代数方程式の数値解法*

山下真一郎**

1. まえがき

代数方程式の求解が，非常な困難に，しばしばおち入ることがある．それは，演算精度と解の精度が，あまりに違いすぎるという現象として現われる．たとえば，後述するように特殊な例題では，1%の精度の根を得るのに，20桁もの精度で計算しなければならない．このような問題は，本質的に同じ解法をいろいろ工夫してみても，あまり役に立たない．むしろ，問題を変形する方が効果的である．

代数方程式とその計算法について，以下に我々の得た経験を述べよう．

2. 方程式の性質

方程式の根を求めるということは，

$$f(x)=0$$

となるようなxを求めるということであるから，有限の演算桁数の範囲内で，$f(x)$が0とみなされるようなxはいくらでもある．すなわち，根はある幅を持つようになる．その幅を不確定量と呼ぶことにする．根の精度は，不確定量と根（略値でもよい）との比で示される．方程式の性質の良し悪しは，不確定量で次のように説明される．各根の不確定領域が近接しているか，または重複しているものは性質の悪い問題で，隣接する根の不確定領域の大きさが，互いの距離に較べて小さいものは，性質の良い問題といえる．

$f(x)'$が大きければ，xの変化に対して$f(x)$が大きく変るから，逆に$f(x)$にかなりの変化を加えても，根xはあまり変らない．

$f(x)'$が小さいときは，係数の変化の解に与える影響が大きいので，むやみに$f(x)$を変形してはならない．

3. 性質の良い問題の解法

性質の良い問題は，どのような方法によっても，良い結果を与えるから，解法の良否は収束の遅速にかかる．したがって，根の補正量の誤差が 1 st order の方法よりも，2 nd order の方法がよい．すなわち，Regula Falsi や Horner 法よりも，Newton 法や Hitchcock 法（Bairstow の方法と呼ばれることもある）の方がよい．

Graeffe 法は簡潔さにおいて，Newton 法や Hitchcock の方法に劣る．

代数方程式に対する Newton 法を，

$$f(x)=(x+p_n)Q(x)+R$$
$$Q(x)=(x+p_n)Q'(x)+S$$
$$p_{n+1}=p_n+R/S$$
$$\text{収束判定；}|R/P_{n+1}S|$$

と変形したものを，『変形 Netwon 法』と呼ぶ．この方法は，実係数実根および一般の複素係数の全ての根を求める場合に用いて，非常に効果的である．

Hitchcock 法

$$f(x)=(x^2+p_nx+q_n)Q(x)+Rx+S$$
$$Q(x)=(x^2+p_nx+q_n)Q'(x)+Ux+V$$
$$p'=\frac{1}{\triangle}(RV-SU)$$
$$q'=\frac{1}{\triangle}\{S(V-Up_n)+q_nUR\}$$
$$\triangle=V(V-Up_n)+q_nU^2$$
$$p_{n+1}=p_n+p'$$
$$q_{n+1}=q_n+q'$$
$$\text{収束判定；}|p'/q_{n+1}|+|q'/q_{n+1}|$$

は，実係数の全ての根を求める場合に，実根複素根を問わず有効である．

変形 Newton 法および Hitchcock 法は，一次式および二次式による因数分解法である．この方法の特徴は，一組の根が求まると，その時の商を利用し，次の根を求めることができ，しかも次数が下がることによって演算回数が少なくてすむことである．

また，係数にパラメーターを含むような，類似の3次あるいは4次方程式を解くときは，根の近似値が予想できるので，因数分解法は他の解法に較べて有効である．

なお高次の因数分解法も考えられるが，経験によると，多元連立超越方程式を解くことは困難であるの

* Numerical Solution of Algebraic Equations by Shinichirô Yamashita (Yurin Computing Center)

** 有隣電機精機株式会社計算センター

で，一次および二次の因数分解ができれば，それ以上の分解法を考える必要はない．

4. 性質の悪い問題の解法

方程式

$$(x-100)^{10}-1=0$$

の根は，

$$x_k=100+\left(\cos\frac{2\pi}{10}k+i\sin\frac{2\pi}{10}k\right)$$

$$k=1,\ 2,\cdots\cdots 10.$$

である．$(x-100)^{10}$ を展開した多項式の定数項の大きさに比べて，1は非常に小さな値である．それにもかかわらず，根を1％変化させる大きさである．それは20桁目の大きさで，このような方程式は，1％の精度の解を得るに，20桁以上で計算せねばならないことになる．

