

日本と米国における経済恐慌リスク

東川瞬^{†1} 宮崎浩一^{†1} 竹俣潤^{†1}

本研究では日本の消費データを用いて経済恐慌リスクを経済恐慌の起こる確率、プライシングカーネルのエントロピー、インプライド・ボラティリティの観点から捉え、その結果を米国の消費データを用いて検証した Backus, Chernov and Martin(2011)の結果と比較し、日米間の経済恐慌リスクの違いを検討する。

The comparison of disaster risks between Japan and USA

SHUN HIGASHIKAWA^{†1} KOICHI MIYAZAKI^{†1} JUN TAKEMATA^{†1}

In this research, we analyze disasters: extreme negative results of consumption growth from the viewpoint of the probabilities, the entropy and the implied volatility using the Japanese consumption and stock data. We discuss the difference of disaster risks by comparing the Japanese result and USA result which is shown in preceding research, Backus, Chernov and Martin (2011).

1. はじめに

金融市場で取引を行う投資家にとって経済恐慌は大きな関心事である。経済恐慌リスクに関する先行研究に Backus, Chernov and Martin(2011)[1]がある。[1]では景気状況を消費で捉え、対数消費成長率の変動をジャンプ拡散モデルで記述し、米国の消費のデータを用いて経済恐慌リスクを、経済恐慌の起こる確率、リスク回避的な投資家の見込むリスク量のエントロピーを用いた表現、オプション市場価格に内在する経済恐慌リスクの3つの観点から分析した。

本研究では日本の消費のデータを用いて経済恐慌リスクを上記の3つの観点から検証し、先行研究の結果と比較することで日米の経済恐慌リスクの違いを検討する。

2. 経済恐慌リスク

2.1 対数消費成長率のモデル化

対数消費成長率 $\log g$ は、i.i.d.の下でジャンプ拡散モデルに従うと仮定すると式(1)のように表される。

$$\log g_{t+1} = w_{t+1} + z_{t+1} \quad (1)$$

w_{t+1} は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従い、 z_{t+1} は ω をインテンシティとしたポアソン混合正規分布 $z_{t+1} | j \sim N(j\theta, j\delta^2)$ に従う。これは z_{t+1} が単位時間の間に j 回ジャンプするという条件の下で、ジャンプ幅率が正規分布に従うことを意味しており、 θ と δ はジャンプ幅率の平均とボラティリティである。

2.2 経済恐慌の起こる確率

本研究では[1]と同様に閾値を下回る対数消費成長率の急激な下方ジャンプを経済恐慌と定義する。経済恐慌の起こる確率は対数消費成長率の従う分布の閾値を下回るテイル部分の面積で表されるため、式(2)のように定式化される。

$$p(D_b) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{-(\kappa_1 - n\sqrt{\kappa_2}) - (\mu + j\theta)/\sqrt{\sigma^2 + j\delta^2}}{\sigma}\right) e^{-\omega} \omega^j / j! \quad (2)$$

ここで、 κ_1 と κ_2 は対数消費成長率の平均と分散である。

2.3 プライシングカーネルのエントロピー

プライシングカーネルとは異時点間の限界効用代替率 m である。また、エントロピーは確率変数のリスク量を表す2次以降のキュムラントの総和であり、確率変数の総リスク量を表す。プライシングカーネルのエントロピーは式(3)となり、式(3)の右辺は2次以降のキュムラント $\kappa_i(\log g)$ をリスク回避度 α で重み付けているため、プライシングカーネルのエントロピーは投資家の見込む消費の総リスク量を表す。

$$L(m) = \log E[m] - E[\log m] = \sum_{i=2}^{\infty} \kappa_i(\log g) (-\alpha)^i / i! \quad (3)$$

3次以降のキュムラントの総称を高次キュムラントといい、プライシングカーネルのエントロピーに占める割合が高いほど経済恐慌リスクも大きくなる。

2.4 インプライド・ボラティリティ(IV)

対数消費成長率 $\log g$ と金融市場の株式の対数超過リターン $\log r^e - \log r^f$ は式(4)のようにスケールパラメータ λ によって接続されるため、対数消費成長率の変動が株式の対数超過リターンに影響することが分かる。

$$\log r_{t+1}^e - \log r_{t+1}^f = \lambda \log g_{t+1} - k(\lambda - \alpha; \log g) + k(-\alpha; \log g) \quad (4)$$

