説明した最小化による手法を用いる．二分法を用いる際，コスト関数の上界 h，及び下界 l の更新を考えるときに，式 (57)-式 (59) の最小化問題の解 $\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$ が $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top$ を満たしているか判定する必要がある．その判定条件として $\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{X}^\top$ の最大特異値を計算し，その値が 1.0×10^{-5} より小さいとき，$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{X}^\top$ を満たしているものとみなす．

アルゴリズムの実装には，既存手法，提案手法ともに，MATLAB 上で扱える，YALMIP[19] という言語を用いた．YALMIP とは，線形行列不等式を制約条件とする最適化問題である半正定値計画問題 [17], [18] を簡単に記述するため言語である．また，YALMIP の外部ソルバとして，凸計画問題を解くためのソフトウェア SeDuMi[16] を用いた．比較のために用いた計算機の CPU は Inter(R)Core(TM): 7-2600CPU 3.40GB であり，メモリサイズは 3.49GB である．

次に，比較のために想定した三角測量を行う環境について述べる．3 次元空間中の X 軸，Y 軸，及び Z 軸の $[-1, 1]$ の範囲にランダムに点を配置し，空間中の原点からの距離が平均 5 となるようにカメラ 3 台を配置する．このとき，それぞれのカメラの視線はランダムであるが，原点付近を向くようにする．以上のような環境に対して，観測が理想的であり 3 次元空間中の特徴点の投影像にノイズが存在しない場合と，観測誤差によりノイズが存在する場合のそれぞれについて，既存手法と提案手法の比較を行う．また，観測誤差が存在する場合には，平均 0，標準偏差 σ ピクセルの正規分布に従うノイズを，観測が理想的である場合に得られる投影像に付加した座標を観測結果とする．

この試行を観測が理想的である場合，及びノイズが存在する場合の各 σ ごとに 500 回行う．その 500 回の平均の値から 1 回あたりの再投影誤差及び計算時間を求める．なお，重みづけのためのパラメータ ε は試行錯誤により決定し，既存手法，提案手法，それぞれにおいて 1.0×10^{-5}，1.0×10^{-3} とした．また，二分法の終了に関わる δ の値は，1.0×10^{-4}，1.0×10^{-7} 及び，1.0×10^{-10} を用いた．

4.1.1 推定精度の比較

既存手法と提案手法における再投影誤差の比較結果を表 1 に示す．

表 1 よりラグランジュ型コスト関数に基づく提案手法は，既存手法の 1 次の緩和手法より推定精度が優れているが，2 次，及び 3 次の緩和手法に比べると推定精度が劣っていることが分かる．

二分法に基づく手法において，$\delta = 1.0 \times 10^{-4}$ としたときの推定精度は，ノイズの標準偏差 σ の値が小さなときは 2 次の緩和手法よりも推定精度が低いが，σ の値が大きいときは 2 次の緩和手法よりも推定精度が高いことが分かる．また，$\delta = 1.0 \times 10^{-7}$ と $\delta = 1.0 \times 10^{-10}$ としたときの推定精度は，既存手法の 3 次の凸緩和手法よりも推定精度が高いことが分かる．

ここで，今回の数値例により得られた既存手法とラグランジュ型コスト関数に基づく提案手法の再投影誤差の値に関する関係性について言及しておく．既存手法の 1 次の凸緩和手法とラグランジュ型コスト関数に基づく提案手法を，重みづけのためのパラメータ ε の値を変えて比較した結果を表 2 に示す．表 2 より 1 次の緩和手法とラグランジュ型コスト関数に基づく提案手法は，ε の値が等しいときに再投影誤差の値が非常に近くなることが分かる．この結果は，それらの手法の間に密接な関係があることを示唆している．

4.1.2 計算時間の比較

既存手法と提案手法における計算時間の比較結果を表 3 に示す．また，既存手法と提案手法の変数の数を表 4 に示す．表 3，及び表 4 より，提案手法のラグランジュ型コスト関数に基づく手法は，変数の数が最も少ないために，少ない計算時間でパラメータの推定が可能であることが分かる．また，二分法に基づく手法は δ の値を小さくするにつれて，多くの計算時間が必要になることがわかる．しかし，それでも 3 次の緩和手法に要する計算時間の半分以下の計算時間でパラメータを推定することができる．第 4.1.1 節の推定精度の比較結果と本節で示した計算時間の比較結果

表 1 既存手法 (Kahl order1, Kahl order2, Kahl order3) と提案手法 (Lagrange type, Bisection) における再投影誤差の比較結果 (pixel)

