Vol.2013-AL-143 No.6
2013/3/1

超辺の縮約を許した非巡回部分超グラフの効率よい列挙

和佐 州洋[1]　有村 博紀[1]　宇野 毅明[2]　平田 耕一[3]

概要：本稿では，入力超グラフ $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ から超辺縮約をくり返し適用して得られる連結でベルジュ非巡回な部分超グラフの族を考え，そのような部分超グラフすべてを効率よく列挙する初めての多項式遅延と多項式領域列挙アルゴリズムを与える．アルゴリズムは，解となる部分超グラフ S の 1 個あたり $O(k^{1.5}mn)$ 時間と $O(N)$ 語の領域で，解を列挙する．ここに，$k = |S|$ であり，$N = ||\mathcal{E}||$，$m = |\mathcal{E}|$，$n = |\mathcal{V}|$ である．そのために，この族に対する還元系列を用いた特徴づけを与える．

Efficient Enumeration of Acyclic Hyperedge-Contracted Sub-Hypergraphs in a Hypergraph

Kunihiro Wasa[1]　Hiroki Arimura[1]　Takeaki Uno[2]　Kouichi Hirata[3]

Abstract: In this paper we study the problem of enumerating all connected and Berge-acyclic hyperedge-contracted sub-hypergraphs in an input hypergraph. We present the first polynomial delay and polynomial space enumeration algorithm for the problem.

1. 序論

近年，グラフや，木，文字列等の大規模離散構造データから，その興味深い部分構造を，効率よく発見・抽出する技術が関心を集めている．例えば，巨大なウェブグラフや関係ネットワークから，極大連結成分や，極大クリーク，密な部分構造を高速に抽出し，人間やモノの隠れた関連性やコミュニティを発見する研究が盛んに行われている [11].

超グラフ（hypergraph） [6] は，与えられた頂点集合 $\mathcal{V}$ と超辺 $e \subseteq \mathcal{V}$ の集合 $\mathcal{E}$ からなる組 $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ として定式化される．超グラフは，頂点集合 $\mathcal{V}$ 上の集合族そのものであり，さまざまな分野で，個体とその関係を表すために広く用いられている．例えば，購買バスケットデータは，$\mathcal{V}$ は数万の商品 ID からなる集合であり，各超辺はある顧客が同時に購入した商品 ID 集合を表している．文献データの共著関係や，関係データベースのスキーマ構造も超グラフの例である．

連結した超グラフや，非巡回な超グラフは，超グラフの興味深い部分構造の例である．例えば，Fagin [6] は，α-, β-, γ-非巡回超グラフをスキーマとしてもつ関係データベースは，各種の決定問題の多項式時間計算可能性や，分解の完全性，結合式（join expression）の単調性等のさまざまな良い性質をもつことを示している．

本稿では，超グラフ中に含まれる連結かつ非巡回な部分超グラフの列挙問題を考察する．超グラフには，非巡回に関する様々なクラスが存在するが，本稿では最も単純な族であるベルジュ非巡回性 [3] について着目する．

元の超グラフの超辺を組合せて得られる部分超グラフの列挙に関して，最近，和佐ら [15] は，連結でベルジュ非巡回な部分超グラフに対する初めての多項式遅延・多項式領域の列挙アルゴリズムを与えている．しかし，応用によっ

[1] 北海道大学大学院情報科学研究科
Hokkaido University, Graduate School of Information Science and Technology, {wasa, arim}@ist.hokudai.ac.jp
[2] 国立情報学研究所
National Institute of Informatics, uno@nii.jp
[3] 九州工業大学大学院 情報工学研究院
Department of Artificial Intelligence, Kyushu Institute of Technology, hirata@ai.kyutech.ac.jp

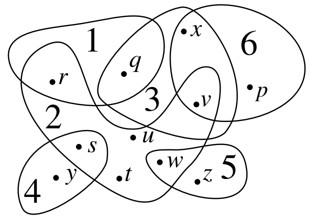

図 1　入力超グラフの例．図の超グラフ $\mathcal{H}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ は，11 個の頂点と 6 個の超辺からなる．図中で，各点は頂点を表し，その横の英小文字は頂点名を表す．実線で囲まれた各領域は超辺を表し，その中におかれた大きな数字は超辺の番号を表す．

$$
A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} p & q & r & s & t & u & v & w & x & y & z \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

図 2　図.1 の超グラフ $\mathcal{H}_1$ に対応する超辺頂点行列 $A_{\mathcal{H}}$ である．行は超辺に含まれる頂点を示し，列は頂点が各超辺に含まれるかどうかを示している．

ては，元の超辺をそのまま使うだけでなく，その一部分を削って，組合せることが自然な場合もあると思われる．ある超グラフ $\mathcal{G}$ が，入力超グラフ $\mathcal{H}$ の超辺縮約な擬似部分超グラフ（quasi-subhypergraph by edge-contraction）であるとは，それが $\mathcal{H}$ の超辺から頂点除去を繰り返し適用して得られたものであることをいう．

本研究は，[15] の結果を，与えられた入力超グラフ $\mathcal{H}$ に対する，連結でベルジュ非巡回な超辺縮約な擬似部分超グラフの族 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ の列挙に拡張し，この問題に対する初めての多項式遅延・多項式領域列挙アルゴリズムを与える．主結果として，我々は，入力超グラフを $\mathcal{H} = (\mathcal{E}, \mathcal{V})$ としたとき，$\mathcal{E}$ に含まれるすべての連結かつベルジュ非巡回で，超辺縮約な擬似部分超グラフ S を，解 1 個あたり $O(k^{1.5}mn)$ 時間と $O(||\mathcal{E}||)$ 語の領域で，重複なしに出力する多項式遅延・多項式領域の列挙アルゴリズム EC-BergeEnum を与える．ここに，$k = |S|$ と，$m = |\mathcal{E}|, n = |\mathcal{V}|$ である．このアルゴリズムは，Avis ら [2] の逆探索法に基づき，家系木 $\mathcal{F}$ 上をバックトラックし，すべての解を列挙する．

本稿の構成は，つぎのとおりである．初めに 2 節では，超辺縮約な擬似部分超グラフを導入し，その族の連結非巡回部分超グラフの列挙問題を導入する．次に，3 節では，解に対するベルジュ非巡回超グラフの還元系列を与え，逆探索に基づく多項式遅延・多項式領域の提案列挙アルゴリズム EC-BergeEnum を与える．4 節では，結論を述べる．

