Vol.2013-AL-143 No.3
2013/3/1

# 費用2種類の施設配置ゲームの仁とシャープレイ値の計算について

並河 雄紀[1,a)]　岡本 吉央[2,b)]　大舘 陽太[1,c)]

**概要**：施設配置ゲームは施設配置問題から生じる協力ゲームである．この問題では，施設配置問題において各顧客が協力関係を築いて費用の最小化を行うと見なし，最小化した費用を顧客間でどのように分け合うかを協力ゲーム理論の解概念に基づいて考える．しかし，実際にそのような解を計算しようとすると，計算量理論の意味で難しいことが多い．本稿では，施設配置ゲームの一種である容量制約なし施設配置ゲームについて議論する．具体的には，施設の数が 2 個かつ費用が 2 種類に制限された場合に，凸ゲームと呼ばれる良い性質を持つクラスに属するための必要十分条件を示す．さらに，施設が 2 個かつ費用が 2 種類の場合にはシャープレイ値が顧客数の多項式時間計算可能であることを示す．

**キーワード**：組合せ最適化ゲーム，施設配置ゲーム，仁，シャープレイ値，凸ゲーム

# On computing the nucleolus and the Shapley value of facility location games with two cost values

Namikawa Takanori[1,a)]　Okamoto Yoshio[2,b)]　Otachi Yota[1,c)]

***Abstract:*** We study facility location games, which arise from the facility location problem as a cooperative game. In this game, customers in the facility location problem minimize their cost through cooperation, and the minimized cost is distributed among the customers by a solution concept from cooperative game theory. However, computation of such a solution can be hard in the sense of computational complexity theory. We concentrate on an uncapacitated facility location game. When there are at most two facilities, and the cost is restricted to two values, we characterize a convex game, which has several nice properties. Furthermore, when there are at most two facilities, and the cost is restricted to two values, we show that the Shapley value can be computed in polynomial time in the size of customers.

***Keywords:*** Combinatorial optimization game, facility location game, nucleolus, Shapley value, convex game

## 1. はじめに

施設配置ゲームとは，企業や自治体といった複数の主体が共同で出資し合って何らかの施設を建設しようと考えているときに，建設にかかる費用をどのように負担し合えば良いかを考えるためのモデルの 1 つである．施設を建設する際，施設の建設自体にかかる費用以外にも，建設した施設から何らかのサービスを受けるためにも費用が必要になる場合があり，これらの費用はあらかじめ分かっていると仮定する．例えば，複数の鉄道会社が共同で出資し合っ

[1] 北陸先端科学技術大学院大学
School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology 1-1 Asahidai, Nomi, Ishikawa 923-1292 Japan
[2] 電気通信大学
Department of Communication Engineering and Informatics, Graduate School of Informatics and Engineering, The University of Electro-Communications 1-5-1 Chofugaoka, Chofu, Tokyo 182-8585 Japan
[a)] t-namikawa@jaist.ac.jp
[b)] okamotoy@uec.ac.jp
[c)] otachi@jaist.ac.jp

てある地域に駅を作ろうと考えているとする．このとき，駅の建設自体にかかる費用の他に，各鉄道会社はその駅から自社の駅に線路を引かなければならず，そのための費用もかかる．駅の建設候補地は複数あるが，ある鉄道会社にとっては，線路を引くためにかかる費用が（距離の問題等で）多くなってしまうかもしれない等の理由で好ましくない立地もあり得る．このとき，駅の建設地を決める 1 つの方法は，全体の費用が最小になるような立地を選ぶことである．この問題は組合せ最適化問題の 1 つである施設配置問題として定式化できる．では全体の費用が最小になるように立地を決めた後，全体の費用を各鉄道会社でどのように負担し合えば良いだろうか．

このような費用負担について考える際，1 つの良い方法は協力ゲーム理論における解概念に基づいて考えることである．協力ゲーム理論はゲーム理論の一分野であり，人々の協力行動とそれに基づく利得分配ないし費用負担について数学的に分析するための学問である．協力ゲーム理論における解概念は様々な考え方に基づいて様々な種類があり，なかでも仁やシャープレイ値と呼ばれる解は非常に有用な解であると認識されている．施設配置問題を解くことで最小化した費用をどのように負担し合うかを協力ゲーム理論の解概念に基づいて考える問題は施設配置ゲームと呼ばれており，一般に組合せ最適化問題から生じる協力ゲーム的問題は，組合せ最適化ゲームの名でオペレーションズリサーチ等の分野で研究されている．

