自己双対論理関数の型の個数について*

戸　田　　巌**

あらまし

n 変数自己双対論理関数の個数と，その型の個数を求める公式を導き，変数の個数が小さい場合に実際にその個数を求めた結果を示した．

1. はじめに

ある論理関数の実現法が分っていれば，その論理関数から，入力変数の間の置換，およびその否定によって導かれる論理関数は容易に実現できる．このような二つの関数を同一の型に属するということにすれば，与えられた性質を有する論理関数全体が，いくつの型に分れるかという問題は上述の意味において重要な研究テーマであり，すでにいくつかの研究が報告されている．

D. Slepian[1] は 1953 年に n 変数の論理関数全体がいくつの型に分れるかという問題を美事に解決している．また最近には，B. Elspas[2] が n 変数の self-complementary 関数についてこの問題の解答を報告している．

パラメトロンなどの多数決素子から成る回路の理論的研究では，自己双対関数がしばしば問題[3,4,5]とされるが，本稿においては，D. Slepian の手法にならって n 変数の自己双対関数の個数，その型の個数の求め方，および変数の個数が比較的少ない場合に，その個数を実際に求めた結果を示した．この種の回路の複雑性の解明の一助に供したい．

2. 自己双対関数

論理関係 $f(x_1, x_2,\cdots\cdots, x_n)$ の双対関数 $\bar{f}(x_1, x_2,\cdots\cdots, x_n)$ は，f を定義する式の論理和と論理積を交換した式で定義される関数である．すなわち

$$\bar{f}(x_1,\cdots\cdots, x_n ; +,\cdot)=f(x_1,\cdots\cdots, x_n ; \cdot,+) \qquad (1)$$

ここで $+,\cdot$ はそれぞれ論理和，論理積を示す．また，DeMorgan の定理によれば

$$\bar{f}(x_1\cdots\cdots x_n)=f'(x_1',\cdots\cdots, x_n') \qquad (2)$$

ここで x' は x の否定を示す

と書き直すことができる．

いま，変数の状態の組合せ，たとえば $x_1=\xi_1$, $x_2=\xi_2,\cdots\cdots,x_n=\xi_n$ (ξ_i は 1 または 0) を $(\xi_1, \xi_2,\cdots\cdots, \xi_n)$ と書いて**入力ベクトル**と呼ぶことにする．入力ベクトルは全体で 2^n 個ある．ある入力ベクトル $\Xi=(\xi_1, \xi_2,\cdots\cdots, \xi_n)$ の**補ベクトル**を Ξ' を Ξ の各成分の 1 と 0 を交換した成分を有するベクトルと定義する．たとえば (0, 0, 1) の補ベクトルは (1, 1, 0) である．式 (2) は入力ベクトル Ξ に対する f の値が 1 (または 0) ならば，その補ベクトル Ξ' に対する $\bar{f}$ の値は 0 (または 1) であることを示している．

自己双対関数は

$$f=\bar{f} \qquad (3)$$

の成立する関数である．

論理関数はその真理値表によっても一意に定義されるが，式 (3) から自己双対関数の真理値表では，入力ベクトル Ξ に対応する欄とその補ベクトル Ξ' に対応する欄とは互いに補足的，すなわち一方が 1 なら他方が 0，であることが分かる．

n 変数の論理関数では 2^n 個の入力ベクトルに対して，それぞれ独立に 1 または 0 の値を指定できることから 2^{2^n} 個の関数が存在したが，自己双対関数では互いに補足的な入力ベクトルの一方に独立に 1，0 の値を指定できるだけであるから，n 変数 (n および n 以下の変数) の自己双対関数の個数は全体で $\nu=2^{2^{n-1}}$ 個存在する．

3. 型の個数を求める公式

容易に分かるように，論理関数の n 個の変数の間の置換と，各変数の否定の任意の組合せ全体は有限群 O_n をなす．この群の位数は $2^n n!$ である．

n 変数の自己双対関数の全体 S_n に O_n の任意の元を補せば再び S_n をうることは容易に分かる．すなわち O_n の元は S_n の間の置換をひきおこす．いま S_n の任意の 2 元 s_1, s_2 がある O_n の元 o によって

$$s_1=os_2 \qquad (4)$$

の関係が成立するとき

---

* On the number of the types of self-dual logical functions, by Iwao Toda (Electrical Communication Laboratory, Tokyo)