1.1　関連研究

α-非巡回超グラフ（[6]）の族に関して，平田と桑原ら [8] は，超グラフ中に含まれる極大な連結かつ α-非巡回な部分超グラフを 1 つ出力する線形時間アルゴリズムを与えている．平田と大梧ら [5] は，連結かつ α-非巡回な部分超グラフの多項式遅延・多項式領域列挙アルゴリズムを与えている．ベルジュ非巡回超グラフ（Berge [3]）の族に関して，Lovász [10] の結果から，超グラフ中に含まれる最大の超辺数を持つ非連結と連結なベルジュ非巡回な部分超グラフを 1 つ出力する多項式時間アルゴリズムを与られる．最近，和佐ら [15] は，連結でベルジュ非巡回な部分超グラフに対する $O((n+m)\log m)$ 時間と $O(||\mathcal{E}||)$ 語領域の列挙アルゴリズムを与えた．

密接に関連した研究として，Ferreira ら [7] は，入力グラフの k-部分木を解 1 つあたり $O(k)$ 時間で列挙するアルゴリズムを与えている．彼らの問題は，入力超グラフのすべての超辺のサイズを k=2 に制限し，出力をちょうど k 個の超辺からなる部分超グラフに制限したものである．Wasa ら [14] は，Ferreira ら [7] のアルゴリズムを，入力が木の場合に $O(1)$ 遅延に改善している．

入力がグラフの場合は，極大な連結非巡回部分グラフは全域木に一致する．全域木列挙問題に関して，頂点数 n と，辺数 m，解数 s に対して，Tarjan と Read [13] は $O(ms)$ 時間と $O(m)$ 領域のアルゴリズムを与え，最近，塩浦と，田村，宇野ら [12] は $O(m+s)$ 時間と $O(m)$ 領域の最適列挙アルゴリズムを与えている．

2.　準備

2.1　超グラフ

超グラフ（hypergraph）$\mathcal{H}$ は，**頂点**（vertex）の集合 $\mathcal{V}$ と**超辺**（hyperedge）の集合 $\mathcal{E} \subseteq 2^{\mathcal{V}}$ の組 $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ で表現される．超辺 $e \in \mathcal{E}$ は，頂点の部分集合である．すなわち，$e \subseteq \mathcal{V}$ である．文脈から明らかな場合，$\mathcal{H}$ と $\mathcal{E}$ を同一視する．$\mathcal{E}$ の任意の部分集合 $S \subseteq \mathcal{E}$ を，$\mathcal{E}$ の**部分超グラフ** (subhypergraph) とよぶ．このとき，S に対応する頂点集合を $V[S] = \bigcup S \subseteq \mathcal{V}$ で定め，対応する超グラフを $\mathcal{H}[S] = (V[S], S)$ と定める．

$\mathcal{E}$ の**擬似超辺** (quasi-hyperedge)f は，ある超辺 $e \in \mathcal{E}$ の空でない部分集合 $f \subseteq e$ である．以後，$\mathcal{E}$ のすべての擬似超辺からなる集合を $\mathsf{Ex}(\mathcal{E}) \subseteq 2^{\mathcal{V}}$ であらわす．$\mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ の任意の部分集合 $S \subseteq \mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ を，$\mathcal{E}$ の**擬似部分超グラフ** (quasi-subhypergraph) とよぶ．擬似部分超グラフ S 自身は，超グラフである．$\mathcal{Q}(\mathcal{E}) = \{S \mid S \subseteq \mathsf{Ex}(\mathcal{E})\}$ で $\mathcal{E}$ の擬似部分超グラフのなす族をあらわす．

超辺 e と超辺 $f \neq e$ が**隣接**する (adjacent) とは，$e \cap f \neq \emptyset$ であるときをいう．頂点 x に対して，$N(x) = \{f \in \mathcal{E} \mid x \in f\}$ で x の**隣接超辺**（neighbors）の集合を表し，$S \subseteq \mathcal{E}$ に対して，$N_S(x) = \{f \in S \mid x \in f\}$ と定義する．

入力超グラフとは，任意の超グラフ $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ である．以後，その頂点数を $n = |\mathcal{V}|$ で，超辺数を $m = |\mathcal{E}|$ で表す．[*1]

[*1] 超グラフに関する文献 [3], [6] では，$|\mathcal{V}|$ を位数（order）とよび，

超辺 e のサイズ $|e|$ は，それが含む頂点数である．超辺集合 $S \subseteq \mathcal{E}$ の**総サイズ**（total size）を $||\mathcal{S}|| = \sum_{e \in S} |e|$ と定義する．超グラフ $\mathcal{H}$ の**総サイズ**（total size）を $||\mathcal{H}|| = ||\mathcal{E}||$ と定義する．

$\mathcal{E}$ の各超辺には 1 から m までの**番号**（index）を一意に振り，番号と超辺を同一視する．$\mathcal{V}$ の各頂点にも同様に 1 から n までの番号を一意に振り，番号と頂点を同一視する．よって，超辺集合 $\mathcal{E}$ と頂点集合 $\mathcal{V}$ は，それぞれ，整数の集合 $\{1, \ldots, m\}$ と $\{1, \ldots, n\}$ とで同一視できる．以後は，$\mathcal{H}$ の頂点を $x, y, \ldots$ で表し，その超辺を $e, e', \ldots$，擬似超辺を $f, f', \ldots$ で表す．さらに，これらに添字をつけることがある．

超グラフは，次のような超辺頂点行列と呼ばれる二値行列で表せる [4]．頂点集合を $\mathcal{V} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ とし，超辺集合を $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ とする．超グラフ $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ の**超辺頂点行列**（$\mathcal{H}$ の**隣接行列**ともよぶ）とは，次を満たす $m \times n$ の二値行列 $A_{\mathcal{H}} = (a_{i,j}) \in \{0,1\}^{m \times n}$ である：$a_{i,j} = 1 \iff x_i \in e_j$ $(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$.