しかし，協力ゲーム理論に基づく解を実際にコンピュータで計算しようとすると，計算時間が膨大になってしまうことが多い．特に，施設配置ゲームにおける仁やシャープレイ値の計算は NP 困難である．そのため，どのようなインスタンスであれば現実的な時間で計算できるのかが焦点となる．

Goemans, Skutella [3] は施設配置ゲームにおいて，コアと呼ばれる解集合の非空性判定が NP 完全であること，そしてコアが非空であった場合にはコアの 1 要素は多項式時間計算可能であることを示し，さらにコアが非空となるいくつかのケースを紹介した．しかし仁やシャープレイ値については，重要な解概念であるにも関わらず，ほとんど何も知られていないのが現状である．

本稿では，施設配置ゲームの仁とシャープレイ値について議論する．特に費用が 2 種類に制限された場合を考える．

## 2. 準備

### 2.1 施設配置問題

施設配置問題は多くの変種を持つ問題であるが，本稿では容量制約なし施設配置問題を考え，今後は容量制約なし施設配置問題を単に施設配置問題と呼ぶことにする．**施設配置問題**では，入力として 2 つの有限集合 $D, F$，2 つの費用関数 $f : F \to \mathbf{R}_+$ と $c : D \times F \to \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ の 4 項組 $(D, F, f, c)$ が与えられる．各 $i \in D$ を**顧客**，各 $j \in F$ を**施設**と呼び，$f_j$ は施設 $j \in F$ を**開設する**際にかかる費用，$c_{ij}$ は顧客 $i \in D$ を施設 $j \in F$ に**繋ぐ**際にかかる費用を表す．この問題では，全ての顧客を施設に繋ぐためにいくつかの施設を開設し，その際の開設費用と接続費用の総和を最小化することが目的である．

施設配置問題のインスタンスは，図 1 のように表現することができる．円は顧客，四角は施設，施設の横の数字はその施設を開設する際にかかる費用，辺の横の数字は，その辺の両端にいる顧客と施設を繋ぐ際にかかる費用をそれぞれ表す．図 1 の問題例では，両方の施設を開設し，顧客 $a, b$ を上側の施設に，顧客 $c$ を下側の施設に繋ぐのが最適解であり，このときの費用は 26 である．施設配置問題は NP 困難であることが知られている [2]．

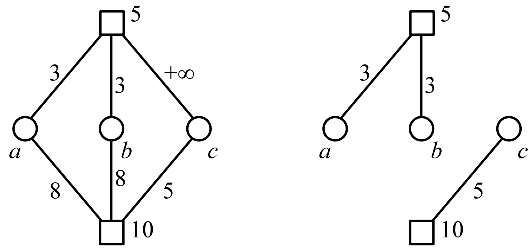


**図 1**　施設配置問題のインスタンスの例とその最適解

施設配置問題は，施設 $j$ を使うかどうかを決める 0-1 変数 $x_j$，顧客 $i$ を施設 $j$ に繋ぐかどうかを決める 0-1 変数 $y_{ij}$ を用いることで整数計画問題として以下のように定式化できる．

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{j \in F} f_j x_j + \sum_{i \in D} \sum_{j \in F} c_{ij} y_{ij} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in F} y_{ij} = 1 & \forall i \in D \\
& y_{ij} \leq x_j & \forall i \in D, j \in F \\
& x_j, y_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i \in D, j \in F
\end{array}
$$

### 2.2 協力ゲーム

協力ゲーム理論は 1944 年に von Neumann, Morgenstern [8] によって提唱された，人々や企業，自治体といった主体の提携行動とそれに基づく利得分配や費用負担について数学的に分析するための理論である．協力ゲーム理論は幅広い応用を有しており，経済学やオペレーションズリサーチに留まらず，通信ネットワークといった工学分野等にも応用されている．

 

### 2.2.1 協力ゲームの定義

協力ゲームにはいくつかの表現形式が存在するが，ここでは本研究で対象にしている TU ゲームについて述べる．**TU(Transferable utility) ゲーム**とは，有限集合 $N$ と集合関数 $v : 2^N \to \mathbf{R}$ の組 $(N, v)$ である．ただし，$v(\emptyset) = 0$ とする．各 $i \in N$ を**プレイヤー**，集合関数 $v$ を**特性関数**，各 $S \subseteq N$ を**提携**と呼ぶ．特に，プレイヤーの集合 $N$ 全体から形成される提携を**全員提携**と呼ぶ．各提携 $S \subseteq N$ に対して $v(S)$ は，$S$ に属するプレイヤーたちが協力して行動した際に $S$ 全体が得る利得ないしは費用と解釈される．