** 電気通信研究所

$$s_1 \sim s_2 \tag{5}$$

と書けば，2項関係～が同値関係であることは簡単に導け，したがって S_n はこの同値関係により類別される．この類の個数は第1節で述べた型の個数 P_n である．P_n を求める公式は Pólya, Slepian[1] により導かれており

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \sum_C n_C \chi_C \tag{6}$$

で与えられる．ここで C は O_n の共役類を示す．群の共役類は，次の関係式で定義される同値関係～による群の元の類別である．

O_n の任意の2元 o_1, o_2 が同値であるということは O_n のある適当な元 o_3 が存在して

$$o_1 = o_3 o_2 o_3^{-1} \tag{7}$$

が成立することである．

式（6）で n_C は類 C に属する O_n の元の個数，χ_C は類 C に属する O_n の元による変換に対して不変に保たれる S_n の元の個数である．

4. n_C の決定

O_n の共役類の構造は既に定められており，n_C の値も求められているのでその結果[1]のみを引用する．

O_n の任意の元は常に $N_i\sigma$ の形に記すことができる．ここで N_i は変数の否定を示すオペレータで i を2進数に展開して $(0 \leq i \leq 2^n - 1)$，1のある桁に相当する場所にある変数に否定を施すことを意味する．σ は変数の置換を示すもので，(123)(45) のごとく常に循環の積の形で表現することにする．また $N_i\sigma$ の意味はまず変数の置換を行なって，その後，指定された変数の否定を行なうことと約束する．たとえば

$$N_{00100}(123)(45)\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{x_3, x_1, x_2', x_5, x_4\} \tag{8}$$

である．

いま，O_n の元をこのように $N_i\sigma$ の形に表現して，σ が長さ j の循環を α_j 個ずつ含むとする．また，おのおのの循環に含まれる変数で N_i により否定されるものの個数が偶数のとき，この循環を**偶循環**，奇数のとき，**奇循環**と呼ぶ．O_n の共役類は長さ j の循環の個数 α_j と，その中の偶循環の個数 β_j を指定すれば定まる．すなわち

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n) \tag{9}$$

を O_n の類の構造ということができる．ここで当然

$$\sum_{j=1}^{n} j\alpha_j = n, \quad 0 \leq \beta_j \leq \alpha_j \tag{10}$$

が成立する．このような構造を有する類に含まれる元の個数は，容易に分かるように

$$n(\alpha, \beta) = n! \prod_{i=1}^{n} \frac{2^{(i-1)\alpha_i}}{\alpha_i(\alpha_i - \beta_i)!\, i^{\alpha_i}} \tag{11}$$

で与えられる．

5. χ_C の決定

O_n の元を 2^n 個の入力ベクトルに施せば，その間の置換を生じる．この置換を循環の積で表現したときの循環の個数は，O_n の同一の類に属する元に対しては一定であり，これを $K(C)$ で示すことにする．ここで C は O_n のある類を示すことにする．

O_n の元によってひきおこされる 2^n 個の入力ベクトルの集合 $\{\Xi_i, i=1, 2, \cdots\cdots 2^n\}$ の間の置換を考える．この置換の中に $(\Xi_{i_1}, \Xi_{i_2}, \cdots\cdots, \Xi_{i_m})$ という循環が含まれれば $(\Xi_{i_1}', \Xi_{i_2}', \cdots\cdots, \Xi_{i_m}')$ という循環も含まれることは見やすい．ここで Ξ_i' は Ξ_i の補ベクトルである．このような二つの循環を互いに**補足的な循環**と名付ける．

特に互いに補足的な2個の循環が一致してしまう循環を**自己補足的な循環**と名付ける．たとえば {(0 0), (01), (11), (10)} という循環は自己補足的である．

互いに補足的な2個の循環に，O_n の同一の元を作用させれば，やはり互いに補足的な2個の循環をうるから，O_n のある元が，$\{\Xi_i\}$ の中に自己補足的な循環を含む変換をひきおこせば，その元と同値な O_n のすべての元は，$\{\Xi_i\}$ の中に自己補足的な循環を含む置換を生じる．したがって O_n の類は，$\{\Xi_i\}$ の中に自己補足的な循環をひきおこさないものと，おこすものの2種に区別することができる．前者を**許容できる類**，後者を**許容できない類**と呼ぶことにする．