例 1　入力超グラフ $\mathcal{H}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ の例を，図 1 に示す．ここに，頂点集合 $\mathcal{V}_1$ は 11 個の頂点 $\{p, q, r, \ldots, x, y, z\}$ からなり，超辺集合 $\mathcal{E}_1$ は，6 個の超辺 $e_1 = \{q, r\}$ と，$e_2 = \{r, s, t, u, v, w\}, e_3 = \{q, v, x\}, e_4 = \{s, y\}, e_5 = \{w, z\}, e_6 = \{p, v, x\}$ からなる．超辺 e_i は添え字 i で表されている．

2.2　超辺縮約部分超グラフ

定義 1　$\mathcal{E}$ の擬似部分超グラフ $S \subseteq \mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ が $\mathcal{E}$ の**超辺縮約**（hyperedge-contracted, EC）であるとは，$\mathcal{E}$ から次の (i) と (ii) の操作を有限回適用して S が得られることをいう
- (i) **超辺縮約**: ある超辺 e を選び，それに含まれる頂点 $x \in e$ を除去する．このとき，他の辺からは x を除去しない．これを，x **に関する** e **の超辺縮約**という．
- (ii) **空辺除去**: ある空な超辺 $e = \emptyset$ を選び，それを超グラフから除去する．

超辺集合 $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$ から超辺集合 $T = \{e_1, \ldots, e_k\}$ への**照合写像**（matching function）とは，一対一関数 $\phi : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}$ で，各 $i = 1, \ldots, k$ に対して $f_i \subseteq e_{\phi(i)}$ が成立するものをいう．照合写像が存在するならば，S は T に**一対一照合する**という．

二つの超辺集合 S, T に対して，$\mathcal{B}(S, T) = (S, T, E)$ を，頂点集合 S, T をもち，次で定義される辺集合 E をもつ**二部グラフ**とする：$(\forall f \in S)\,(\forall e \in T)\;(f, e) \in E \iff f \subseteq e$. その**マッチング**は，どの二つの辺も端点を共有しないような辺集合 $M \subseteq E$ である．$|M|$ をマッチングのサイズという．次の定理は，$\mathcal{E}$ 超辺縮約な擬似部分超グラフの三つの等価な定義を与える．

定理 1　超グラフ $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ の任意の擬似部分超グラフを $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$ とする $(0 \le k \le m)$．このとき，次の条件 (1)–(3) は同値である：
(1) S が超辺縮約である．
(2) S は $\mathcal{E}$ に一対一照合する．
(3) 二部グラフ $\mathcal{B}(S, \mathcal{E})$ がサイズ $|S|$ のマッチングを持つ．

証明:　(1) ならば (2): 超辺縮約の定義から，$|S|$ の各超辺 f は，$|\mathcal{E}|$ 中の超辺 e に対する頂点の削除操作から得られるので，対応する e と f の組を取ることで，一対一照合であることがわかる．(2) ならば (3): マッチングと一対一照合の定義から明らか．(3) ならば (1): マッチングの定義から，S 中の各超辺は $\mathcal{E}$ 中の対応する超辺の擬似超辺であることがすぐわかる．よって，あきらか．

定義 2　$\mathcal{E}$ の擬似部分超グラフ $S \subseteq \mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ が $\mathcal{E}$ の**頂点縮約**（vertex-contracted）であるとは，$\mathcal{E}$ から次の (i) と (ii) の操作を有限回適用して S が得られることをいう
- (i) **頂点縮約**: ある頂点 x を選び，それを現在の擬似部分超グラフ S' から除去する．さらに，x を含む擬似超辺 $f \in S'$ から x を除去する．
- (ii) **空辺除去**: ある空な超辺 $e = \emptyset$ を選び，それを超グラフから除去する．

擬似超辺 f が，頂点集合 $U \subseteq \mathcal{V}$ によって**誘導される**とは，ある $e \in \mathcal{E}$ に対して $f = e \cap U$ が成立することをいう．

補題 1　超グラフ $\mathcal{E}$ の任意の擬似部分超グラフ S に対して，このとき，次の条件 (1) と (2) は同値である：
(1) S が頂点縮約である．
(2) ある頂点集合 $U \subseteq \mathcal{V}$ が存在して，S は U によって誘導された擬似超辺の集合である．

以後，$\mathcal{Q}_{ER}(\mathcal{E})$ と，$\mathcal{Q}_{VC}(\mathcal{E})$，$\mathcal{Q}_{EC}(\mathcal{E})$，で，それぞれ，$\mathcal{E}$ の部分超グラフと，頂点縮約な擬似部分超グラフ，超辺縮約な擬似部分超グラフのなす族を表す．

性質 2　任意の $\mathcal{E}$ に対して，次の包含関係が成立する．
(1) $\mathcal{Q}_{VC}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{Q}_{EC}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{E})$.
(2) $\mathcal{Q}_{ER}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{Q}_{EC}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{E})$.

2.3　連結性とベルジュ非巡回性

任意の超辺集合 $S \subseteq \mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ において，2 つの超辺 e と $f \in \mathcal{E}$ が**連結**であるとは，e と f をつなぐ**路**（path）π，すなわち，すべての $1 \le i \le k-1$ について，$e_i \cap e_{i+1} \ne \emptyset$ を満たす超辺の列 $\pi = (e_1 = e, e_2, \ldots, e_k = f)$ $(k \ge 1)$ が存在することをいう．

$|\mathcal{E}|$ をサイズ（size）とよぶことがある．

定義 3 (連結性) 超辺集合 S が**連結**（connected）であるとは，S に含まれる任意の 2 つの超辺 e と f が，それらをつなぐ路をもつことをいう．

定義より，空集合は連結である．超辺集合 C が超辺集合 S の**連結成分**（connected component）であるとは，(1) C が連結であり，かつ (2) C に含まれない任意の超辺 $e \in S \setminus C$ に対して，$S \cup \{e\}$ が連結でないことをいう．

補題 3 与えられた超辺集合 S の連結性は $O(||S||)$ 時間で判定可能である．

例 2 例 1 の超グラフ $\mathcal{H}_1$ において，$\mathcal{E}_1$ の部分集合 $S_1 = \{1,2,3,4\}$ と $S_2 = \{1,2,4,5\}$ は共に連結である．一方，$S_3 = \{1,3,5\}$ は，1 または 3 から 5 への路が存在しないので，連結でない．