Noise σ	Kahl order1	Kahl order2	Kahl order3	Lagrange type	Bisection $\delta = 1.0 \times 10^{-4}$	Bisection $\delta = 1.0 \times 10^{-7}$	Bisection $\delta = 1.0 \times 10^{-10}$
0	1.89×10^{-9}	1.56×10^{-8}	5.99×10^{-8}	1.69×10^{-5}	6.10×10^{-5}	5.96×10^{-8}	1.02×10^{-10}
0.01	2.93×10^{-4}	2.91×10^{-4}	2.91×10^{-4}	3.08×10^{-4}	3.09×10^{-4}	2.91×10^{-4}	2.91×10^{-4}
0.02	1.21×10^{-3}	1.16×10^{-3}	1.16×10^{-3}	1.18×10^{-3}	1.18×10^{-3}	1.16×10^{-3}	1.16×10^{-3}
0.03	2.79×10^{-3}	2.59×10^{-3}	2.58×10^{-3}	2.60×10^{-3}	2.60×10^{-3}	2.58×10^{-3}	2.58×10^{-3}
0.04	5.17×10^{-3}	4.80×10^{-3}	4.77×10^{-3}	4.79×10^{-3}	4.78×10^{-3}	4.77×10^{-3}	4.77×10^{-3}
0.05	8.52×10^{-3}	7.77×10^{-3}	7.69×10^{-3}	7.70×10^{-3}	7.70×10^{-3}	7.68×10^{-3}	7.68×10^{-3}
0.06	1.21×10^{-2}	1.11×10^{-2}	1.10×10^{-2}	1.10×10^{-2}	1.10×10^{-2}	1.09×10^{-2}	1.09×10^{-2}

表 2 1 次の緩和手法 (Kahl order1) とラグランジュ型コスト関数に基づく提案手法 (Lagrange type) における再投影誤差の比較結果 (pixel)

	$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-4}$		$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-5}$		$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-7}$	
Noise σ	Kahl order1	Lagrange type	Kahl order1	Lagrange type	Kahl order1	Lagrange type
0	1.85×10^{-7}	1.85×10^{-7}	1.88×10^{-9}	1.88×10^{-9}	1.87×10^{-11}	1.88×10^{-11}
0.01	2.913×10^{-4}	2.913×10^{-4}	2.93×10^{-4}	2.93×10^{-4}	3.091×10^{-4}	3.091×10^{-4}
0.02	1.164×10^{-3}	1.164×10^{-3}	1.206×10^{-3}	1.206×10^{-3}	1.271×10^{-3}	1.271×10^{-3}
0.03	2.601×10^{-3}	2.601×10^{-3}	2.79×10^{-3}	2.79×10^{-3}	2.917×10^{-3}	2.917×10^{-3}
0.04	4.852×10^{-3}	4.852×10^{-3}	5.168×10^{-3}	5.168×10^{-3}	5.339×10^{-3}	5.339×10^{-3}
0.05	7.984×10^{-3}	7.984×10^{-3}	8.52×10^{-3}	8.52×10^{-3}	8.761×10^{-3}	8.761×10^{-3}
0.06	1.144×10^{-2}	1.144×10^{-2}	1.213×10^{-2}	1.213×10^{-2}	1.242×10^{-2}	1.243×10^{-2}

により，提案手法は高い推定精度を合理的な計算時間で達成できることがわかる．

5. おわりに

本報告では，複雑な手続きを要する階層的凸緩和に基づく線形行列不等式解法の問題点に着目し，複雑な手続きが不要な 2 つの線形行列不等式に基づく手法を提案した．第 1 の手法は，ラグランジュ型コスト関数に基づく手法，第 2 の手法は二分法に基づく手法である．

本報告では，文献 [10] で提案された手法との比較を通してラグランジュ型コスト関数に基づく提案手法を評価した．文献 [10] の手法と提案手法ともに重みづけのパラメータ ε を試行錯誤的に調整して最も性能の良い値を選んだ場合，ラグランジュ型コスト関数に基づく提案手法の推定精度は，一般に文献 [10] の 1 次の凸緩和手法と同程度の推定精度であり，2 次の凸緩和手法，及び 3 次の凸緩和手法より若干劣ることが分かった．一方，計算時間に関しては，文献 [10] のどの手法よりも少ない計算時間で特徴点の 3 次元座標を推定できることが分かった．このことから，ラグランジュ型コスト関数に基づく提案手法は，推定精度を若干犠牲にして計算時間を少なくしたい場合に有用な手法であるといえる．しかしながら，パラメータ ε の決定に試行錯誤が必要となるという問題もある．

一方，二分法に基づく提案手法は，これらの手法とは異なり，試行錯誤によるパラメータの決定が不要な推定手法である．数値例による比較の結果，推定精度は，文献 [10] の 3 次の凸緩和手法よりも高いことが分かった．計算時間については，文献 [10] の 2 次の凸緩和手法よりも計算時間を必要とするが，3 次の凸緩和手法の半分以下の計算時間で特徴点の 3 次元座標を推定できる．このことから，二分法に基づく提案手法は計算時間より推定精度を重視する場合に有用な手法であるといえる．

現状では，提案手法は空間中の特徴点 1 点のみを復元する手法に留まっている．そこで，提案手法を複数の特徴点の座標を同時に推定できる手法に拡張することが今後の課題として挙げられる．

参考文献

[1] Hartley, R. and Kahl, F.: Optimal algorithms in multiview geometry, *In Proceedings of Asian Conference Computer Vision*, Vol. 4843, pp. 13-34, 2007.