ゲーム $(N, v)$ は，特性関数 $v$ が利得を表すとき**利得ゲーム**，費用を表すとき**費用ゲーム**という．本研究で対象としている施設配置ゲームは費用ゲームであるため，本稿では今後，費用ゲームを前提として議論を進め，費用ゲームを単にゲームと呼ぶことにする．

### 2.2.2 解概念

ゲーム $(N, v)$ では，$N$ 全体で協力した際にかかる費用 $v(N)$ をプレイヤー間でどのように負担し合うべきかについて考える．各プレイヤーはできるだけ少ない費用負担を望んでいるが，あるプレイヤーが自分勝手な意見を貫けば，提携から外されてしまったり他のプレイヤーが提携から抜けてしまうことで，結果としてそのプレイヤーは全員で協力したときよりも多くの費用を支払うことになりかねない．そのため，各プレイヤーが提携から抜ける動機や，一部のプレイヤーたちが提携から抜けて彼らだけで協力して行動してしまう動機を持たないような費用の分配方法でなければならない．そのような分配方法を考えるために，各提携における特性関数の値が必要となる．ではどのように費用を負担し合えば各プレイヤーが全員で協力する動機を持つかということについては，様々な考え方に基づいて様々な分配方法が提案されており，この分配方法が協力ゲーム理論における解概念である．

本節では，コア，仁，そしてシャープレイ値といった代表的な解を紹介し，これらを考える上で基本となる費用ベクトル，準配分，配分についても紹介する．これらの概念に関するより詳しい解説やその他の解概念については，中山, 船木, 武藤 [9] 等を参照されたい．

### 2.2.3 費用ベクトル

ゲーム $(N, v)$ において，プレイヤー $i \in N$ が負担する費用を $x_i$ と表し，$i$ の**費用**という．各プレイヤーの費用を並べたベクトル $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{|N|}) \in \mathbf{R}^N$ を**費用ベクトル**という．つまり費用ベクトルは，各プレイヤーが負担する費用をベクトルで表現したものである．

### 2.2.4 準配分と配分

プレイヤーの集合 $N$ 全体で協力して行動した際にかかる費用 $v(N)$ をプレイヤー間で分け合うことを考える．このとき，費用ベクトルはどのような性質を満たすべきであろうか．まず，$v(N)$ は余すことなく分け合わなければならないであろう．この条件を明確化したものが準配分である．具体的には，費用ベクトル $x \in \mathbf{R}^N$ が $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ を満たすとき，$x$ を**準配分**という．

また，もしあるプレイヤーに割当てられる費用がそのプレイヤーが 1 人だけで行動した際にかかる費用よりも多い場合，そのプレイヤーは協力する動機を持たないであろう．そのため，各プレイヤーが負担する費用は各々が単独で行動した際にかかる費用以下である必要がある．この条件を明確化したものが配分である．具体的には，準配分 $x$ が任意の $i \in N$ に対して $x_i \le v(\{i\})$ を満たすとき，$x$ を**配分**という．ゲーム $(N, v)$ の配分全体の集合を $\mathcal{I}(N, v)$ で表すことにする．協力ゲームの多くの解概念はこの配分の中で考えられている．

配分は常に存在するとは限らないが，$(N, v)$ が**劣加法性**を満たすとき，つまり，任意の互いに素な提携 $S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset$ に対して，

$$v(S) + v(T) \ge v(S \cup T)$$

が成立するとき，配分は必ず存在する．なお，施設配置ゲームは劣加法性を満たすゲームである．

### 2.2.5 コア

コアは各提携に対して不満を与えないような配分の集合である．配分 $x \in \mathcal{I}(N, v)$ と提携 $S \subseteq N$ に対して，$\sum_{i \in S} x_i - v(S)$ を配分 $x$ に対して提携 $S$ が持つ**不満**と定義する．**コア**とは，各提携が持つ不満が 0 以下となる配分全体の集合である．ゲーム $(N, v)$ のコアを $\mathcal{C}(N, v)$ で表すと，

$$\mathcal{C}(N, v) = \left\{ x \in \mathcal{I}(N, v) \mid \sum_{i \in S} x_i \le v(S) \quad \forall S \subseteq N \right\}$$