定義 4 ([3]) 超グラフ $\mathcal{H}$ における**ベルジュ閉路**（Berge-cycle）とは，以下の (i)–(iii) の性質を満たす列 $\pi = (e_1, x_1, \ldots, e_k, x_k)$ $(k \geq 2)$ である：

(i) 各 $e_1, \ldots, e_k$ は相異なる超辺である．
(ii) 各 $x_1, \ldots, x_k$ は相異なる頂点である．
(iii) 各 $1 \leq i \leq k-1$ に対して，$x_i \in e_i \cap e_{i+1}$ が成立する．さらに，$x_k \in e_k \cap e_1$ が成立する．

上の定義で，k をベルジュ閉路 π の**長さ**という．対応する超辺の集合 $\{e_1, \ldots, e_k\}$ が**ベルジュ閉路をなす**という．直観的には，ベルジュ閉路は，自分へ戻ってくるような互いに隣接した長さ 2 以上の超辺の輪である．ベルジュ閉路に対して，次の補題が成立する．証明としては，閉路として $\pi = (e, x, f, y)$ を取ればよい．

補題 4 二つの超辺の組 e と f は，二つ以上の異なる頂点 x と y を共通に含むならば，ベルジュ閉路をなす．

例 3 例 1 の $\mathcal{H}_1$ において，超辺集合 $S_4 = \{1,2,3\}$ と $S_5 = \{3,6\}$ は，それぞれ，ベルジュ閉路をなす．これらは，長さ 3 のベルジュ閉路 $\pi_4 = (1, r, 2, v, 3, q)$ と，長さ 2 ベルジュ閉路 $\pi_5 = (3, x, 6, v)$ に対応している．超辺 3 と 6 が二つの頂点 x, v を共有するので，列 π_5 は補題 4 から閉路である．

定義 5 ([3]) 超グラフ $\mathcal{H}$ が**ベルジュ非巡回**（Berge-acyclic）とは，$\mathcal{H}$ がベルジュ閉路を含まないことをいう．

定義より，空な超グラフはベルジュ非巡回である．次の補題は，巡回性の定義より明らかである．

補題 5 もし空でない超辺集合 S がベルジュ非巡回ならば，その任意の部分集合 $S' \subseteq S$ はベルジュ非巡回である．

一般に，超グラフには α-, β-, γ-, ベルジュ非巡回などの複数の非巡回超グラフの階層があるが [6]，本稿では，階層の最下層であるベルジュ非巡回超グラフの族のみを考察するので，以下では，単に非巡回超グラフと呼ぶ．

以下では，$\mathcal{H}$ の連結かつベルジュ非巡回で，超辺縮約な擬似部分超グラフのなす族を $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{H})$ で表す．

例 4 例 1 の $\mathcal{H}_1$ において，$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ を考える．部分集合 $S_1 = \{1,2,3,4\}$ は，連結だが巡回なので $\mathcal{F}$ の要素でない．一方，$S_2 = \{1,2,4,5\}$ は，連結かつベルジュ非巡回なので $\mathcal{F}$ の要素である．

2.4 その他の定義

次節以降のアルゴリズムで用いる定義を与える．S 中の**孤立点**（isolated vertex）とは，それを含む S 中の超辺の数が高々 1 つであるような頂点 x である．すなわち，$|N_S(x)| \leq 1$ であることをいう．超辺 f の超辺集合 S に対する**交点**（connection point）とは f と $V[S]$ に共通に含まれる頂点をいい，交点のなす集合を $con(f,S) = f \cap V[S]$ で表す．また，超辺 f から交点を除いて得られる頂点集合を，S に関する f の**本体**（body）といい，$body(f,S) = f \setminus con(f,S)$ で表す．このとき，$cnt(f,S) = |f \cap V[S]| \geq 0$ を，f の S に対する**交点数**（connection count）と呼ぶ．

超辺集合 S の葉（leaf）を次のように定義する．S が単一超辺集合 $\{e\}$ のとき，e は S の唯一の**葉**である．S が二つ以上の超辺を含むとき，**葉**は，S の超辺 $e \in S$ で，それを除いた部分 $S \setminus \{e\}$ との間にちょうど一つの交点を含むようなもの，すなわち，$cnt(e, S \setminus \{e\}) = 1$ を満たすものをいう．$\textsc{Leaves}(S)$ で，S の**葉のなす集合**を表す．

補題 6 ([15]) 任意の超辺集合 S に対して，その葉集合 $\textsc{Leaves}(S)$ を $O(||S||)$ 時間で計算可能である．

補題 7 ([15]) 空でない超辺集合 S の葉を $e \in S$ とする．このとき，もし S が連結ならば，$S \setminus \{e\}$ も連結である．

上の補題で，e が S の葉でないときは，S が連結であっても $S \setminus \{e\}$ が連結でないとは限らない．

次の一連の補題は，和佐ら [15] によって，連結でベルジュ非巡回な部分超グラフの列挙のために使われた．これらは，以降の議論に有用である．

補題 8 ([15]) S を任意の連結かつベルジュ非巡回な超辺集合とし，$e \notin S$ を任意の超辺とする．このとき，次の (a) と (b) は同値である．

(a) $S \cup \{e\}$ は連結でベルジュ非巡回である．
(b) $cnt(e,S) = 1$ である．

証明: ベルジュ非巡回の定義より，任意の連結な超辺集

合 S と，任意の超辺 $e \notin S$ に対して，もし $cnt(e, S) \geq 2$ ならば $S \cup \{e\}$ は長さ 2 以上の閉路を持つことが示せる．これより，主張が示せる． □

補題 8 は，連結かつベルジュ非巡回な超辺集合に対して，その制約を維持したまま，新たな超辺を追加する方法を示している．これと逆に，次の補題 9 は，連結性とベルジュ非巡回性を維持したまま，ある超辺を削除する方法を示している．

補題 9 ([15]) S を $|S| \geq 2$ の任意の空でない部分集合とする．(1) S が連結かつベルジュ非巡回であるならば，ある超辺 $e \in S$ に対して $cnt(e, S \setminus \{e\}) = 1$ が成立する．(2) さらに，$S \setminus \{e\}$ は連結かつベルジュ非巡回である．

