ダイナミック・プログラミングの応用(II)*

(確率的貯水池運用問題への一つの逐次近似法)

深　尾　　毅**　　比 留 間 玲 子**

1. まえがき

前文[1]において我々は決定論的な変分問題に対してダイナミック・プログラミング（以下 D.P. と略称する）を適用しようとする場合に考えられる各種逐次近似計算法のあらましを，その典型的な例題である貯水池運用問題を例として記した．本文では，これを拡張して，確率論的な変分問題に対する逐次近似計算法の一典型を，やはり貯水池運用問題を例にして述べる．

貯水池への流入流量を確率的に考慮する必要がある長期間の貯水池運用問題（確率的変分問題）に対して，J.D.C. Little[2] や J. Gessford[3] らによってすでに D.P. による計算が行われているが，それらはいずれも貯水池が唯一つの場合に限られている．この程度の問題でも後に示す如くかなり計算が膨大になり，現用の国産中形計算機では，$N=12$（12 時間帯），各確率量の確率分布を実用上最低限の表現で満足した場合でも，数時間乃至 10 時間くらいはかかる．貯水池の数が二つとなると，まともに D.P. を適用したのでは上記計算機では不可能に近い困難を伴い，三つ以上は全く不可能とみてよい．

このような多変数（多貯水池）の確率的変分問題に対する逐次近似計算法の工夫はしばしば重要であるが，我々は決定論的な場合にのべた方法の自然な拡張を考え，計算時間をほぼ変数の数（貯水池の数）に比例してふえる程度にとどめようとする．

2. 確率的変分問題あるいは確率的多段決定過程

まず簡単に決定論的な場合より確率論的な場合への移り変りを Bellman に従って説明し[4),5)]，それらの間の類似と差異を示す．

考慮する期間を N 等分して問題を離散的に扱うものとする．決定論的な場合には，D.P. が適用される問題では，初期時刻の“状態” ${}_0S$ と，一連の各時間帯の“決定”あるいは“制御”の列 $[{}_1Q, {}_2Q, \cdots\cdots, {}_NQ]$ を定めると一つの多段過程（変分法のいい方をすれば変関数）が得られ，その一連の各時間帯の決定の列を変えると，また新しい多段過程が得られる．この一連の決定の列を“政策”(policy)とよぶ．これらの多段過程はそれぞれ，

「任意の時刻 t_0 での状態を知れば（あるいは定めれば)，$t>t_0$ なる任意の時刻 t での状態が定まり，その際，t_0 以前の状態についての情報は何も要らない」．　(A)

というマルコフ的性質をもっている．無数のこのような多段過程群の中から最適な多段過程を一つえらび出す過程，あるいは別のいい方をすれば最適な政策を決定する過程が多段決定過程であり，D.P. が適用される型の多段決定過程では，最適性の目安としての評価関数あるいはコストが，

「任意の時刻 t_0 以後の多段決定過程（部分多段決定過程）では，その評価関数は，t_0 時刻の状態とそれ以後の決定の列（政策）のみに依存する」．(B)

という分離的（あるいはマルコフ的）性質をもっていて，特にそれをマルコフ型の多段決定過程と称する．

これに対して確率論的な場合はどうなるであろうか．確率的要素の導入（貯水池問題では普通，池への流入流量がある確率分布をもった確率変数として与えられる）によって，各時刻の状態としては，一つの決定論的な値でなしに，その確率分布のみが意味をもってくる．したがって今度は，多段過程には（A）に対応して，

「任意の時刻 t_0 での状態の確率分布を知れば（あるいは定めれば)，$t>t_0$ なる任意の時刻 t での状態の確率分布がきまり，その際，t_0 以前の状態についての情報は何もいらない」　(A′)

というマルコフ的性質をもった確率過程が対応する．このような確率過程は（単純）マルコフ過程に他ならない．

---

* Applications of Dynamic Programming (II) —— A Method of Successive Approximations for Stochastic Reservoirs Control Problem ——, by Takeshi Fukao and Reiko Hiruma (Electrotechnical Laboratory)

** 電気試験所

無数のこのようなマルコフ過程群の中から最適なマルコフ過程を一つ決める（あるいはそれに対応する一連の各時間帯の決定群の列――政策――を決めるといってもよい）過程を確率的多段決定過程という．この場合の最適性の目安については，評価関数あるいはコストは確率変数をふくむ確率関数になるから，コスト最小というのは意味がなく，たとえばコストの期待値を最小にするという方針をとることになる．そうすると，D.P. が適用される型の確率的多段決定過程は，評価関数あるいはコストの期待値が（B）に対応して，

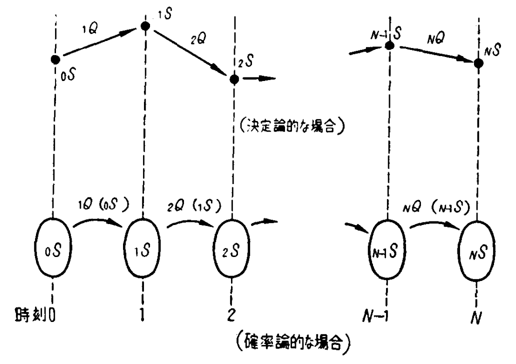
「任意の時刻 t_0 以後の確率的多段決定過程（部分確率的多段決定過程）では，その評価関数の期待値は，t_0 時刻の状態（の確率分布）と，それ以後の決定群の列（政策）のみに依存する」　　（B′）

という分離的（あるいはマルコフ的）性質をもっていて，いわばマルコフ型の確率的多段決定過程と称せられるものである．

以上のように，確率論的な場合でも，諸量を拡張解釈することによって決定論的な場合と並行に話が進められるが，次に確率論的な場合に特有な問題点について二，三注意しよう．