ここで、 $k(\lambda - \alpha; \log g)$ と $k(-\alpha; \log g)$ は係数が $\lambda - \alpha$ と $-\alpha$ の対数消費成長率のキュムラント母関数である。特に株式を原資産とするプット・オプションは、満期時に権利行使価格以下となる際に利益が生じるため、経済恐慌が起こるとプット・オプションの価格(式(5))にも影響する。

$$q^{p,MD} = \sum_{j=0}^{\infty} (e^{-\omega} \omega^{*j}) [q^b \Phi(d_j) - \exp(\kappa_{1j} + \kappa_{2j}/2) \Phi(d_j - \sqrt{\kappa_{2j}})] / j! \quad (5)$$

ここで $d_j = (\log b - \log r^f - \kappa_{1j}) / \sqrt{\kappa_{2j}}$ 、 $\kappa_{1j} = \lambda \mu^* + j \lambda \theta^*$ 、 $\kappa_{2j} = \lambda \sigma^{*2} + j \lambda \delta^{*2}$ 、 b は株価1単位あたりの権利行使価格である。そこで、投資家の予測する株式の先々の変動を表すインプライド・ボラティリティ(IV)に着目する。IVは正規分布のボラティリティとジャンプから成るが、満期時までの間に経済恐慌が発生し株価が急激に下落すると投資家が予想した場合、ジャンプのパラメータ値が大きくなり、現時点で株価が権利行使価格を上回っているOTMでIVが高くなると考えられる。そこで、スケールパラメータ λ を用いて消費の

^{†1} 電気通信大学
 The University of Electro-Communications

パラメータを株式のものに変換し IV を推定することで、オプション市場に内在する経済恐慌リスクを分析する。

3. 分析手法

3.1 経済恐慌の起こる確率

最尤法からエンピリカルのパラメータ $(\mu, \sigma, \theta, \delta, \omega)$ を推定し、式(2)より算出する。閾値が3または5標準偏差の場合の経済恐慌の起こる確率は式(2)の $n = 3, 5$ として求める。

3.2 プライシングカーネルのエントロピー

スケールパラメータを $\lambda = \sqrt{\kappa_2^{(\log r^e - \log r^i)}} / \sqrt{\kappa_2^{\log g}}$ から算出し、式(4)の期待値をとった式(6)からリスク回避度を算出する。

$$E[\log r^e - \log r^i] = \sum_{j=2}^{\infty} \kappa_j (\log g) \left((-\alpha)^j - (\lambda - \alpha)^j \right) / j! \quad (6)$$

3.3 インプライド・ボラティリティ

エンピリカルな消費のパラメータをリスク中立のものに $\mu^* = \mu - \alpha\sigma^2$, $\sigma^* = \sigma$, $\omega^* = \omega \exp(-\alpha\theta + \alpha^2\delta^2/2)$, $\theta^* = \theta - \alpha\delta^2$, $\delta^* = \delta$ を用いて変換する。その後、 λ を用いて $(\lambda\sigma^*, \omega^*, \lambda\theta^*, \lambda\delta^*)$ とすることで株式のパラメータに変換する。なお、リスク中立のパラメータとするために式(7)を満たすように $\lambda\mu^*$ を与える。

$$\lambda\mu^* = -\lambda\sigma^{*2}/2 - \omega^* \left\{ \exp(\lambda\theta^* + (\lambda\delta^{*2}/2)) - 1 \right\} \quad (7)$$

その後、式(5)から算出される $q^{p,MJD}$ と一致するように式(8)の κ_2 (IV) を推定する。

$$q^{p,BSM} = q^b \Phi(d) - \Phi(d - \sqrt{\kappa_2}) \quad (8)$$

ここで、 $d = (\log b - \log r^i + \kappa_2/2) / \sqrt{\kappa_2}$ である。

4. 使用データと分析結果

4.1 使用データ

使用データは2003年第2四半期から2012年第2四半期におけるGDPの民間最終消費支出と2003年5月から2012年10月の日経平均株価、無担保コールO/N物レート、日経225プット・オプションである。米国は1889年第1四半期から2009年第4四半期のGDPの民間最終消費支出と1989年1月から2003年12月のS&P500、財務省短期証券、S&P500プット・オプションである。米国の結果は[1]より引用した。