証明: 上の補題 9 の証明において，(1) は S のサイズに関する帰納法で示される．(2) は補題 5 と補題 7 より示される． □

2.5 列挙アルゴリズム

列挙アルゴリズム $\mathcal{A}$ は，すべての解をもれなく重複なく出力するアルゴリズムである．一般に，列挙問題において解の総数 M は入力サイズの指数であるので，列挙の研究では，入力サイズ N と出力数 M の両方を考慮して，アルゴリズムの計算量を測る．

列挙アルゴリズム $\mathcal{A}$ が**出力多項式時間**（output polynomial）であるとは，総計算時間 $f(N, M)$ が入力サイズと出力数の多項式 $poly(N, M)$ で限定されることをいう．$\mathcal{A}$ が**多項式時間列挙**（of polynomial time enumeration）であるとは，$\mathcal{A}$ の解一つ当たりのならし計算時間 $f(N, M)/M$ が入力の多項式 $poly(N)$ で限定されることをいう．$\mathcal{A}$ が**多項式遅延**（polynomial delay）（**多項式領域**（polynomial space））であるとは，計算の任意の時点で $\mathcal{A}$ の遅延，すなわち，隣接した解の間の最大計算時間，（記憶領域量）が入力の多項式 $poly(N)$ で限定されることをいう．

列挙アルゴリズム $\mathcal{A}$ は，多項式遅延ならば多項式列挙であり，多項式列挙ならば出力多項式時間である．この逆は一般に成立しない．

2.6 本稿の問題

入力超グラフを $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ とおく．本稿では，連結かつベルジュ非巡回な $\mathcal{H}$ の超辺縮約な擬似部分超グラフの族 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ に対して，その要素を列挙する問題を考察する．

問題: 連結非巡回で超辺縮約な擬似部分超グラフの列挙
与えられた入力超グラフ $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ に対して，$\mathcal{F}(\mathcal{H})$ に属するすべての連結かつベルジュ非巡回で $\mathcal{E}$ の超辺縮約な擬似部分超辺集合 $S \subseteq \mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ を，もれなく，かつ重複なしに出力せよ．

解の総数 M は，$||\mathcal{E}||$ に指数的である．解 $S \subseteq \mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ の一つを指定するには，定理 1 より，初めに e_1 から任意の部分集合をとるか，何もとらないか選択し，同様にこれを e_2 から e_m までくり返せば良いことから，次が導かれる．

$$M \leq \prod_{i=1}^{m} 2^{|e_i|} = 2^{\sum_{i=1}^{m} |e_i|} = 2^{||\mathcal{E}||} \qquad (1)$$

これより，$M = 2^{||\mathcal{E}||}$ 個の解候補 $S \subseteq \mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ を順に生成し，次に補題 3 と定理 2 を用いて，$O(||S||)$ 時間で S の連結性とベルジュ非巡回性をチェックするアルゴリズムによって，上記の列挙問題を $||\mathcal{E}||$ の指数時間で解くことができる．以下の節では，逆探索法に基づき，より効率良い列挙アルゴリズムを与える．

3. 多項式遅延・多項式領域列挙アルゴリズム

本節では，Avis と Fukuda ら [2] の逆探索法を用いて，入力超グラフ中に含まれるすべての連結かつベルジュ非巡回で，超辺縮約な部分超グラフを，多項式遅延と多項式領域で効率よく列挙するアルゴリズム EC-BergeEnum を与える．

3.1 超辺縮約を用いた連結なベルジュ非巡回超グラフの生成規則

本 3.1 節では，連結かつベルジュ非巡回で，超辺縮約な部分超グラフに対して，その帰納的な生成規則を与える．超辺集合 S' が，$x \in \mathcal{V} \setminus S$ に関する e の超辺拡大で S から得られるとは，$S' = (S \setminus \{e\}) \cup \{e \cup \{x\}\}$ をいう．

補題 10 連結かつベルジュ非巡回な空でない任意の超辺集合を S とする．超辺集合 S' は次の条件 (1) または (2) をみたすとき，連結かつベルジュ非巡回である．

(1) $cnt(e, S) = 1$ を満たすある単一頂点集合 $e = \{x\} \notin S$ に対して，$S' = S \cup \{e\}$ は S から e の追加で得られる．（タイプ I の拡張）

(2) S に含まれるある葉 e と，S に含まれないある頂点 $x \notin V[S]$ に対して，$S' = (S \setminus \{e\}) \cup \{e \cup \{x\}\}$ は S から x に関する e の超辺拡大で得られる．（タイプ II の拡張）

証明: (1) は補題 8 より明らか．(2) 仮定より，$S' = (S \setminus \{e\}) \cup \{e \cup \{x\}\}$ である．補題 9 より，$S \setminus \{e\}$ は連結かつベルジュ非巡回である．さらに，x が S' で孤立点になることから，$cnt(e', S \setminus \{e\}) = 1$ となり，補題 8 より，S' は連結かつベルジュ非巡回である． □

上の補題 10 から，入力超グラフ $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ に含まれるすべての連結かつベルジュ非巡回な部分超グラフを，多項式遅延と指数領域で列挙することができる．これは次のように行う．アルゴリズムは，空集合 $\emptyset$ から開始し，上記

の規則 (1) と (2) を用いて，S を更新し，すべての解を訪問する．ただし同じ解を 2 回以上訪問する可能性があるので，見つけた解を表に保存し，重複した解の出力を回避する．このとき，解 1 個あたりの遅延は入力の多項式でおさえられ，その一方で，表を格納するのに解の数 $M = O(2^{||\mathcal{E}||})$ に比例した領域が必要である．

3.2 超辺縮約ベルジュ還元系列

本小節では，族 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ に対する超辺縮約ベルジュ還元系列を導入する．これは，族 $\mathcal{Q}_{ER}(\mathcal{H})$ に対する超辺除去によるベルジュ還元系列（Lovász [10], 和佐ら [15]）を拡張したものである．

次の補題から，葉に含まれる任意の孤立点に関する超辺縮約は，連結性とベルジュ非巡回性を保存する．

の初期の出所について，次のことがわかった．の条件 (i) と (ii) の同値性が導かれる．

補題 11 連結かつベルジュ非巡回な超辺集合 $S \neq \emptyset$ に対して，$|e| = 1$ なる任意の葉 $e = \{x\}$ を除去して，S から得られる超辺集合 S' は連結かつベルジュ非巡回である．