（1）　政策について

決定論的な場合とくらべて，各時間帯の“決定”に対する考え方が一般的になる．決定論的な場合には，ある時刻で一つの状態を指定し，それに対して一つの決定を行えば次の時刻の状態がきまった．したがって初期時刻の状態と，各時間帯の決定の列 ${}_1Q$，${}_2Q$，……，${}_NQ$ を定めれば一つの多段過程が指定された（**第1図**参照）．確率論的な場合にももちろん，初期の状態（の分布）と，各時間帯それぞれ一つずつの決定の列 ${}_1Q$，${}_2Q$，……，${}_NQ$ を定めれば一つのマルコフ過程が指定される．しかし，そのような型のマルコフ過程群は特別のせまい範囲のもので，それらの中に必ずしも“最適な”マルコフ過程がふくまれているとは限らないばかりでなく，それらは与えられた諸制約を満しえないかもしれない．なぜかというと，確率的な場合には決定論的な場合と異って，各時刻のいずれの状態にも確率的に差はあるにせよ到達可能と考えねばならないから，各状態に対してそれぞれ一つずつの決定を定める必要がある．このありうる状態の範囲がある程度ひろいと，そのすべてに対して同一の決定を指定するよりは，状態値に応じて決定を変えうるようにした方が，“最適”への自由度を増すことは明かである．また，ただ一つの決定に束縛すると，ある状態に対しては制約を満したとしても，それと大きく異る（しかしありうる範囲の）状態に対しては制約を守りえないということがおこる．確率的な場合には制約はしばしば苛酷な役目をする．



第 1 図

結局，決定論的な場合には各時間帯の決定の列〔${}_1Q$，${}_2Q$，……，${}_NQ$〕が政策であったのに対し，確率論的な場合には各時刻の，すべての状態に対して決められる決定群の列（あるいは関数の列といってもよい）〔${}_1Q({}_0S)$，${}_2Q({}_1S)$，……，${}_NQ({}_{N-1}S)$〕を政策と考える必要がある（第1図参照）．

（2）　マルコフ過程の非定常性

我々の考えるマルコフ過程において，決定の函数 ${}_KQ({}_{K-1}S)$ がすべての時刻に対して同じであり，独立確率変数がいずれの時間帯でも同一分布に従う場合には，それは定常マルコフ過程である．在庫管理の問題等で，考慮する期間を十分長く取った時には，近似的に十分定常マルコフ過程の中で取扱うことのできる場合が多く，比較的容易に確率的多段決定過程を解くことができる．このような条件を満さない非定常マルコフ過程を取扱う必要のある確率的多段決定過程の解法は一般に困難なもので，D.P. の方法が有力な手段になる．貯水池運用問題では負荷や池への流入流量に季節的変動が顕著にあり，その他の制約をふくめて本質的に後者の立場に属し，D.P. が大いに活躍する場である．

3.　貯水池運用問題とその関数方程式

ここでいう貯水池運用問題とは，貯水池の水をたくわえうる能力を利用して，天然に与えられる河川流量に制御を加えて水力発電し，ある一定期間にわたる火力発電の総燃料費の期待値を最小にする問題と考え，

池への流入流量のみが確率的に与えられる量であるとし，各時間帯ごとのその確率分布は互いに独立であるとする．期間をN等分した離散型で示すと，次の確率的多段決定過程の問題になる．

$$\underset{({}_1J)({}_2J)}{\mathrm{Min}\,E\cdot E}\cdots\cdots\underset{({}_NJ)}{E}\left[{}_1F({}_1G)+{}_2F({}_2G)+\cdots\cdots+{}_NF({}_NG)\right] \quad (1)$$

$${}_KS_i={}_{K-1}S_i+{}_KJ_i-{}_KQ_i,\ {}_KS_i\leqq S_{i,\max} \quad (2)$$

$${}_KS_i=S_{i\,\max},\ {}_{K-1}S_i+{}_KJ_i-{}_KQ_i>S_{i,\max} \quad (2')$$

$${}_KG+\sum_{i=1}^{n}{}_KP_i={}_KP_R, \quad (3)$$

$${}_KP_i={}_KP_i({}_{K-1}S_i,\ {}_KQ_i,\ {}_KJ_i), \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{i,\min}\leqq {}_KS_i\leqq S_{i,\max}, \\ Q_{i,\min}\leqq {}_KQ_i\leqq S_{i,\max}, \end{array}\right\} \quad (5)$$

境界条件: 初期状態の確率分布 $d_0K_i({}_0S_i)$ 一定，

終端状態ののぞましい確率分布 $d_NK_i({}_NS_i)$ 所与． (6)

$$(K=1,2,\cdots\cdots,N;\ i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ここで，各量の左下添字は時間帯あるいは時刻番号，右下添字は発電所番号を示し，F: 単位時間当り燃料費，G: 火力出力，P: 水力出力，P_R: 負荷，S: 貯水量（“状態”），Q: 使用水量（“決定”），J: 池への流入流量，${}_K\boldsymbol{J}=({}_KJ_1,\ {}_KJ_2,\cdots\cdots,{}_KJ_n)$ すなわち第K-時間帯での各貯水池への流入流量の集り，E はその下に示す量の確率分布について期待値をとること，たとえば，

$$\underset{({}_KJ)}{E}[F]=\int_{-\infty}^{\infty}d_KH_1({}_KJ_1)\int_{-\infty}^{\infty}d_KH_2({}_KJ_2)\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d_KH_n({}_KJ_n)\cdot[F].$$

ここで $d_KH_i({}_KJ_i)$ は ${}_KJ_i$ の確率分布．

（1）式は（3），（4）から

$$\underset{({}_1J)({}_2J)}{\mathrm{Min}\,E\cdot E\cdot}\cdots\cdots\cdot\underset{({}_NJ)}{E}[{}_1F({}_0S,{}_1Q,{}_1J)+\cdots\cdots+{}_NF({}_{N-1}S,\ {}_NQ,\ {}_NJ)] \quad (1')$$