4.2 推定したパラメータ値

表1より日本は米国に比べて正規分布のボラティリティ σ が大きい。また ω , θ , δ より対数消費成長率はジャンプしやすいがジャンプサイズは小さい事が分かる。

表1 エンピリカルな消費のパラメータ値 (年率)

エンピリカル	μ	σ	ω	θ	δ
日本(本研究)	0.0101	0.0152	0.2934	-0.0143	0.0004
米国(先行研究)	0.0230	0.0100	0.0100	-0.3000	0.1500

4.3 経済恐慌の起こる確率

表2より日本は米国に比べてどちらの閾値の場合も経済恐慌の起こる確率が低い。これは日本のジャンプサイズが小さく閾値を超えにくいからであると考えられる。

表2 経済恐慌の起こる確率 (年率%)

経済恐慌の起こる確率	3標準偏差	5標準偏差
日本(本研究)	0.2916	0.0010
米国(先行研究)	0.8952	0.7884

4.4 プライシングカーネルのエントロピー

表3より、日本の投資家の方がリスク回避的である。しかし、日本の方がプライシングカーネルのエントロピーが小さく、投資家の見込む消費の総リスク量が小さい事が分かる。またプライシングカーネルのエントロピーに占める高次キュムラントの割合が日本は米国と比べて0.78%と非常に低いため、経済恐慌リスクの占める割合が低い。この結果は経済恐慌の起こる確率と整合的である。よって日本は米国よりも経済恐慌リスクが小さいと考えられる。

表3 リスク回避度とプライシングカーネルのエントロピー

	リスク回避度	エントロピー	エントロピーに占める割合(%)	
			分散	高次キュムラント
日本(本研究)	7.6400	0.0085	99.2247	0.7753
米国(先行研究)	5.1900	0.0400	41.2416	58.7584

4.5 インプライド・ボラティリティ (IV)

図1の横軸 $b-1$ が負のときが OTM である。図1と表4より日本は米国に比べて OTM で IV が高い。しかし、IV に影響するジャンプ幅率の平均 $\lambda\theta^*$, ボラティリティ $\lambda\delta^*$ と正規分布のボラティリティ $\lambda\sigma^*$ に着目すると、日本は $\lambda\theta^*$ と $\lambda\delta^*$ の方が $\lambda\sigma^*$ に比べて0からの乖離が小さい。一方で米国は $\lambda\theta^*$ と $\lambda\delta^*$ の方が $\lambda\sigma^*$ に比べて0からの乖離が大きい。また、日本と米国の $\lambda\theta^*$ と $\lambda\delta^*$ を比較すると日本の方が0に近い値である。よって、日本は米国に比べて IV にジャンプによる変動が強くは影響せず、投資家はジャンプによる株価の急激な変化をあまり予想していない。そのため、日本は米国に比べて経済恐慌リスクが小さいと考えられる。

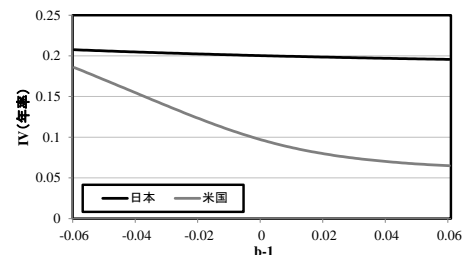


図1 日本と米国の IV

表4 株式変換後のパラメータ値 (年率)

株式変換後	$\lambda\mu^*$	$\lambda\sigma^*$	ω^*	$\lambda\theta^*$	$\lambda\delta^*$
日本(本研究)	0.0351	0.1812	0.3273	-0.1714	0.0044
米国(先行研究)	0.0528	0.0514	0.0642	-2.1434	0.7714

5. まとめと結語

本研究では経済恐慌リスクをその起こる確率とプライシングカーネルのエントロピー、IVの3つの観点から分析し、先行研究の結果と比較検討した。いずれの結果からも日本は米国に比べて経済恐慌リスクが小さいことが示唆された。

謝辞 本研究は科研費(22510143)の助成を受けたものである。

参考文献

1) David Backus, Mikhail Chernov and Ian Martin, 2011, "Disasters implied by equity index options", *The Journal of Finance*, 66, 1969-2012