この問題は，極端な例ではあるが，根を確定するためには，関数値を高精度に計算しなければならないことを示している．したがって，一定の演算桁数では，どのような解法によっても，与えられた方程式の有効な解を得られないことがある．この場合，当然，係数の変化が解に与える影響は激しい．

このような問題を解くためには，演算桁数を増して，関係数値を精密に計算する以外に方法がない．ところが，終始高精度で計算を行うことは，あまりに非能率的であるから，できるだけ少ない手間で，これと同等のことを行う必要がある．

方程式は，一意的に根の比で特徴づけられ，性質の良い問題は，根の比が接近していない．一方，性質の悪い問題は，根の比が部分的，あるいは全体的に接近している．したがって性質の悪い問題は適当な変換を行って根の比を変え，性質の良い問題に変えることができる．以上のことは原点移動を意味する．例題では，

$$X=x-100$$

とおけば，方程式は

$$X^{10}-1=0$$

となる．この方程式は，もはや困難な方程式ではない．

原点移動は Horner 法で，高精度計算により誤差をできるだけ入れないようにする．

通常の演算桁数で，原点移動を行ってから計算した場合は，与えられた方程式を直接計算したときに比べて，根の精度はあまり変らないが，収束は早められる．

5. 計　算　例

例題 1　8桁の計算では根の有効数値を多く求められない例．

前述の方程式 $(x-100)^{10}-1=0$ は，20桁以上の桁数で計算しなければ，根を求めることができない．このような特別な問題でなくとも，たとえば，次のような問題は，8桁の計算では，精確な根を求めることができない．

$$f(x)\equiv x^4-4.86\,x^3+8.8571\,x^2 -7.173846\,x+2.1788712=0$$

根　$x_1=1.20,\quad x_2=1.21$

$x_3=1.22,\quad x_4=1.23$

この問題を次の (a), (b) 二つの方法で扱った．

(a) 関数値を利用する方法による場合

この場合は，関数値が8桁の計算で0となっても，そのときの x が，必ずしも根でないことを示せばよい（**第1表**）．

第1表　$F(x)$ の係数

a	x^4	x^3	x^2	x	x^0
0.000	1.000	−4.86	+8.8571	−7.173846	+2.1788712
1.100	1.000	−0.46	+0.0791	−0.006026	+0.0001716
1.180	1.000	−0.14	+0.0071	−0.000154	+0.0000012
1.190	1.000	−0.10	+0.0035	−0.000050	$+2.4\times10^{-7}$
1.195	1.000	−0.08	+0.00215	−0.000022	$+6.5625\times10^{-8}$
1.2038…			(極　値)		$-1.014\cdots\times10^{-8}$
1.215			(　〃　)		$+5.625\times10^{-9}$
1,2261…			(　〃　)		$-1.00\cdots\times10^{-8}$
1.235	1.000	+0.08	+0.00215	+0.000022	$+6.5625\times10^{-8}$
1.240	1.000	+0.10	+0.0035	+0.000050	$+2.4\times10^{-7}$

第1表の説明：$f(x+a)=F(x)$ として，a のいろいろの値に対する $F(x)$ の係数を示す．この表から，8桁の演算桁数での $f(x)$ の0領域が，だいたいにおいて，x の1.195から1.235の区間にまたがっていることがわかる．この区間での $f(x)$ の極値は，8桁の演算では，0とみなされる大きさである．

(b) Graeffe 法による場合

この場合は，1回の操作で解がどれほど変化したかをみればよい．

$$f(x)f(-x)=x^8-5.9054\,x^6 +13.07617969\,x^4 -12.867106220676\,x^2 +4.74747970618944$$

この式で，係数を 8 桁に四捨五入して，根を正しく求めると，次のように正解とは違った虚根が出てくる．

$$x_{1,2}{}^2=+1.4461051\cdots \quad \pm i\,0.013013370\cdots\cdots$$

$$x_{3,4}{}^2=+1.5065948\cdots \quad \pm i\,0.013572889\cdots\cdots$$

これから，Graeffe 法の操作を多数回行っても，正確な根は求められないことがわかる．

実はこの方程式も，$x=X+1.215$ とおき，原点移動を行えば，

$$X^4-2.5\times10^{-4}X^2+5.625\times10^{-9}=0$$

となり，原式に較べて，係数の桁数が，少なくなっていることからもわかるように，さほど困難な問題ではなくなる．実際に変形 Newton 法で，初期値を 1 から始めて計算したところ，8 桁目に 1 単位の狂いを生じた根が一つあったのみであった．