とかけ，さらに ${}_1\boldsymbol{J},{}_2\boldsymbol{J},\cdots\cdots,{}_N\boldsymbol{J}$ の確率分布が互いに独立だから，

$$\mathrm{Min}\,\underset{({}_1J)}{E}[{}_1F({}_0S,\ {}_1Q,\ {}_1J)+\underset{({}_2J)}{E}[{}_2F({}_1S,\ {}_2Q,\ {}_2J)+\cdots\cdots+\underset{({}_NJ)}{E}[{}_NF({}_{N-1}S,\ {}_NQ,\ {}_NJ)]\cdots]] \quad (1'')$$

とかける．

このような確率的多段決定過程に対し，

$f_{N-K+1}({}_K\boldsymbol{S})$ ＝K-時刻で ${}_K\boldsymbol{S}$ なる状態を初期条件としたそれ以後の $N-K+1$ 個の時間帯にわたる期間で最適な政策をとった時の最適コスト期待値．これを最小コスト期待値関数とよぶ．

を定義すると，

$$f_1({}_{N-1}S)=\underset{{}_NQ\ ({}_NJ)}{\mathrm{Min}}[E\{{}_NF({}_{N-1}S,\ {}_NQ,\ {}_NJ)\}] \quad (7)$$

$$f_i({}_{N-i}S)=\underset{{}_{N-i+1}Q\ ({}_{N-i+1}J)}{\mathrm{Min}}[E\{{}_{N-i+1}F({}_{N-i}S,\ {}_{N-i+1}Q,\ {}_{N-i+1}J)+f_{i-1}({}_{N-i+1}S)\}] \quad (8)$$

$$(i=2,3,\cdots\cdots,N)$$

なる関数方程式群（漸化式群）が得られ，（7）よりはじまり，（8）の $i=2$，ついで $i=3$ と順次全問題に及ぶことは決定論的な場合と同様である．

D.P. の完全な計算としては，

（I） 最小コスト期待値函数群を，上記漸化式より $f_1({}_{N-1}S)$, $f_2({}_{N-2}S)$, ……, $f_N({}_0S)$ の順に求める段階．

（II） それらの情報をもとにして最適政策でのすべての状態を決定する段階．

よりなっている．以下，（I）の段階を計算 I；（II）の段階を計算 II と略称する．計算 II は，決定論的な場合には最適な多段過程の計算であり，確率論的な場合には最適なマルコフ過程の決定で，求まるのは最適な運用方針のもとでの各時刻の状態の確率分布である．

初期時間帯の決定のみを定めれば十分であるという制御の問題とか，最適な政策をきめれば十分で，あえてその時の状態の分布を知る必要がない場合には計算 II は略される．

4. 逐次近似法

4・1 概　要

前文でのべた ISA-RSA (incremental, relaxation) -D.P. を考える．すなわち，適当な実行可能な初期想定政策（解）から出発して，政策に対する少しずつの修正をくりかえして最適な政策に順次近づく近似法で，その修正の度合いを適当に小さく取ることにより，多数の貯水池を同時に考慮すべき（多次元の）問題を，適当な順序で一つずつの貯水池運用政策の修正を行う簡単な（1次元の）問題の系列に，近似的に還元しようとするものである．もう少し詳しくのべれば，

(1) すべての貯水池発電所の“実行可能な”政策，従ってそれによって決まる各時刻の状態（貯水量）の確率分布が初期において知られているものとする．

(2) No. 1 貯水池発電所を除く他のすべての貯水池発電所を初期の政策に固定し，実際の負荷からそれらの出力期待値を差引いた“等価負荷”に対して，No. 1 発電所と火力系との間で，適当にせまい“許容変動範囲”内で政策を変えることを許し，一層経

済的な政策を決定する．この No. 1 の新しい政策を次には初期政策として用いる．

(3) 次いで No. 2 発電所を除く他の貯水池発電所を初期政策に固定して“等価負荷”に対して No. 2 発電所と火力系との間で，“許容変動範囲”内で一層経済的な政策に変える．この No. 2 発電所の新しい政策を次には初期政策として用いる．

以下同様なことを No. 3, 4, ……に対してくり返し，再び No. 1 の政策修正にもどる．

この方法は形式的には決定論的な場合と全く同じ方法であるが，実は次のような注意の上にたって成り立っている．

4・2 等価問題と等価負荷

いま，No. 1 発電所の政策を修正するステップを考えるとする．もし単に決定論的な場合と全く並行して話を進めて行こうとすると，“等価負荷”は本来の負荷から No. 2 以下の発電所の出力を差引いたものとすべきであろう．No. 2,3, ……発電所の出力は確率的に与えられることになるから，このような等価負荷は確率的になる．このままでは問題が1次元化したといっても負荷が確率的になってしまうから，必ずしも容易になったとはいえないであろう．ところで，たとえば火力の燃料費特性がその出力の2次関数:

$$F(G)=\alpha_0+\alpha G+\beta G^2 \tag{9}$$

で示される場合には，負荷から No. 2, 3, ……発電所の出力期待値を差引いたものを“等価負荷”と考える“等価問題”でおきかえてよいことが容易に示される．その代り，その“等価問題”での期待コスト:

$$\underset{(J_1)}{E}[{}_1F({}_1P_R'-{}_1P_1)+\cdots\cdots+{}_NF({}_NP_R'-{}_NP_1)]$$

に

$$\beta\sum_{K=1}^{N}\sum_{i=2}^{n}\{\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i^2]-(\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i])^2\}$$
$$=\beta\sum_{K=1}^{N}\sum_{i=2}^{n}\{\mathrm{var.}\ {}_kP_i\} \tag{10}$$