証明: 補題 9 より直ちに導かれる． □

補題 12 連結かつベルジュ非巡回な超辺集合 $S \neq \emptyset$ に対して，e を S に含まれる任意の葉とする．このとき，S の任意の孤立点 $x \in e$ に関する e の超辺縮約によって，S から得られる超辺集合 S' は連結かつベルジュ非巡回である．

証明: S のサイズが 1 のときは自明である．2 以上のとき，補題 9 より，$S' = (S \setminus \{e\})$ は連結かつベルジュ非巡回である．さらに，S 中で孤立点であった x を e から除いた超辺 $e' = e \setminus \{x\}$ は $cnt(e', S') = 1$ を満たすので，補題 8 より，$S' \cup \{e'\}$ は連結かつベルジュ非巡回である． □

定義 6 超辺集合 S の**超辺縮約ベルジュ還元系列**とは，次の条件を満たす S の部分集合の系列 $\mathcal{S} = (S_k, S_{k-1}, \ldots, S_0) \in \mathsf{Ex}(\mathcal{E})^*$ である：(1) $S_k = S$ であり，(2) 各 $i = k, \ldots, 1$ に対して，S_i のある超辺 $e_i \in S_i$ が存在し，次の (2.a) または (2.b) が成立する：

(2.a) 超辺 e_i は，$|e_i| = 1$ を満たす S_i の任意の葉である．$S_{i-1} = (S_i \setminus \{e_i\})$ は，単一頂点集合 $e_i = \{x\}$ を S_i から除去して得られた超辺集合である．

(2.b) 超辺 e_i は，$|e_i| \geq 2$ を満たす S_i の任意の葉であり，$x \in e_i$ は任意の S の孤立点である．$S_{i-1} = (S_i \setminus \{e_i\}) \cup \{e_i \setminus \{x\}\}$ は，x に関する e の超辺縮約によって S_i から得られた超辺集合である．

S のベルジュ還元系列 $\mathcal{S}$ が**空集合終端**するとは，$S_0 = \emptyset$ をいう．後の定理 2 でみるように，上記のベルジュ還元系列は Church-Rosser property をもつ．すなわち，S が連結でベルジュ非巡回ならば，超辺 $e_1, e_2, \ldots$ の選択順序に関わらず，空集合で終了する．この性質より，上の定義に従って S のベルジュ還元系列を計算するアルゴリズムを考えることができる．これを手続 EC-BergeReduce と呼ぶ．

定理 2 任意の超辺縮約による擬似部分超グラフ $S \subseteq \mathcal{E}$ に対して，次の (i)–(iii) は同値である．

(i) S が連結かつベルジュ非巡回である．
(ii) S が空集合終端の超辺縮約ベルジュ還元系列を持つ．
(iii) 手続き EC-BergeReduce が，入力 S に対して，成功を返し，停止する．

証明: 任意の超辺集合を $S \subseteq \mathcal{E}$ とする．(iii) ならば (ii): アルゴリズムの構成から，成功が出力された時には，列 $\mathcal{S} = (S_k, \ldots, S_0)$ は超辺縮約ベルジュ還元系列である．(ii) ならば (i)：補題 10 から直ちに示される．(i) ならば (iii)：S が空ならば結果は自明である．それ以外の場合，補題 9 から，S が連結かつベルジュ非巡回ならば，S 中の葉 e に対して，$S \setminus \{e\}$ は連結かつベルジュ非巡回である．これを繰り返し適用し，(iii) が示される． □

明らかに，上の定理 2 のベルジュ還元系列の構成において，途中で出てくる超辺集合 S は，つねに元の超辺集合 S に一対一照合するような擬似部分超辺集合になっている．上の定理 2 より，超グラフのベルジュ非巡回性判定が多項式時間判定可能であること（Lovász [10]）がわかる．

実際，これは，頂点超辺行列 A_S を行リストと列リストで動的に管理し，一つの葉を見つけたら，それが単一頂点集合になるまでくり返し超辺縮約を行うことで，$O(||S||)$ 時間判定可能である．

3.3 多項式時間・多項式領域のアルゴリズム

本小節では，定理 2 で示した連結なベルジュ非巡回部分超グラフの還元系列と，逆探索法（Avis と Fukuda [2]）を結合して，$\mathcal{E}$ の連結でベルジュ非巡回な擬似部分超グラフ $S \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ を列挙する多項式時間・多項式領域のアルゴリズムを与える．

解の家系木（family tree）は，逆探索法の土台となる概念である．まず，解の族 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ の超辺集合間の親子関係 $\mathcal{P}$ を定義し，これに基づき，家系木 $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ を定義する．

定義 7 (親と子) 任意の空でない連結かつベルジュ非巡回な超辺集合を $S \neq \emptyset$ とおき $e = \max(\text{Leaves}(S))$ を S の最大辺番号をもつ一意な葉とする．このとき，$|e|$ に応じて，S の親（parent）を次のように定義する．

(1) $|e| = 1$ のとき: $e = \{x\} \in S$ であり，S の親は超辺集合 $\mathcal{P}(S) = S \setminus \{e\}$ である．このとき，$\mathcal{P}(S)$ を S の**タイプ I の親**といい，S を $\mathcal{P}(S)$ の**タイプ I の子**とよぶ．

(2) $|e| \geq 2$ のとき: S の親は，S から x に関する e の超辺縮約で得られる超辺集合 $\mathcal{P}(S) = (S \setminus \{e\}) \cup \{e \setminus \{x\}\}$ である．ここに，$x \in body(e, S \setminus \{e\})$ は e 中の本体の頂点で，最大頂点番号をもつものである．このとき，$\mathcal{P}(S)$ を S の**タイプ II の親**といい，S を $\mathcal{P}(S)$ の**タイプ II の子**とよぶ.