ある論理関数が O_n のある元に対して不変であるためには，その元によってひきおこされる $\{\Xi_i\}$ の変換を循環の積で表現したとき，それぞれの循環の中に含まれるすべての入力ベクトルに対応する真理値表の値はすべて1または0の一定値でなければならない．

自己双対関数では Ξ とその補ベクトル Ξ' とは，真理値表において互いに補足的な値をもつから，自己補足的な循環を含む変換を生じる O_n の元に対して不変な自己双対関数は存在しない．

また自己補足的な循環を生じない O_n の元に対しては，互いに補足的な2個の循環の一方に1または0の値を指定できるから，循環の個数を $K(C)$ として，この元に対して不変な双対関数の個数は $2^{K(C)/2}$ で与えられる．

したがって

O_n の許容できる類に対して

$$\chi_C = 2^{K(C)/2} \tag{12}$$

O_n の許容できない類に対して

$$\chi_C = 0 \tag{13}$$

である.

以上で残る問題は O_n の各類に対して $K(C)$ の値を求めること，および，その類が許容できるかどうか判定することである.

$K(C)$ を求める問題は，すでに Slepian[1] により解決されている.

以下，第二の問題について考察を加えよう.

第4節で述べたように，O_n の類は長さ j の偶循環と奇循環の個数を指定すれば定まる．したがって，類の代表としては，偶循環についてはその中の変数のいずれもが否定されないもの，奇循環についてはその循環の中の変数の最初の1個のみが否定されるものを考えてよい.

O_n の元により $\{\Xi_i\}$ がいかなる循環の積に置換されるかを見るには入力ベクトル $\Xi_1, \Xi_2, \cdots\cdots, \Xi_{2^n}$ を一列に書きならべておき，それぞれに O_n の元を1回施したものを第2列に，2回施したものを第3列にと書きならべていって，最初の列と同じ列をうるまでくり返す．その後，その各行を見れば，一番左端の入力ベクトルの属する循環を知ることができる．たとえば $n=3$ で $N_{106}(12)(3)$ という変換を考えるときには

	(I)	(II)	(III)	(IV)
000	100	110	010	000
001	101	111	011	001
010	000	100	110	010
011	001	101	111	011
100	110	010	000	100
101	111	011	001	101
110	010	000	100	110
111	011	001	101	111

第 1 図

という図表を書けば，この変換は $\{\Xi_i\}$ の中に

$\{(000), (100), (110), (010)\}$ と $\{(111), (011), (001), (101)\}$ という互いに補足的な2個の循環の積の置換を生じることが分かる.

第1図から分かるように $\{\Xi_i\}$ の置換は，それをひきおこす O_n の元のそれぞれの循環に含まれる変数に対応する部分ベクトルごとに独立に行なわれる．したがって，この置換が自己補足的な循環を含むためには，Ξ_i の独立に変化する部分ベクトルがそれぞれ補なるベクトルに移されること，および各部分ベクトルが同時にその補ベクトルに移りうることが必要である.

ある O_n の元の循環を，特定の入力ベクトルの対応する部分ベクトルに P 回施して，初めてその補ベクトルが得られるならば，その P を，与えられた循環の与えられたベクトルに対する**周期**という．部分ベクトルは与えられた循環を P, $3P$, $5P$,……回施すごとにその補ベクトルに移る．与えられた循環の可能なすべての入力ベクトルに対する周期全体をその循環の**周期類**という.

以上から与えられた O_n の元が許容できないためには

(a) その元のすべての循環が，対応する部分ベクトルについて許容できないこと，(b) 各循環を1から j まで番号づけて，おのおのの循環の周期類の中に次式を満たすような周期 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_j$ が存在することが必要十分である.

$$(2l_1+1)P_1 = (2l_2+1)P_2 = (2l_j+1)P_j \tag{14}$$

ここで $l_1, l_2, \cdots\cdots, l_j$ は非負なるある整数.

式 (14) は

$$P_1 \equiv P_2 \equiv \cdots\cdots \equiv P_j \bmod 2P_1,\ \bmod 2P_2, \cdots \cdots, \bmod 2P_j \tag{15}$$

と書き直すことができる.

次に O_n の各循環についてそれが許容できるか否かの判定法とその周期類の求め方を述べよう.