をつけ加えたものが元の与えられた問題の期待コストになる．

ここで $J_i=({}_1J_i, {}_2J_i, \cdots\cdots, {}_NJ_i)$，すなわち No. i 発電所の各時間帯での流入流量の集り，したがって

$$\underset{(J_i)}{E}[\quad]=\int_{-\infty}^{\infty}d_1H_i({}_1J_i)\int_{-\infty}^{\infty}d_2H_i({}_2J_i)\cdots\cdots$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}d_NH_i({}_NJ_i)\cdot[\quad].$$

${}_KP_R'$ は“等価負荷”で，

$${}_KP_R'={}_KP_R-\sum_{i=}^{n}\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i].$$

他の発電所の政策修正の場合も添字番号を変えるだけで同じことである．(以上の証明は附録参照)

4・3 実行可能な政策と Phase I, Phase II

与えられた制約諸条件を満足する政策を一般に実行可能な政策とよぶ．この逐次近似法は初期の実行可能政策から出発して，実行可能な範囲内で政策を逐次修正して行こうとするものであるから，まず初期想定として実行可能な政策を一つ知る必要がある．その段階を L.P. にならって Phase I，以後の修正の段階を Phase II と称することにする．

決定論的な場合には，初期の実行可能解は比較的容易に求められるが，確率論的な場合ではその“政策”の意味から，各時刻の各状態に対してそれぞれ一つずつの決定を定めることが必要で，しかもそのすべてが，ありうるすべての流入流量に対して“実行可能”でなければならないから，必ずしも容易には求められないであろう．経験ゆたかな計画者によってこれを与えられることも考えられるが貯水池がいくつもあり，制約もきついとやはりむずかしい問題になろう．

ここでは一つの系統的な方法として，のちにフロー・チャートの所で示すように，Phase II とほとんど共通のプログラムで計算ができるものをとりあげる．その方法は，決定論的な場合では比較的容易に初期実行可能政策群が求められることから，それらを求めて利用するもので，次のように進む．

(I) 池への流入流量として，その平均値を採用して問題を決定論的に考え，決定論的な適当な初期実行可能政策を定める．

(II) (I) の状態での No. 2, 3,……貯水池発電所出力を負荷より差引いた等価負荷に対して，No. 1 貯水池発電所と火力系の組み合わせに“大域的”に D.P. を適用する．(したがって各時刻ですべての状態に対し，それぞれ一つずつの“決定”が定まる) ただし，この場合，普通の決定論的 D.P. に，ありうるすべての流入流量(その平均値のみでなく)に対して“実行可能”である条件を附加する．この様にして得られた大域的 D.P. の解は我々の要求に合致した実行可能政策になる．

(III) (II) の答に流入流量 J の確率分布を組み合わせて計算IIによって各時刻の貯水量状態の確率分布(その他出力分布など)が順次計算される．

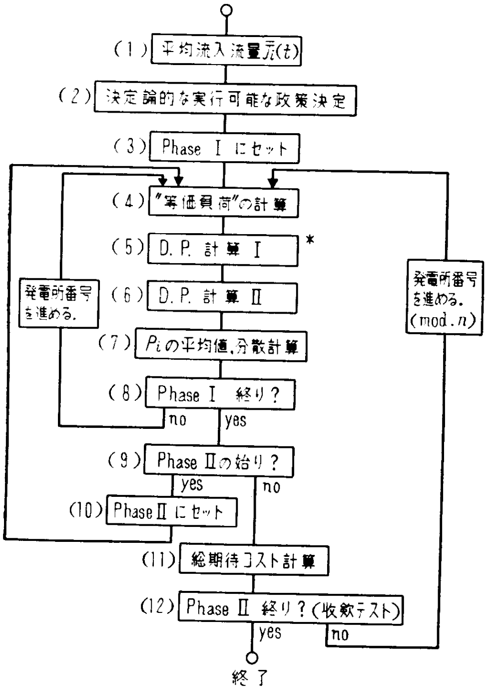
(IV) 次に No. 2 貯水池発電所の初期実行可能政策の決定に移る．ただし，等価負荷は (III) におい

て求まった No. 1 発電所の出力平均値と，No. 3 以下の（Ｉ）における出力値を負荷より差引いたものである．

以下同様にして最後の発電所まで行って Phase I を終る．

5. フロー・チャート

以上の計算法をフロー・チャートで示すと**第 2 図**の如くである．



*: Phase I と Phase II とで多少異る

第 2 図

ステップ（1），（2），（3）は Phase I の準備である．ステップ（5）の D.P. 計算 I は Phase I の時には決定論的な大域的な D.P. 計算 I であり，Phase II では政策の実行可能な範囲での微小修正の計算である．すべての発電所につき (4)，(5)，(6)，(7)，(8) のステップを 1 回ずつ実行すると Phase I が終ってステップ（9）に移り，ステップ（10）で，ステップ（5）の Phase II への切りかえが行われる．そして Phase II では右側を廻るループを進むことになる．計算 I，IIの進行を表によって示すと**第 3 図**および**第 4 図**の如くなる．

時刻 / S-値	0	1	2	------	N-2	N-1
$S^{(1)}$	$Q^{(1)}$			------		$Q'^{(1)}$
$S^{(2)}$	$Q^{(2)}$			------		$Q'^{(2)}$
$S^{(3)}$	$Q^{(3)}$			------	⇐	$Q'^{(3)}$
⋮	⋮	⋮	⋮			⋮
$S^{(l)}$	$Q^{(l)}$			------		$Q'^{(l)}$

表中はQ最適値（全体として 1-政策）

第 3 図　D.P. 計算 I

時刻 / S-値	0	1	2	------	N-2	N-1
$S^{(1)}$	$p^{(1)}$			------		$p'^{(1)}$
$S^{(2)}$	$p^{(2)}$			------		$p'^{(2)}$
$S^{(3)}$	$p^{(3)}$	⇒		------		
⋮	⋮					⋮
$S^{(l)}$	$p^{(l)}$			------		$p'^{(l)}$