である．$x \in \mathcal{C}(N, v)$ を**コア分担**という．

コアは常に非空とは限らず，コアが非空かどうかの特徴づけは協力ゲームにおいて重要な問題の 1 つである．

### 2.2.6 仁

仁は Schmeidler [5] によって考えられた解であり，各提携が持つ不満をできるだけ均等化しようという考えに基づくものである．ここでは，線形計画問題としての定義を紹介する．

線形計画問題 $\mathrm{P}_i$ を以下のように再帰的に定義する．

$$\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \epsilon & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i \in N} x_i = v(N), & \\
& \displaystyle\sum_{i \in S} x_i = v(S) - \epsilon_l & \forall S \in \mathcal{C}_l, \\
& & \forall l \in \{1, \cdots, i-1\}, \\
& \displaystyle\sum_{i \in S} x_i \le v(S) - \epsilon & \forall S \in \mathcal{C}_0 \setminus \displaystyle\bigcup_{l=1}^{i-1} C_l,
\end{array}$$

ただし，$\mathcal{C}_0 := 2^N \setminus \{N, \emptyset\}$，$\epsilon_l$ は $\mathrm{P}_l$ の最適値，また，任意の $l \in \{1, 2, \cdots, i-1\}$ に対して，

$$\mathcal{C}_l := \left\{ S \in \mathcal{C}_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{l-1} \mathcal{C}_j \mid \sum_{i \in S} x_i = v(S) - \epsilon_l \right.$$
$$\left. \forall \mathrm{P}_l \text{の最適解 } (x, \epsilon_l) \right\}$$

とする．$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots$ を次々と解いていくと，ある $\mathrm{P}_t$ で一意最適解 $(\mu(N, v), \epsilon_t)$ が得られる．この $\mu(N, v)$ が仁である．

仁は一意解であり必ず存在する．また，コアが非空であれば必ずコアに属する等の良い性質を有している．

#### 2.2.7 シャープレイ値

シャープレイ値は Shapley [6] によって提案された，提携に対するプレイヤーの貢献度に基づいた解である．

任意の提携 $S \subseteq N$ と任意のプレイヤー $i \in N \setminus S$ に対して，$v(S \cup \{i\}) - v(S)$ を提携 $S$ に対する $i$ の**貢献度**と定義する．ここで，1 人ずつ順番にプレイヤーが加わっていくという $|N|!$ 通りの提携形成を考える．$|N|$ 人のプレイヤーの順列を $\pi = (\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(|N|))$ とおき，$\pi$ 全体の集合を $\Pi$ とする．順列 $\pi$ における $\pi(k)$ の貢献度は $v(\{\pi(1), \cdots, \pi(k-1), \pi(k)\}) - v(\{\pi(1), \cdots, \pi(k-1)\})$ で与えられる．プレイヤー $\pi(1), \cdots, \pi(k-1)$ を $\pi$ における $\pi(k)$ の**先行者**と呼ぶ．順列 $\pi$ において，プレイヤー $i$ が $\pi(k)$ であるとき，$i$ の先行者 $\pi(1), \cdots, \pi(k-1)$ の集合を $P^{\pi,i}$ と表す．プレイヤー $i$ の $\pi$ における貢献度は $v(P^{\pi,i} \cup \{i\}) - v(P^{\pi,i})$ である．

1 人ずつ順番にプレイヤーが加わっていく $|N|!$ 通りの提携形成が等確率で起こるとする．このとき，プレイヤー $i$ の貢献度の期待値をプレイヤー $i$ のシャープレイ値という．$i$ のシャープレイ値を $\phi_i(N, v)$ とおくと，

$$\phi_i(N, v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi} v(P^{\pi,i} \cup \{i\}) - v(P^{\pi,i})$$

である．各プレイヤーのシャープレイ値を並べたベクトルを単に**シャープレイ値**という．なお，プレイヤー $i$ のシャープレイ値は以下のように表現することもできる．

$$\phi_i(N, v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|!(|N| - |S| - 1)!(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

シャープレイ値は配分とは限らないが，$(N, v)$ が劣加法性を満たすとき必ず配分になる．施設配置ゲームは劣加法性を満たすゲームであるため，施設配置ゲームのシャープレイ値は配分である．また，仁と同様に一意解であり必ず存在する等の良い性質を有している．