O_n の長さ l の偶循環が周期 P をもったとしよう．この周期に対するベクトルは当然**第2図**のような構造をもたなければならないから

$$l = 2mP \tag{16}$$

という関係式が成立する.

$$\underbrace{\underbrace{A\bar{A}}\underbrace{A\bar{A}}\cdots\cdots\underbrace{AA}}_{m\ 個}$$

A は長さ P のベクトル

$\bar{A}$ は A の補ベクトル

第 2 図

逆に式 (16) を満たす P に対しては必ず第2図のような構造をもつベクトルを求めることができるから，長さ l の偶循環の周期類は，その長さ l を式 (16) のように分解できるすべての P からなる.

l が奇数ならばこの分解は不能であるから，長さ l が奇数の偶循環は必ず許容できる.

O_n の長さ l の奇循環が周期 P を有すれば，それに対する入力ベクトルは**第3図**のような構造をもつ.

$$\underbrace{\underbrace{A\bar{A}}\,\underbrace{AA}\cdots\cdots\underbrace{A\bar{A}}\,A}_{m\text{ 個}}$$

Aは長さPのベクトル

AはAの補ベクトル

第 3 図

したがって

$$l=(2m+1)P \tag{17}$$

が成立する．偶循環に対すると同様な考察から，奇循環の周期類は，長さ l を式 (17) のように分解する整数の集合として求まる．

長さが偶数の奇循環は，すべて偶数よりなる周期類をもち，長さが奇数の奇循環の周期類はすべて奇数よりなる．

以上から次の結論をうる．

（1） 長さが奇数の偶循環を少なくとも一つ含む O_n の類は許容できる．

（2） 長さが奇数の奇循環のみからなる類は許容できない（すべての奇循環が $P=1$ という周期をもつから）．

（3） 長さが偶数の奇循環のみからなる類は，許容できる場合とできない場合がありうるから，各循環の周期類を求め，式 (15) を満たす周期が存在するか否かたしかめる必要がある．

奇循環の長さがすべて等しければ許容できない（$P=1$ を考えればよい）．

（4） 長さが偶数の偶循環のみからなる類は許容できない（すべての循環が $P=1$ なる周期をもつ）．

（5） 長さが偶数の奇循環と，長さが奇数の奇循環を少なくとも一つずつ含む類は許容できる（一方の周期はすべて偶数，他方は奇数で式(15)が成立しない）．

（6） 長さが奇数の奇循環と，長さが偶数の偶循環のみからなる類は許容できない(すべての循環が $P=1$ の周期を有す)．

（7） 長さが偶数の奇循環と，長さが偶数の偶循環のみからなる類は，許容できる場合とできない場合がありうるから，詳しく調べる必要がある．

以上ですべての場合をつくしているから，O_n の類の構造がわかれば，上記のテストにより，その類が許容できるか否か決定できる．

したがって Slepian の手法[1]により $K(C)$ を求めれば，式 (12)，(13) から χ_C が求まる．

6. 型の個数

式 (10) を満たすすべての α, β の組合せを求めれば，O_n のすべての類が定るから，各類に対して第4，5節の所論にしたがって n_C，χ_C を求めれば式（6）により自己双対関数の型の個数 P_n が求まる．

第1表にこのようにして求められた6変数以下の自己双対関数の型の個数を示す．

第 1 表

n	自己双対関数の個数	自己双対関数の型の個数	論理関数全体の型の個数	S.C.* 関数の型の個数
1	2	1	3	1
2	4	1	6	2
3	16	3	22	6
4	256	7	402	42
5	65,536	83	1,228,158	4094
6	4,294,967,296	109,958	400,507,806,843,728	——

* S.C. 関数，Self-complementary 関数

参考のために Slepian が求めた n 変数の論理関数全体の型の個数，Elspas が求めた self-complementary 関数の個数も示す．self-complementary 関数とは，f と $\overline{f}$ が同一の型に属する関数で，自己双対関数はすべて self-complementary である．

自己双対関数の個数，およびその型の個数は，論理関数全体の個数，型の個数に比し著しく少ないことが分かる．

終わりにのぞみ日頃ご指導いただいている IBM リサーチセンター室賀博士，当研究所の喜安次長，遠藤室長，高島主任に深謝する．

附録式（6）の証明

参考のため式（6）の証明[1]を簡単に紹介する．

第3節で述べたように n 変数自己双対関数全体 S_n に，O_n のある元を施すことは，S_n に置換を施すことになる．この置換を行列表示すれば，群 O_n の $\nu(=2^{2^{n-1}})$ 次元表現をうる．