表中は状態Ｓの確率（縦列にみて 1 時刻Ｓの確率分布）

第 4 図　D.P. 計算 II

6. 逐次近似法の妥当性と諸問題点

このような逐次近似法でいつも問題になる事柄は，

（1）大域的な方法にくらべ，計算量上どのくらいの利得があるか，

（2）コスト期待値の単調減少性が保証されるか，

（3）逐次近似的に収斂した政策が果して真の最適政策でありうるか，

（4）計算誤差，安定性の問題，

等である．以下これらにつき簡単に検討しよう．

6・1 計算方式と計算量との関係

いま，一つの発電所当りについて，一つの時刻での貯水量状態の数を N_S，一つの状態で考えられる決定（使用流量）の数を N_Q，一つの時間帯での流入流量の確率分布をあらわす代表値の数を N_J とする．

計算 I において，n 発電所の問題に対し，大域的に

は，$(N_S)^n\cdot N$ 回の部分的最適化を必要とするのに対し，ここで示した逐次近似計算法では $(N_S)\cdot N\cdot n\cdot m$ 回の部分的最適化ですむ．ここで，Nは全時間帯数，mは逐次計算法において必要な1発電所当りのくり返し計算回数．

この比較は一見，決定論的な場合とほぼ同じと見られるが，部分的最適化の内容に立ち入って比較すると，両者の計算量上の差がもっと著しいものであることがわかる．すなわち，大域的な場合，決定論的な場合には一つの部分的最適化は $(N_S)^n$ 回のコスト計算とそれらコストの比較とからなっている．これに対し確率論的な場合には，一つの部分的最適化は，$(N_Q)^n$ 回のコスト期待値の計算とそれらの比較とからなっており，その一つのコスト期待値の計算は $(N_J)^n$ 回のコスト計算とその平均操作とからなっている．したがって大雑把にいって，計算時間は

$$K(N_S\cdot N_Q\cdot N_J)^n$$

で評価されるとみてよかろう．これに対し逐次近似法では

$$K'(N_S\cdot N_Q'\cdot N_J)\cdot n\cdot m$$

で評価される．

いま大域的 D.P. で，$n=1$ の場合に α-時間かかったとすると，n 発電所の場合には

$$K(N_S\cdot N_Q\cdot N_J)(N_S\cdot N_Q\cdot N_J)^{n-1}$$
$$=\alpha(N_S\cdot N_Q\cdot N_J)^{n-1}$$

$n=2$, $N_S=20$, $N_J=5$ としてそれは

$$\alpha(10\cdot 20\cdot 5)=1000\,\alpha$$

となり，$\alpha=7$ 時間としても 7,000 時間に及ぶ．それまでいかないにしても，相当長時間を要することは明かであろう．逐次近似法では $N_Q'<N_Q$ で，$N_Q'=N_Q/7$ として

$$K'(N_S\cdot N_Q\cdot N_J)n\cdot m/7$$
$$=\alpha(m\cdot n\cdot \beta/7)\ \ \beta\equiv K'/K,$$

の程度である．我々の逐次近似法では Phase I が必要で，これにほぼ1～2回の反復に要する時間，さらに計算II（確率過程の決定）に対して計算Iに近い程度の時間がかかることから，$\beta=2$ 程度であろう．したがって，$n=2$, $m=4$ で $\alpha=7$ 時間なら16時間程度ですむ勘定になる．実際，後に示す例ではほぼこの程度であった．

以上の計算量の推定はかなり荒っぽいもので，大域的な場合，発電所の数がふえるにつれ急激にふえる他の手間もあるのであるが，それらを略しても，ほとんど $n=2$ より上は計算が無理であるといってよい．

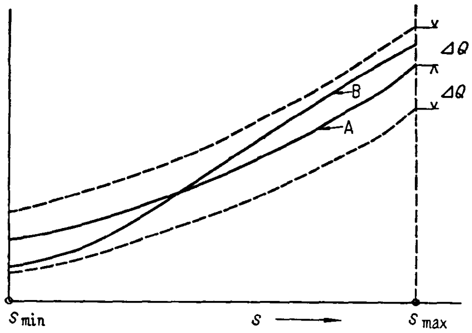
6・2 単調減少性，凸性条件および微小変動性

この方法の単調減少性は誤差の問題を除けば明かであろう．なぜなら，ある解（政策）から出発して，必ず少しでもコスト期待値が減少する解（政策）へと修正をつづけているわけで，減少しなければもとの解（政策）にとどめるからである．

これに対して，逐次近似的に収斂した政策が果して真の最適政策と一致するかどうかの問題を厳密に論ずることは一般にはむずかしい．まず，極小と最小とが一致するという保証がのぞまれるが，それには問題にいわゆる凸性条件がととのっておればよい．この凸性条件の問題については，本質的には，決定論的な場合と同様に考えてよい．というのは，個々の決定Q（使用流量）に対する制約は，池への流入流量が一層多くの値を取りうること（分布するから）によって，一層多くの制約式であらわされることになるが，それらが線型不等式群であることから，決定群Qに対する変動領域の凸性は決定論的な場合と同様の程度で成り立つ．さらに，期待コストは，分布する各流入流量に対するコストの，対応する確率で重みをつけた線型平均に他ならないから，コストに凸性があれば当然期待コストの凸性も成り立つからである．

したがって決定論的な場合にのべたように[1]，貯水池運用の問題では火力出力の制約がないとき領域の凸性は成り立ち，さらに，水力発電所出力が貯水池の落差変動の影響をうけない場合にはコストの凸性も存在するが[6]，その影響が強いとコストの凸性は必ずしも成り立たなくなる．時間を離散的に扱う場合に，一つの時間帯での水力出力が，その時間帯の初期時刻の貯水量のみの影響をうけるとした場合に，そのことは特に著しい．それを，時間帯の初期および終期の貯水量の平均値が水力出力に影響を与えるとし，さらに水力出力のQについての凹性や送電損失を考慮するとコストの凸性が強調され，計算も安定化することが決定論的な場合，多くの計算結果から示されたが，同じ注意は確率論的な場合にも適用される．