また，シャープレイ値は元々は協力ゲームにおける公理系から導出された解である．その公理系の中に対称性と呼ばれるものがある．プレイヤー $i, j \in N, i \neq j$ が**対称**であるとは，任意の提携 $S \subseteq N, i, j \notin S$ に対して $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ となるときをいう．

**命題 2.1.** ゲーム $(N, v)$ においてプレイヤー $i, j \in N$ が対称であれば，$\phi_i(N, v) = \phi_j(N, v)$.

### 2.3 凸ゲーム

凸ゲームは協力ゲームのクラスの 1 つであり，提携の人数が増加するにしたがって新たに加わるプレイヤーの貢献度も増加するようなクラスである．ゲーム $(N, v)$ が**凸ゲーム**であるとは，特性関数 $v$ が**劣モジュラ関数**となるとき，つまり任意の提携 $S, T \subseteq N$ に対して，

$$v(S) + v(T) \geq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

が成立するときをいう．

凸ゲームは多くの興味深い性質を有しており，コアが非空であること，シャープレイ値がコアに属すること等が挙げられる [7]．また，仁が楕円体法を用いて多項式時間で計算できるという性質は特に重要である [1]．このように凸ゲームは非常に良い性質を有しているため，凸ゲームの特徴づけも協力ゲームにおいて重要な問題である．

### 2.4 施設配置ゲーム

組合せ最適化ゲームとは，特性関数の値が組合せ最適化問題の最適値として表現される協力ゲームであり，1970 年代頃から研究されている．組合せ最適化ゲームにおけるプレイヤーは，例えばグラフ上の組合せ最適化ゲームであればグラフの頂点や辺に対応する．組合せ最適化ゲームではこれまで，コアの非空性判定やコア分担の計算を中心に研究されてきたが，近年，Okamoto [4] 等でコア以外の解概念に関する研究もされている．

#### 2.4.1 施設配置ゲームの定義

**施設配置ゲーム**とは，顧客の集合 $D$ と集合関数 $\gamma : 2^D \to \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ の組 $(D, \gamma)$ として表現され，各 $S \subseteq D$ に対して $\gamma(S)$ は施設配置問題の部分問題 $(S, F, f, c|_S)$ の最適値を意味する．ただし，$c|_S$ は $c$ の制限 $c|_S : S \times F \to \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ である．すなわち，$S \times F$ の任意の要素 $i, j$ に対して，$(c|_S)_{ij} = c_{ij}$ である．

施設配置ゲームの例を挙げる．図 1 の施設配置問題のインスタンスが与えられたとき，対応する施設配置ゲームの特性関数 $\gamma$ は，$\gamma(\emptyset) = 0, \gamma(\{a\}) = 8, \gamma(\{b\}) = 8, \gamma(\{c\}) = 15, \gamma(\{a, b\}) = 11, \gamma(\{b, c\}) = 23, \gamma(\{c, a\}) = 23, \gamma(\{a, b, c\}) = 26$ となる．

#### 2.4.2 解の計算について

本稿では，施設配置ゲームの仁とシャープレイ値を計算することを考える．このとき入力として，施設配置ゲームではなく施設配置問題のインスタンスを与える．

ここでいくつか注意点がある．2.2 節で概観したように，協力ゲームの解概念はゲームの特性関数に基づいて定義されている．しかし，プレイヤーの集合を $N$ としたとき提

Vol.2013-AL-143 No.3
2013/3/1

携の数は $2^{|N|}$ 個ある．また，施設配置問題は NP 困難であるため，施設配置ゲームの特性関数の計算も NP 困難である．そのため，施設配置ゲームの仁やシャープレイ値を定義通りに計算しようとするのは無謀である．

さらに悪いことに，施設配置ゲームの準配分の計算は NP 困難であることが分かる．準配分の各成分の総和は元の問題の最適値と一致する，という性質を思い出そう．準配分の性質より，施設配置ゲームの準配分の計算は決定問題としての施設配置問題と同等以上に難しい上に明らかに NP には属さない．決定問題としての施設配置問題は NP 完全であるため，施設配置ゲームの準配分の計算は NP 困難である．この事実から，本研究で考える施設配置ゲームの仁とシャープレイ値の計算も NP 困難であることが分かる．しかし，多項式時間計算可能な問題から生じる協力ゲームの仁やシャープレイ値の計算がどの程度難しいかということについてはよく分かっていない．