第 2 表　（下線部が根）（浮動小数点表示）

x	$f(x)$	$f(x)'$
−3.000 0000−02	+3.531 5400−03	+5.131 6888+00
−3.068 8183−02	−2.800 0000−06	+5.139 8256+00
−3.068 7638−02	+0.000 0000−19	+5.139 8191+00
(−3.068 7637 822…−02)		
−3.068 7638−02	+5.139 8191+00	−5.902 8206+00
+8.400 5187−01	+1.434 4200−01	+3.492 3936+00
（7　回　省　略）		
+7.563 0578−01	+2.000 0000−07	+3.918 5200−02
+7.563 0068−01	+0.000 0000−19	+3.899 3900−02
(+7.563 0387 154…−61)		
+7.563 0068−01	+3.899 3900−02	+1.873 3447+01
+7.542 1917−01	+6.400 0000−05	+1.867 1985+01
+7.542 1574−01	+5.000 0000−07	+1.867 1886+01
(+7.542 1256 556…−01)		
+7.542 1571−01	+1.867 1885−01	+1.475 7567+01
−5.110 2569−01	+3.201 6708+00	+9.696 6026+00
−8.412 1049−01	+2.180 4440−01	+8.375 8630+00
−8.672 4296−01	+1.355 4000−03	+8.271 7331+00
−8.674 0682−01	+3.000 0000−07	+8.271 0774+00
(−8.674 0682 996…−01)		
−5.002 9455+00		
(−5.002 9452 693…+00)		

例題 2.　変形 Newton 法による計算例．

変形 Newton 法は，前に述べたように，一つずつ必ず新しい根が求められる．これを次の例題で示す．

$$f(x)\equiv a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3 + a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

$a_5=+2.000\,0000\quad +00$

$a_4=+8.781\,0466\quad +00$

$a_3=-7.646\,9350\quad +00$

$a_2=-6.655\,8580\quad +00$

$a_1=+4.753\,9243\quad +00$

$a_0=+1.519\,2601\quad -01$

以上は浮動小数点表示で，例えば a_0 は，

$a_0=+1.519\,2601\times10^{-01}$ である．

計算の結果は**第 2 表**のとおりである．

第 2 表の説明：　根を分離するときの桁落ちを防ぐために，できるだけ小さな根から始めた方がよい．したがってこの問題では，初期値 x_0 を次のようにとる．

$$x_0=-a_0/a_1\ (=0-f(0)\mathrm{h}/f(0)')\doteqdot-0.03$$

0.75 の近くには，二つの根があるので，収束も悪く，精度もよくない．比較のために，（　）内に，16 桁の演算で求めた根を示した．

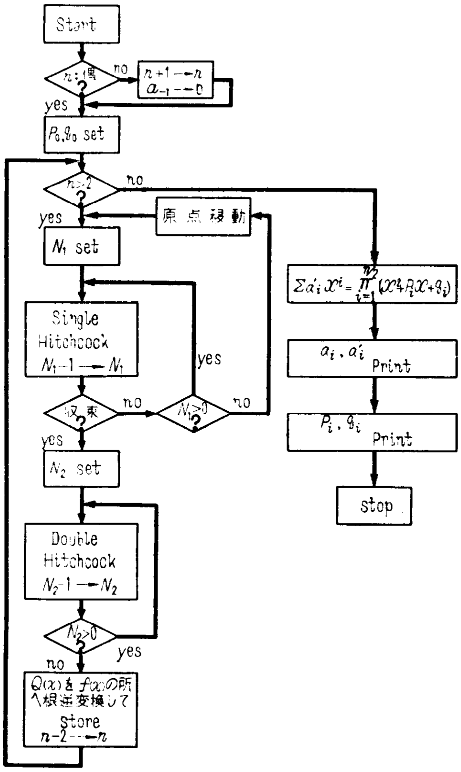
第　3　表　20 次方程式の係数（浮動小数点表示）

20	+1.000 0000 0000 0000 +00
19	+1.044 4651 7706 5689 +02
18	+5.026 5575 3267 1030 +03
17	+1.477 3610 0268 5660 +05
16	+2.963 1149 1709 0001 +06
15	+4.292 3970 5029 9421 +07
14	+4.636 0669 8034 1538 +08
13	+3.799 7579 1523 7340 +09
12	+2.382 7856 5450 5610 +10
11	+1.144 4013 6619 1400 +11
10	+4.187 6875 9053 3295 +11
9	+1.154 5271 2915 2480 +12
8	+2.356 2912 9290 3078 +12
7	+3.471 6499 8299 3869 +12
6	+3.566 9847 1321 8570 +12
5	+2.455 0757 8064 3594 +12
4	+1.116 9313 4442 8799 +12
3	+2.732 2154 9097 2946 +11
2	+5.119 5147 6926 9870 +10
1	+2.655 2984 0303 6060 +09
0	+2.683 8931 4054 0690 +08