上の (2) で, 頂点 $x \in body(e, S \setminus \{e\})$ は S の孤立点になっている．ここに，$f \in \textsc{Leaves}(S) \iff cnt(f, S \setminus \{f\}) = 1$ であることと，補題 8 と補題 9 から，次の補題が得られる．

補題 13 任意の空でない連結かつベルジュ非巡回な超辺集合を $S \subseteq \mathcal{E}$ とおく．このとき，S の親 $\mathcal{P}(S)$ は，正しく定義され，さらに連結かつベルジュ非巡回である．さらに，$||S|| > ||\mathcal{P}(S)||$ が成立する．

証明: $|f| = 1$ のとき，明らかに $\mathcal{P}(S)$ は定義され，補題 11 より主張が成立する．$|f| \geq 2$ のとき，$e \setminus V(S \setminus \{e\})$ は非空であり，条件をみたす x が存在するので，最大のものをとれば良い．補題 12 からただちに主張が示される．親を求めるには，一つの頂点をある超辺から除くので示された． □

定義 8 (家系木) $\mathcal{F}$ の**家系木**（family tree）は，根付の DAG $\mathcal{T}(\mathcal{H}) = (\mathcal{F}(\mathcal{H}), \mathcal{P}, \emptyset)$ である．ここに，入力 $\mathcal{H}$ の連結でベルジュ非巡回な超辺集合の族であり，$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{H})^2$ は，$(S, S') \in \mathcal{P} \iff S = \mathcal{P}(S')$ で定義される有向辺の集合である．$\emptyset \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ は根である．

補題 13 から，家系木 $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ は連結であり，閉路を持たない．Avis と Fukuda [2] の議論から，次の定理が示される．

定理 3 任意の入力超グラフ $\mathcal{H}$ に対して，家系木 $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ は，頂点としてすべての $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ の要素を含む全域木である．

3.4 提案アルゴリズム

Algorithm 1 に，提案の多項式遅延・多項式領域の列挙アルゴリズム EC-BergeEnum を示す．提案アルゴリズムは，親の定義を用いて構築した家系木を，その根から子をたどり，バックトラックしながら，入力超グラフ $\mathcal{H}$ に含まれる全ての連結かつベルジュ非巡回な擬似部分超グラフを出力する．以下では，S は，$\mathcal{E}$ の連結かつベルジュ非巡回な擬似部分超グラフの任意の一つとする．

3.4.1 タイプ I の子の生成

親である超辺集合 S のタイプ I の子 S' は，適当なサイズ 1 の超辺 $f = \{x\} \notin S$ $(x \in V(S))$ で，次の条件 (I.a)–(I.c) のすべてをみたすものを，親 S に加えることで得られる：

(I.a) $cnt(f, S) = 1$ を満たす.

(I.b) 最大性の条件 $f = \max(\textsc{Leaves}(S \cup \{f\})$ を満たす.

(I.c) S' から $\mathcal{E}$ へのマッチングが存在する.

Algorithm 1 逆探索を用いた連結かつベルジュ非巡回部分超グラフの列挙アルゴリズム EC-BergeEnum: 超辺縮約部分超グラフ版

procedure EC-BergeEnum($\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$: hypergraph)
  EC-BergeRec($\emptyset, \mathcal{V}, \mathcal{E}$);

procedure EC-BergeRec($S, \mathcal{V}, \mathcal{E}$)
  output S;
  前処理として Leaves(S) を計算;
  // タイプ I の子の生成
  for each $x \in V(S)$ with $f = \{x\} \notin S$ **do**
    $S' \leftarrow S \cup \{f\}$;
    If ($f = \max$ Leaves($S \cup \{f\}$) **and**
    S' から $\mathcal{E}$ へのマッチングが存在する) **then**
      EC-BergeRec($S', \mathcal{V}, \mathcal{E}$);
  // タイプ II の子の生成
  $f \leftarrow \max(\textsc{Leaves}(S))$;
  for each $x \notin V(S)$ **do**
    $S' \leftarrow (S \setminus \{f\}) \cup \{f \cup \{x\}\}$;
    If ($x = \max(f \cup \{x\})$ **and**
    S' から $\mathcal{E}$ へのマッチングが存在する) **then**
      EC-BergeRec($S', \mathcal{V}, \mathcal{E}$);

これらの条件を満たす $f = \{x\}$ を，S の**タイプ I の候補超辺**という．ただし，上記の条件 (I.a) は条件 (I.b) に含まれるが，わかりやすさのため付加した．

補題 14 任意の連結かつベルジュ非巡回な超辺集合 S と，任意のサイズ 1 の超辺 $f = \{x\}$ に対して，このとき，(a) $S' = S \cup \{f\}$ が S のタイプ I の子であることと，(b) f が S のタイプ I の候補超辺であることは同値である．

証明: (a) ⇒ (b): S' が S のタイプ I の子であると仮定する．仮定より，f は条件 (I.a) と (I.b) は明らかに満たす．一対一マッチングは合成できて推移性をもつことが示せることより，S は $\mathcal{E}$ への，S' は S へのマッチングを持つので，S' も $\mathcal{E}$ へのマッチングをもち，f は条件 (I.c) を満たす．(b) ⇒ (a): 条件 (b) が成立するならば，条件 (I.a) と補題 10 の (1) より，超辺集合 $S' = S \cup \{f\}$ は連結かつベルジュ非巡回である．さらに，条件 (I.b) と条件 (I.c) より，$S = \mathcal{P}(S')$ が成立する． □

3.4.2 タイプ II の子の生成

親である超辺集合 S のタイプ II の子 S' は，$|f| \geq 2$ である S 中の超辺（条件は以下）を選び，S に含まれない頂点 $x \notin V(S)$ で，次の条件 (II.a)–(II.d) を満たすものを f に加えることで得られる．

(II.a) $cnt(f, S) = 1$ を満たす．つまり f は葉である．

(II.b) $f = \max(\textsc{Leaves}(S))$ を満たす．つまり，(II.a) で f は最大の超辺番号をもつ．

(II.c) $x = \max(body(f \cup x, S))$ を満たす．つまり，x は追加後の葉の本体の中で最大である．

(II.d) S' から $\mathcal{E}$ へのマッチングが存在する．

これらの条件を満たす f と x を，S の**タイプ II の候補超辺と頂点**という．ただし，上記の条件 (I.a) は条件 (I.b) に含まれるが，わかりやすさのため付加した．

補題 15 任意の連結かつベルジュ非巡回な超辺集合 S とその葉 $f = \max(\textsc{Leaves}(S))$ とする．このとき，(a) $S' = (S \setminus \{f\}) \cup \{f \cup \{x\}\}$ が S のタイプ II の子であることと，(b) f と x は，S のタイプ II の候補超辺と頂点であることは同値である．