## 3. 費用が 2 種類の施設配置ゲーム

2.3.2 節では，施設配置ゲームの仁，シャープレイ値の計算は NP 困難であることを確認した．本章では，各種費用が 2 種類に制限された場合，つまり，$r, s \in \mathbf{R}$ $(0 < r < s)$ として各費用関数を $f : D \to \{r, s\}, c : D \times F \to \{r, s\}$ と制限した場合の施設配置ゲームを考える．しかし，費用を 2 種類に制限しても施設配置問題は NP 困難である．

**命題 3.1.** 費用 2 種類の施設配置問題は NP 困難である．

命題 3.1 より，費用 2 種類の施設配置ゲームの仁やシャープレイ値の計算も NP 困難である．

### 3.1 費用 2 種類かつ施設 2 個の施設配置問題

施設配置ゲームの仁やシャープレイ値の計算は費用を 2 種類に制限しても NP 困難である．そこで，施設を 2 個に制限した場合を考える．

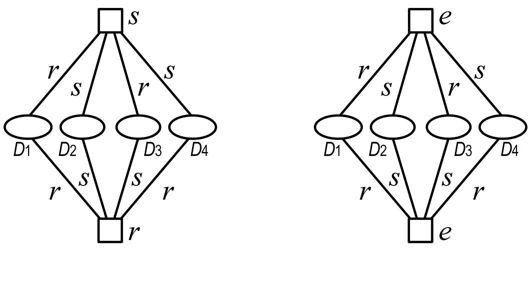


**図 2** 費用 2 種類かつ施設 2 個の施設配置問題の 2 種類のインスタンス．$e \in \{r, s\}$ である．

費用が $r, s \in \mathbf{R}$ $(0 < r < s)$ の 2 種類かつ施設 2 個に制限された施設配置問題は線形時間で計算できる．具体的には，この場合における施設配置問題のインスタンスは図 2 のように 2 種類のインスタンスに分類することができる．一方のインスタンスは施設の費用が異なり，もう一方のインスタンスは施設の費用が同じである．また，顧客の集合 $D$ を各施設への接続費用によって $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ と分割する．$D_1$ は両方の施設への接続費用が $r$，$D_2$ は両方の施設への接続費用が $s$，$D_3$ は上方の施設への接続費用が $r$，下方の施設への接続費用が $s$，$D_4$ は上方の施設への接続費用が $s$，下方の施設への接続費用が $r$ といった具合である．

このように $D$ を分割すると次のことが言える．まず，同じ種類のプレイヤーは同じ施設と繋がる．さらに最適解の候補は，全員が上方の施設と繋がるか，全員が下方の施設と繋がるか，両方の施設を開設して $D_3$ は上方，$D_4$ は下方の施設と繋がるかのいずれかである（$D_1$ と $D_2$ はどちらの施設と繋がっても良い）．そのため，図 2 の左図のインスタンスにおいては，最適値は以下の式を計算することで得られる．

$$\begin{aligned}\min\{&s + r|D_1| + s|D_2| + r|D_3| + s|D_4|,\\ &r + r|D_1| + s|D_2| + s|D_3| + r|D_4|,\\ &s + r|D_1| + s|D_2| + r|D_3| + r + r|D_4|\}.\end{aligned}$$

図 2 の右図のインスタンスにおいても同様に計算できる．

費用 2 種類かつ施設 2 個の場合における凸ゲームの特徴づけを行う．

#### 3.1.1 凸ゲームの特徴づけ

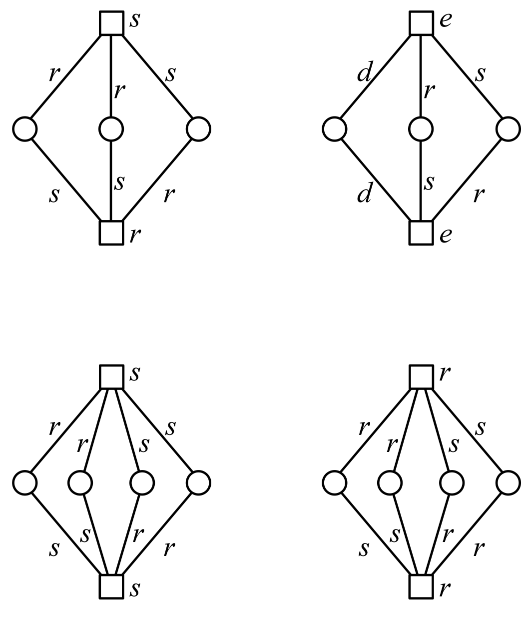

**図 3** 定理において禁止しているインスタンス．

**命題 3.2.** $r, s \in \mathbf{R}(0 < r < s), d, e \in \{r, s\}$ とする．費用が $r, s$ の 2 種類かつ施設 2 個の施設配置ゲームが凸ゲームであるための必要十分条件は，インスタンス $(D, F, f, c)$ が図 3 の各インスタンスを部分として含まないことである．ただし，パターン 4 を含んでいけないのは $s < 2r$ のとき．