[2] Hartley, R. and Zisserman, A.: *Multiple view geometry in computer Vision*, Cambridge University Press, 2nd edition, 2003.

[3] Hartley, R. and Sturm, P.: Triangulation, *Computer Vision and Image Understanding*, Vol. 68, No. 2, pp. 146-157, 1997.

[4] Stewénius, H. et al.: How hard is three-view triangulation really?, *In Proceedings of International Conference on Computer Vision*, Vol. 1, pp. 686-693, 2005.

[5] Levenberg, K.: A method for the solution of certain problem in least squares, *Quarterly of Aplied Mathematics*, Vol. 2, pp. 164-168, 1944.

[6] 岡谷貴之： バンドルアジャストメント，情報処理学会研究報告，コンピュータビジョンとイメージメディア，Vol. 167, No. 37, pp. 1-16, 2009.

[7] Agarwal, S. et all.: Practical global optimization for multiview geometry, *In Proceedings of European Conference on Computer Vision*, Vol. 3951, pp. 592-605, 2006.

[8] Josephson, K. and Kahl, F.: Triangulation of points, lines and conics, *In Proceedings of Scandinavian Conference on Image Analysis*, Vol. 4522, pp. 162-172, 2007.

表 3 既存手法 (Kahl order1, Kahl order2, Kahl order3) と提案手法 (Lagrange type, Bisection) における計算時間の比較結果 (sec)

Noise σ	Kahl order1	Kahl order2	Kahl order3	Lagrange type	Bisection $\delta = 1.0 \times 10^{-4}$	Bisection $\delta = 1.0 \times 10^{-7}$	Bisection $\delta = 1.0 \times 10^{-10}$
0	1.32	2.37	10.5	0.926	2.01	2.97	4.18
0.01	1.32	2.36	10.7	0.925	2.03	3.06	4.24
0.02	1.33	2.37	10.7	0.926	2.04	3.06	4.19
0.03	1.32	2.37	10.7	0.926	2.04	3.05	4.15
0.04	1.32	2.37	10.7	0.925	2.04	3.03	4.12
0.05	1.33	2.37	10.7	0.926	2.04	3.03	4.09
0.06	1.32	2.37	10.7	0.925	2.06	3.02	4.07

表 4 既存手法 (Kahl order1, Kahl order2, Kahl order3) と提案手法 (Lagrange type, Bisection) の変数の数

	Kahl order1	Kahl order2	Kahl order3	Lagrange type	Bisection $\delta = 1.0 \times 10^{-4}$	Bisection $\delta = 1.0 \times 10^{-7}$	Bisection $\delta = 1.0 \times 10^{-10}$
Variables	12	37	86	10	9	9	9

[9] Lu, F. and Hartley, R.: A fast optimal algorithm for L_2 triangulation, *In Proceedings of Asian Conference on Computer Vision*, Vol. 4844, pp. 279-288, 2007.
[10] Kahl, F. and Henrion, D.: Globally optimal estimates for geometric reconstruction problem, *International Journal of Computer Vision*, Vol. 74, No. 1, pp. 3-15, 2007.
[11] Hartley, R. and Schaffalitzky, F.: L_∞ minimization in geometric reconstruction problems, *In Proceedings of Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Vol. 1, pp. 504-509, 2004.
[12] Kahl, F.: Multiple view geometry and the L_∞-norm, *In Proceedings of International Conference on Computer Vision*, Vol. 2, pp. 1002-1009, 2005.
[13] Ke, Q. and Kanade, T.: Quasiconvex optimization for robust geometric reconstruction, *In Proceedings of International Conference on Computer Vision*, Vol. 2, pp. 986-993, 2005.
[14] Hartley, R. and Kahl, F.: Global optimization through searching rotation space and optimal estimation of the essential matrix, *In Proceedings of International Conference on Computer Vision*, 2007.
[15] Henrion, D. and Lasserre, J.B.: Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, No. 2, pp. 192-202, 2006.
[16] Sturm, J.F.: Using SeDuMi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cone, *Optimization Methods and Software*, Vol. 11, No. 1-4, pp. 625-653, 1999.
[17] Vanderberghe, L. and Boyd, S.: Semidefinite programming, *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, Vol. 36, No. 1, pp. 49-95, 1996.
[18] Boyd, S. and Vanderberghe, L.: *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
[19] Lofberg, J.: YALMIP : a toolblx for modeling and optimization in matlab, *International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pp. 284-289, 2004.