証明: S の最大の葉を f とする．(a) ⇒ (b): S' が S のタイプ II の子であると仮定する．仮定より，条件 (II.a)–(II.c) は直ちに成立する．一対一マッチングは合成できて推移性をもつことが示せる．これより，S は $\mathcal{E}$ へのマッチングをもつので，(II.d) S' も $\mathcal{E}$ へのマッチングをもつ．(b) ⇒ (a): 条件 (b) が成立するならば，条件 (II.b) と補題 10 の (2) より，超辺集合 $S' = (S \setminus \{f\}) \cup \{f \cup \{x\}\}$ は連結かつベルジュ非巡回である．さらに，条件 (II.c) と条件 (II.d) より，$S = \mathcal{P}(S')$ が成立する． □

3.4.3 アルゴリズムの正当性と計算量

本論文の主結果である次の定理 4 は，**Algorithm** 1 の列挙アルゴリズム EC-BergeEnum の正当性と計算量を示す．

定理 4 (主結果) 入力超グラフを $\mathcal{H} = (\mathcal{E}, \mathcal{V})$ とする．このとき，アルゴリズム EC-BergeEnum は，$\mathcal{E}$ に含まれるすべての連結かつベルジュ非巡回で超辺縮約な擬似部分超グラフ S を，解 1 個あたり $O(k^{1.5}mn)$ 時間と $O(||\mathcal{E}||)$ 語の領域で，重複なしに出力する．ここに，$k = |S|$ と，$m = |\mathcal{E}|$, $n = |\mathcal{V}|$ である．

証明: 正当性は，定理 3 と補題 14，補題 15 より，アルゴリズムは， 家系木 $\mathcal{T}$ 全体を探索し，$\mathcal{F}$ の要素全てを列挙することより示される．

次に時間計算量を与える．二つの for ループ内の第 7 行目と, 9 行目, 14 行目から 16 行目の処理は，あらかじめ 5 行目で $\textsc{Leaves}(S)$ を計算し，ループ内で f のリストと，$\mathcal{V}$ のリスト，f と $\mathcal{V}$ 間の双方向リンク等の走査を用いることで，それぞれ $O(1)$ ならし時間で計算可能である．詳細は，フルペーパーで述べたい．

一方で，10 行目と 17 行目の一対一照合テストは，二部グラフ $\mathcal{B}(S, \mathcal{E})$ の最大マッチを，$O(\sqrt{k}km) = O(k^{1.5}m)$ 時間で求めること（Hopcroft-Karp [9]）で判定する．ここに，$O(k) = O(|S|)$ は最大マッチサイズであり，$|S| \cdot |\mathcal{E}| = O(km)$ は辺サイズである．以上より，ループは $O(|\mathcal{V}|) = O(n)$ 回実行されるので，子一つ当たり $O(k^{1.5}mn)$ 最悪時間で列挙できる．使用メモリは，隣接行列 A_S と $A_{\mathcal{E}}$ に $O(||\mathcal{E}||)$ 語の領域を要する．これは入力サイズに等しい． □

系 5 このとき，与えられた入力超グラフに対する連結かつベルジュ非巡回で超辺縮約な擬似部分超グラフの列挙問題は，入力サイズに関して，多項式遅延と多項式領域で列挙可能である．

4. 結論

本稿では，入力超グラフに含まれる連結かつベルジュ非巡回な超辺縮約な擬似部分超グラフを列挙する初めての多項式遅延・多項式領域の列挙アルゴリズムを与えた．

今後の課題として，頂点縮約な擬似部分超グラフの族に対する連結かつベルジュ非巡回な部分超グラフの列挙や，ならし解析による詳細な計算量見積りがあげられる．α-, β-, γ-非巡回性など他のクラスに対する非巡回な部分超グラフの列挙への拡張も興味深い問題である．

参考文献

[1] Asai, T., Abe, K., Kawasoe, S., Arimura, H., Sakamoto, H. and Arikawa, S.: Efficient substructure discovery from large semi-structured data. In *Proc. SDM 2002*.

[2] Avis, D. and Fukuda, K.: Reverse search for enumeration. *DAM*, 65:21–46, 1996.

[3] Berge, C.: *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland, Amsterdam, 1973.

[4] Boros, E., Gurvich, V., Khachiyan, L, and Makino, K.: On the complexity of generating maximal frequent and minimal infrequent sets. In *Proc. STACS 2002*, 133–141, 2002.

[5] Daigo, T., and Hirata, K.: On generating all maximal acyclic subhypergraphs with polynomial delay. In *Proc. SOFSEM 2009*, LNCS 5404, 181-192, 2009.

[6] Fagin, R.: Degrees of acyclicity for hypergraphs and relational database schemes. *JACM*, 30(3):514–550, 1983.

[7] Ferreira, R. , Grossi, R. , and Rizzi, R.: Output-sensitive listing of bounded-size trees in undirected graphs. In *Proc. ESA 2011*, LNCS 6942, 275–286, 2011.

[8] Hirata, K., Kuwabara, M., and Harao, M.: On finding acyclic subhypergraphs. In *Proc. Fundamentals of Computation Theory 2005*, 491–503, 2005.

[9] Hopcroft, J. E. and Karp, R. M.: An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs, *SIAM J. Comput.*, 2(4), 225-231, 1973.

[10] Lovász, L.: Matroid matching and some applications. *J. Comb. Theory* , Series B 28(2), 208–236, 1980.

[11] Manning, C. D., Raghavan, P., and Schtze, H.: *Introduction to Information Retrieval*. Cambridge, 2008.

[12] Shioura, A., Tamura, A., and Uno, T.: An optimal algorithm for scanning all spanning trees of undirected graphs. *SIAM J. Comput.*, 26(3):678–692, 1997.

[13] Tarjan, R. E. and Read, R. C. .: Bounds on backtrack algorithms for listing cycles, paths, and spanning trees. *Networks*, 5(3):237–252, 1975.

[14] Wasa, K., Kaneta, Y., Uno, T., and Arimura, H.: Constant time enumeration of bounded-size subtrees in trees and its application. In *Proc. COCOON 2012*, LNCS 7434, 2012.

[15] 和佐州洋, 有村博紀, 宇野毅明, 平田耕一: 超グラフ中に含まれる非巡回部分超グラフの効率よい列挙．第 88 回 人工知能基本問題研究会，石垣市，2013 年 1 月．