命題 3.2 の条件を満たすインスタンスは凸ゲームであるため，2.3 節でも述べた通り仁が楕円体法を用いて多項式時間で計算できる．

#### 3.1.2 シャープレイ値の計算

本節では，費用が 2 種類かつ施設が 2 個の場合のシャープレイ値が多項式時間計算可能であることを示す．

**命題 3.3.** 費用が $r, s \in \mathbf{R}(0 < r < s)$ の 2 種類かつ施設 2 個の施設配置ゲーム $(D, \gamma)$ のシャープレイ値は $|D|$ の多項式時間で計算可能である．

証明では図 2 の 2 種類のインスタンスそれぞれの場合に分けて考えているが，紙面の都合上，左図のインスタンスの場合だけ証明する．右図のインスタンスにおいても同様に証明できる．

**命題 3.3 の証明.** $|D| = n$ とおく．命題 2.1 より，対称なプレイヤーどうしのシャープレイ値は等しいことに注意する．

**Case 1:** $i \in D_1$ のシャープレイ値．

$i \in D_1$ が新しく提携に加わる際に増加する費用を考えると，$r$ 増加するか，もしくは $2r$ 増加する．$2r$ 増加するのは $i$ の先行者が空のときなので，$(n-1)!$ 通りある．よって，$i \in D_1$ のシャープレイ値は，

$$\phi_i(D, \gamma) = r + \frac{r(n-1)!}{n!} = r + \frac{r}{n}$$

となる．

**Case 2:** $i \in D_2$ のシャープレイ値．

$i \in D_2$ が新しく提携に加わる際に増加する費用を考えると，$s$ 増加するか，もしくは $s + r$ 増加する．$s + r$ 増加するのは $i$ の先行者が空のときなので，$(n-1)!$ 通りある．よって，$i \in D_1$ のシャープレイ値は，

$$\phi_i(D, \gamma) = s + \frac{r(n-1)!}{n!} = s + \frac{r}{n}$$

となる．

**Case 3:** $i \in D_3$ のシャープレイ値．

$i \in D_3$ が新たに提携に加わる際に増加する費用の期待値を考える．そのために，提携 $S \subseteq D$ が $\gamma(S)$ を達成するときに，どのような条件を満たせば上方の施設，下方の施設，両方の施設とそれぞれ繋がるかを考える．提携 $S$ において，任意の $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対して $a_i$ を $|D_i \cap S|$ とする．提携 $S$ が上方の施設と繋がることで $\gamma(S)$ を達成するときは，