これらの注意のもとで我々は一応，極小と最小との一致を想定できるが，さらに，一つずつの発電所単位に修正を順次加えるという点にも問題がある．これに対しては，問題そのものが発電所単位に分離しやすい型であることが一つの理由であるが，同時に，一時に大幅な修正を行わないで，徐々に少しずつ修正を加えることによって逐次近似を安全に行うようつとめる．



第 5 図

ただ，前々からのべているように，確率論的な場合の政策は，各時刻におけるすべての状態値に対する決定群(関数)であるから，適当にせまい“許容変動範囲”内で政策をずらせるということは，**第5図**に示すように，各時刻で想定の決定群(関数)A を，その上下 ΔQ の幅の中で変動をゆるした時，最もよい決定群(関数) B でおきかえるということである．

6・3 誤差，安定性等の問題

以上のような諸注意によって原理的には，この逐次近似性が成り立つとしても，実際の計算上は誤差，安定性など多くの問題がある．これらについての検討は別の機会にゆずるとして，ここではそれらの問題点を注意するにとどめよう．

まず計算誤差（系統的）には，

（1） 一つの時刻での状態値の数，

（2） 一つの状態で許容する決定 Q の変動範囲とその中での決定の数，

（3） 最終時刻でのぞましい状態分布(あるいは値)に近づけるための方策，

（4） 最小期待コスト関数の表現，

等が効く．これらは逐次近似法に限らず大域的 D.P. でも同じく誤差の原因となるものである．この他に逐次近似法では，大域的 D.P. では不必要な

（5） 確率過程の計算（計算Ⅱ）

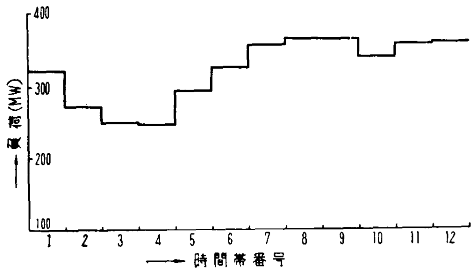
を行うために新たな誤差を生ずるが，これには上記4項目が関係するが，特に（1）と，確率過程の計算方法（あるいはさらに確率分布のあらわし方）とに大きく影響される．我々の試みでは（3）については，のぞましい状態を中心に，それよりずれると増大する罰金によってあらわし，（4）については指定状態の中間は線型内挿をした．

このような誤差が計算の安定性をおびやかすことになる．したがって，逐次近似法は**6・2**で，政策の修正をできるだけ小さくすることによって安全に行えると述べたが，ある限度以下に修正を小さくすると，逆にこの誤差に覆われて何らの利得も得られなくなる．このことは計算結果からも見られたことで，特に注意が必要である．

計算の誤差を少なくし安定性をはかると同時に，計算時間の縮小も実用上大切なことであるので，これらの基礎的な検討にもとづくさらに有効な計算方法を見出すことは今後の課題である．

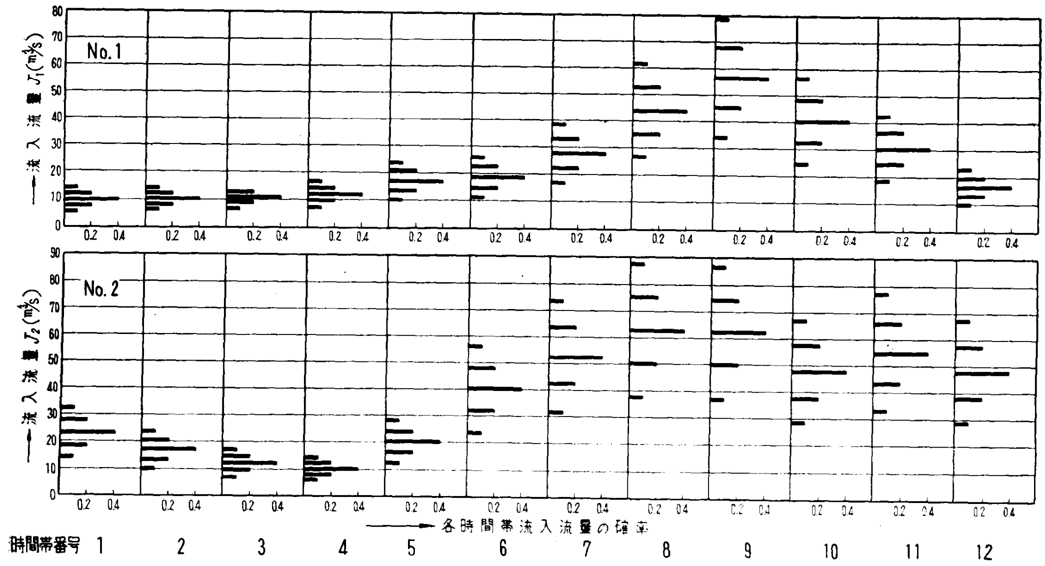
7. 例

二つの貯水池発電所をふくむ年間にわたる貯水池運用モデルにこの逐次近似法を適用した結果を**第6図**以下に示す．このモデルは逐次近似法を検証する目的で実際的なものに多少手を加えたモデルで，実際問題としてはやや粗雑であるが，$N_S=11$（即ち各貯水池の最大，最小容量の間を10等分して11個の貯水量状態をとったこと），$N_{Q'}=3$（政策の微小修正を，想定の Q とその上下 $Q\pm\Delta Q$ の中からえらぶ3点比較方式で行う．ただし，$\Delta Q=(Q_{\max}-Q_{\min})/20$ とした），$N_J=5$（流入流量の確率分布を**第7図**の如く五つの流入流量値であらわす）で，No. 2 貯水池は No. 1 貯水池のほぼ2倍の容量（No. 1, 2, 貯水池貯水量はそれぞれ，27.3 m³/s-month, 48.3 m³/s-month），水力出力特性も No. 2 の方が No. 1 より2～3割方能率がよい．(No. 1 出力特性: $P_1=(1.5+0.007({}_KS_1+{}_{K+1}S_1))\cdot(Q_1-Q_{10})^{MW}$, No. 2 出力特性: $P_2=(2.0+0.006\times({}_KS_2+{}_{K+1}S_2))\cdot(Q_2-Q_{20})^{MW}$)．