ある自己双対関数 f を不変に保つ O_n の元全体は，O_n の部分群 H をなす．O_n を H の左剰余類に展開し，一つの剰余類に属する元を f に施せば，すべて同一の関数が得られ，剰余類が異なるごとに異なった関数をうるから，f と同一の型に属する関数は剰余類の個数 r に等しいだけ存在する．この r 個の関数の O_n による置換の行列表示は，O_n の1次元表現をなすが，この表現は O_n の剰余類による表現であるから，その中に恒等表現をただ1個含む[6]．

したがって，自己双対関数全体の作るν次元表現では同一の型に属する関数がそれぞれ1個ずつの恒等表現を含むから全体で型の個数に等しいだけの恒等表現を含むその個数 P_n は単純指標の直交関係[7]から

$$P_n=\frac{1}{2^n n\,!}\sum_C n_C \chi_C$$

と求まる．ここでCは O_n の共役類，n_C は類C中の元の個数，χ_C はν次元表現の類 C に対する指標で，この場合，定義からCに属する O_n の元に対して不変に保たれる自己双対関数の個数に等しい．

参考文献

1) D. Slepian: On the number of symmetry types of Boolean function of n variables, Can. J. Math. **5**, No. 2, p. 185 (1953)
2) B. Elspas: Self-complementary symmetry types of Boolean functions, T.I.R.E. EC-**9**, No. 2, p. 264 (1960)
3) 高橋秀俊：計算機械，岩波講座，現代応用数学 B 14-a II，岩波書店，東京，(1958)
4) 喜安善市：ディジタル回路の数学，電子通信工学講座 10，3 E-1，共立出版，東京，(1960)
5) 室賀三郎，戸田巌：多数決素子の理論，信学誌 **43**，10，p. 1071 (1960)
6) F.D. Murnagham: The theory of group representations, p. 94, Baltimore (1938)
7) H. Boerner: Darstellungen von Gruppen, s. 71 (1955)

Vol. 2 No. 1　　ALGOL Compiler の作成について　　Feb. 1961

ALGOL Compiler の作成について*

竹　中　　靖**

まえがき

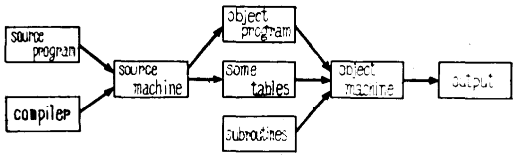
ここに述べるオートコーディング・システムはコンパイラー方式のものであって，ALGOL 60[1,2] で書かれたプログラムを処理してオブゼクト・プログラムを作成する働きを有し，コンパイラーは三つのルーチンから成り立っている[3]．

$$\text{compier}\left\{\begin{array}{l}\text{routine 1}\\ \text{routine 2}\\ \text{routine 3}\left\{\begin{array}{l}\text{phase 1}\\ \text{phase 2}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

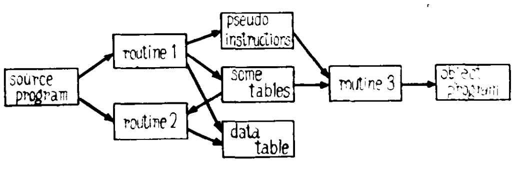
ルーチン1は H. Kanner の algebraic translator[4] をもとにして作成されたもので，Kanner の translator が算術演算のみを取り扱うのに対して，論理演算や計算の反復実行をも取り扱うことができる．また，演算子に対するレベル解析は，Kanner の 4-level hierarchy に対し，関係演算子や論理演算子を含めた 10-level hierarchy によって行なわれる．

ルーチン2は，ソース・プログラム中のシンボリック・パラメータに対して与えられたデータを，パラメータと正しく対応させる役割をする．

ルーチン3は，ルーチン1で作成された 3-アドレス方式の擬命令を必要な機械語に変換し，併わせて命令の節約を行なって所要のオブゼクト・プログラムを作成するルーチンであり，操作は二つの相に分離される．



第 1 図



第 2 図

なお，ルーチン1では，ルーチン2および3の操作のために，後述する各種のテーブルを作成する．

* An ALGOL Compiler, by Yasushi Takenaka (Joh Laboratory, Faculty of Engineering University of Osaka)

** 大阪大学工学部