6.　高次方程式の計算例とフローチャート

第 3 表のような高次の方程式も，**第 1 図**に示すフローチャートに従って計算すれば，性質の悪い方程式でも，自動的に，きわめて容易に解をうることができる．その計算結果を**第 4 表**に示す．

フローチャート（第 1 図）の説明：　与えられた方程式を 2 次の因数分解法（Hitchcock 法）を用いて解く．次数 n は，偶数でなければならないが，奇数次の場合は，$x=0$ の根を付け加え，常数項を 0 として，次数を偶数にする．



第１図　実係数代数方程式解法のフローチャート

任意の初期値（一般に０）をセットし，初め適当な回転制御数 N_1 (10～20) を設定し，通常桁の Hitchcock 法で，反復計算を行う．このとき，反復回数が N_1 に達すれば，原点移動を行った上で，N_1 の設定の箇所へもどる．また，反復の間に演算桁数の 1/2～3/4 の桁数までの一致が得られれば，回転制御数 N_2 (2～3) を設定して，２倍桁の Hitchcock 法に移る．N_2 回反復の後，得られた２次式の係数に，原点移動による変換の逆変換を施し（原点移動をしない場合は０変換），次数 n を２だけ落して，初期値セットの次の箇所（start の点でもよい）にもどる．start 点では，次数 n を判別して，$n=2$ になれば，原方程式が，２次式の積に分解された訳であるから，それま

第　4　表　（２次因数）
（浮動小数点表示）

p_1	$=+2.029\ 8333\ 5790\ 7744$	$+01$
p_1	$=+1.030\ 3109\ 8708\ 5605$	$+02$
p_2	$=+1.966\ 1716\ 4034\ 4226$	$+01$
q_2	$=+9.673\ 8920\ 9862\ 1473$	$+01$
p_3	$=+1.925\ 8595\ 2423\ 4903$	$+01$
q_3	$=+9.298\ 9225\ 8677\ 2955$	$+01$
p_4	$=+1.776\ 6988\ 0079\ 2987$	$+01$
q_4	$=+8.026\ 3307\ 1578\ 5868$	$+01$
p_5	$=+1.440\ 3308\ 3683\ 9955$	$+01$
q_5	$=+5.627\ 4668\ 0703\ 2240$	$+01$
p_6	$=+8.630\ 1960\ 4064\ 2679$	$+00$
q_6	$=+2.535\ 0101\ 7143\ 3285$	$+01$
p_7	$=+3.254\ 5046\ 1948\ 4229$	$+00$
q_7	$=+5.812\ 1317\ 7221\ 5289$	$+00$
p_8	$=+9.150\ 9652\ 5330\ 1370$	-01
q_8	$=+7.654\ 1364\ 3921\ 9814$	-01
p_9	$=+2.305\ 2959\ 2165\ 0910$	-01
q_9	$=+7.971\ 0110\ 1813\ 6650$	-02
p_{10}	$=+2.724\ 9327\ 2486\ 0541$	-02
q_{10}	$=+7.131\ 9469\ 4945\ 1054$	-03

$x^2 + p_n x + q_n = 0$

での結果をまとめて，実際に２次式の積を計算し，原方程式の係数と並べて印刷して，正誤をたしかめる．最後に解を印刷して終る．

7. あとがき

我々が代数方程式を解いて知り得たことは，高精度計算の重要性である．それは，代数方程式の求解の困難さの解決が，最終的には高精度計算に依らねばならないからである．事実，少ない桁数の根を求めるときにも，高精度計算が必要になることが多い．このことは，少ない桁数の入力しかない問題の取扱いには，慎重を期すべきことを意味している．

最後に，この論文を草するにあたり，幾多の忠告を賜った，日本大学教授宇野利雄氏，武蔵工業大学講師佐竹誠也氏，有隣電機精機株式会社計算センター，プログラマー諸氏および，この論文の審査にあたられた編集幹事会の諸氏に，心底より謝意を表する．

（昭和36年6月9日受付，8月9日再受付）