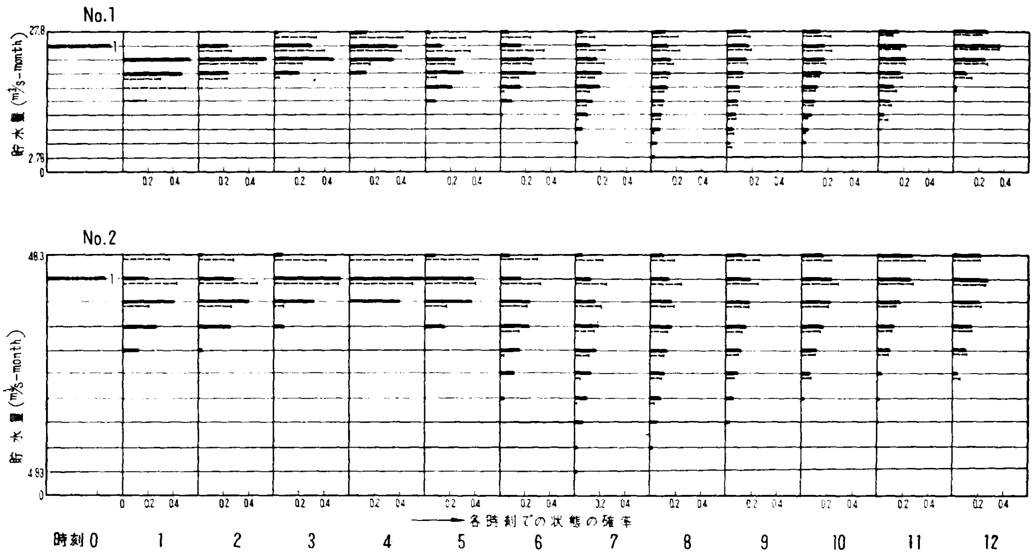


第 6 図

各時間帯における負荷，流入流量の確率分布は**第6図**，**第7図**に示すとおりである．流入流量の分布は正規分布で，平均値が小さい程分散も小さいとしたが，これは単に一つの想定で，必ずしも実際的な傾向とは



第 7 図

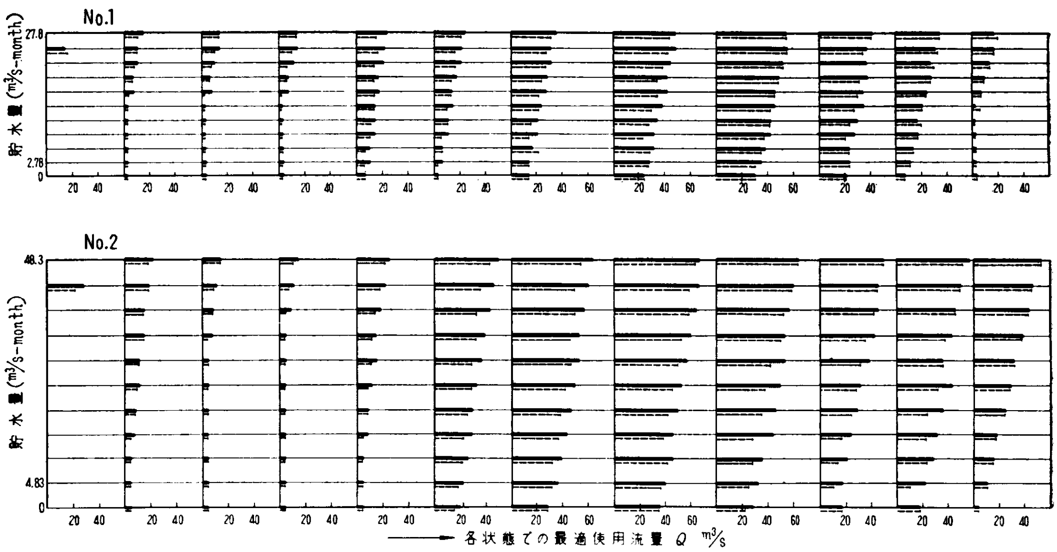


第 8 図

限らない．

計算の結果出た各時刻の各貯水池貯水量（“状態”）の確率分布並びに各状態における最適な使用水量(“決定”，したがって全体で一つの最適政策）はそれぞれ**第8図**，**第9図**に示す如くである．これらの図で，点線は初期想定，即ち Phase I の結果であり，実線が最終状態のそれである．

第8図を見ると，初期時刻の近傍を除けば，貯水量の分布は最大貯水量限界内ではほぼ正規分布で，その限界にかかるとそこで切り取られた形になっている．平均値の時間的変動は大体常識的であるが，平均流入流量を用いた決定論的な計算ではもっと貯水量最大限界に近づくであろう．これは決定論的にはその方が水力発電所の能率向上を期待できるからであるが，確率



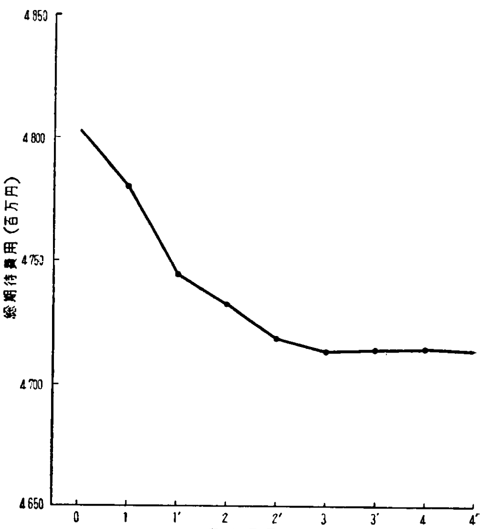
第 9 図

論的な場合にはどうしても貯水池より水を無駄に流すいわゆる溢流がおきやすいのでやや下回った形となる.

最後の時刻における貯水量分布を見てわかるように罰金のかけ方も大体満足しうるものであった. 第9図の最適政策でも, 最適放流（使用水量）が最大貯水量のとき最大で, 貯水量がへるにつれほぼ単調にきれいな曲線をもって下って行っている. したがって, 貯水量, 放流量の制約があっても, 最適状態分布, 最適政策についての比較的簡単な法則が解析的に樹てられるものと予想される. 第9図中で, 貯水量がへるにつれ大体は単調に最適放流がへる中で, 多少の上り下りがあるのは, ΔQ の粗さによる許容放流量値の不連続性が原因と考えられる.

逐次近似法の各反復によって総期待費用が下って行く模様を**第 10 図**に示す. 反復番号 0 は Phase I の結果であり, 反復番号 1 は No. 1 発電所の第 1 回修正の結果, 反復番号 1′ は No. 2 発電所の第 1 回修正の結果である. 反復番号 2, 2′ 等も同様である. このモデルは計算精度の確保の点からは不十分と考えられる（N_S, N_Q' などが小さいこと）ものであるにもかかわらず, 逐次近似法が期待どおりのものであったことが第 10 図よりわかる. なお, 反復番号 3 以後の多少の振動は計算の粗さによる誤差であろう.

この計算は電気試験所 ETL Mk-5 計算機によって行い, Phase I に 3 時間, 以後の Phase II に反復番号 4′ までで約 12 時間, 合計 15 時間程かかった.



第 10 図

参考文献

1) 深尾, 比留間: ダイナミック・プログラミングの応用（I）, 情報処理, Vol. 2, No. 3 (1961) p. 138
2) J.D.C. Little: The Use of Storage Water in a Hydroelectric System, J. of Operations Research Society of America, Vol. 3, No. 2 (1955)

3) J. Gessford: Scheduling the Use of Water Power, Management Science, Vol. 5, No. 2, (1959)
4) R. Bellman: Adaptive Control Processes; A Guided Tour. Princeton University Press. (1961)
5) R. Bellman: Dynamic Programming, Princeton University Press (1957)
6) T.C. Koopmans: Water Storage Policy in a Simplified Hydroelectric System, Cowles Foundation Paper No. 115 (1958)

附　録

(1) 各貯水池間の水の上での関連がない，
(2) 火力出力に制約がない（十分な火力補給能力があり，また，火力なしで需用を満せる時期がない），
(3) ${}_1J_i$, ${}_2J_i$, ……, ${}_NJ_i$ は互いに独立な確率分布を有する ($i=1, 2, \cdots\cdots, n$),

ものとする．

問題の総期待コストは

$$\underset{(J_1)}{E}\cdot\underset{(J_2)}{E}\cdots\cdots\underset{(J_n)}{E}\Big[\sum_{K=1}^{N}\Big\{\alpha_0+\alpha\Big({}_KP_R-\sum_{i=1}^{n}{}_KP_i\Big)+\beta\Big({}_KP_R-\sum_{i=1}^{n}{}_KP_i\Big)^2\Big\}\Big]=N\alpha_0+\alpha\sum_{K=1}^{N}\Big({}_KP_R-\sum_{i=1}^{n}\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i]\Big)+\beta\sum_{K=1}^{N}\Big({}_KP_R{}^2+\sum_{i=1}^{n}\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i{}^2]-2\,{}_KP_R\sum_{i=1}^{n}\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i]+\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}\underset{(J_j)}{E}[{}_KP_i]\cdot\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_j]\Big)$$

（附・1）

一方，“等価問題”として No. 1 貯水池発電所を修正するステップについて考えて一般性を失わない．そこで“等価負荷”として

$${}_KP_R'\equiv{}_KP_R-\sum_{i=2}^{n}\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i]$$

をとり入れると，“等価問題”の総期待コストは，

$$\underset{(J_1)}{E}\Big[\sum_{K=1}^{N}\Big\{\alpha_0+\alpha\Big({}_KP_R-\sum_{i=2}^{n}\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i]-{}_KP_1\Big)+\beta\Big({}_KP_R-\sum_{i=2}^{n}\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i]-{}_KP_1\Big)^2\Big\}\Big]$$
$$=N\alpha_0+\alpha\sum_{K=1}^{N}\Big({}_KP_R-\sum_{i=1}^{n}\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i]\Big)+\beta\sum_{K=1}^{N}\Big\{{}_KP_R{}^2+\underset{(J_1)}{E}[{}_KP_1{}^2]+\sum_{i=2}^{n}\Big(\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i]\Big)^2-2\,{}_KP_R\sum_{i=1}^{n}\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i]+\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{n}\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i]\cdot\underset{(J_j)}{E}[{}_KP_j]\Big\}$$

（附・2）

（附・1）と（附・2）との比較から

元の問題の期待コスト

$$=\text{“等価問題”の期待コスト}+\beta\sum_{K=1}^{N}\sum_{i=2}^{n}[\mathrm{var.}\ {}_KP_i].$$

ここで var は分散 (variance) の略である：

$$\mathrm{var.}\ {}_KP_i=\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i{}^2]-\Big(\underset{(J_i)}{E}[{}_KP_i]\Big)^2$$

（昭和 36 年 11 月 6 日受付，37 年 2 月 1 日再受付）