$$s + ra_1 + sa_2 + ra_3 + sa_4 \leq r + ra_1 + sa_2 + sa_3 + ra_4$$

すなわち，

$$1 + a_4 \leq a_3$$

かつ，

$$s + ra_1 + sa_2 + ra_3 + sa_4 \leq s + r + ra_1 + sa_2 + ra_3 + ra_4$$

すなわち，

$$a_4 \leq \frac{r}{s - r}$$

が成立．提携 $S$ が下方の施設と繋がることで $\gamma(S)$ を達成するときは，

$$r + ra_1 + sa_2 + sa_3 + ra_4 \leq s + ra_1 + sa_2 + ra_3 + sa_4$$

すなわち，

$$a_3 \leq 1 + a_4$$

かつ，

$$r + ra_1 + sa_2 + sa_3 + ra_4 \leq s + r + ra_1 + sa_2 + ra_3 + ra_4$$

すなわち，

$$a_3 \leq \frac{s}{s - r}$$

が成立．提携 $S$ が両方の施設と繋がることで $\gamma(S)$ を達成するときは，

$$s + r + ra_1 + sa_2 + ra_3 + ra_4 \leq s + ra_1 + sa_2 + ra_3 + sa_4$$

すなわち，

$$\frac{r}{s - r} \leq a_4$$

かつ，

$$s + r + ra_1 + sa_2 + ra_3 + ra_4 \leq r + ra_1 + sa_2 + sa_3 + ra_4$$

すなわち，

$$\frac{s}{s - r} \leq a_3$$

が成立．$a_4 = r/(s - r)$ の場合には，$a_3 \leq s/(s - r)$ ならば上方の施設に繋がるか両方の施設と繋がることで $\gamma(S)$ を達成でき，そうでないなら下方の施設に繋がることで $\gamma(S)$ を達成できる．そこで，$a_4 = r/(s-r)$ のとき，$a_4 < r/(s-r)$ のとき，$a_4 > r/(s - r)$ のときのそれぞれの場合において，$i \in D_3$ が新たに提携 $S$ に加わるときに費用がどのように増加していくかを考える．図 4 は，$a_3$ が 1 ずつ増えていくときに増加する費用を表した図である．具体的には，$a_3$

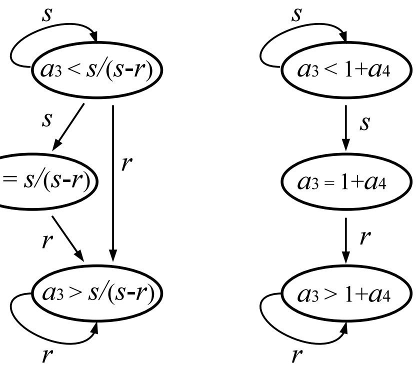


**図 4** $a_3$ が 1 ずつ増えていくときに増加する費用と $a_3$ の変化を表した遷移図．左図は $a_4 \geq r/(s-r)$ のとき, 右図は $a_4 < r/(s-r)$ のときの遷移をそれぞれ表す．

に応じた各状態から伸びる矢印は，$i \in D_3$ が加わる前と後での $a_3$ の変化を表し，$r$ と $s$ はそのときに増加する費用を表す．例えば，図 4 の左図において，$a_3 < s/(s-r)$ を満たすとき，$i \in D_3$ が加わることで $a_3 > s/(s-r)$ となる場合，増加する費用は $r$ であることを表している．

便宜上，$comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$ を，

$$\binom{n}{|D_3|+|D_4|}\binom{|D_3|-1}{a_3}\binom{|D_4|}{a_4}(a_3+a_4)!$$
$$(|D_3|+|D_4|-a_3-a_4-1)!(n-|D_3|-|D_4|)!$$

とする．これは $D$ に属する顧客を 1 列に並べるときに，$i \in D_3$ の前に $D_3 \setminus \{i\}$ に属する顧客が $a_3$ 人，$D_4$ に属する顧客が $a_4$ 人いる場合の数である．$r/(s-r)$ と $s/(s-r)$ のうち一方が整数ならばもう一方も整数になることに注意する．

**Case 3-1:** $a_4 = r/(s-r)$ のとき．

$a_3 \leq s/(s-r)-1$ ならば $i$ が加わることで $a_3 \leq s/(s-r)$ となり費用は $s$ 増加する．この場合は，

$$\sum_{a_3=0}^{\min\{|D_3|-1, \frac{s}{s-r}-1\}} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある．$a_3 \geq s/(s-r)$ ならば $i$ が加わることで $a_3 > s/(s-r)$ となり，費用は $r$ 増加する．この場合は，

$$\sum_{a_3=\frac{s}{s-r}}^{|D_3|-1} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある．

**Case 3-2:** $a_4 < r/(s-r)$ のとき．

$a_3 \leq a_4$ ならば $i$ が加わることで費用が $s$ 増加する．これらの場合は，

$$\sum_{a_4=0}^{\min\{|D_4|, \lceil \frac{r}{s-r} \rceil -1\}} \sum_{a_3=0}^{a_4} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある．$a_3 \geq a_4+1$ ならば $i$ が加わることで $a_3 > a_4+1$ となり費用は $r$ 増加する．この場合は，

$$\sum_{a_4=0}^{\min\{|D_4|, \lceil \frac{r}{s-r} \rceil -1\}} \sum_{a_3=a_4+1}^{|D_3|-1} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある．また，$a_3 < a_4$ の場合には $i$ が提携に加わる際に先行者がいない場合には施設の開設費用 $r$ が余分に必要になる．この場合は，

$$(n-1)!$$

通りある．

**Case 3-3:** $a_4 > r/(s-r)$ のとき．

$a_3 \leq \lceil s/(s-r) \rceil -1$ ならば $i$ が加わることで $a_3 \leq s/(s-r)$ となり費用は $s$ 増加する．この場合は，

$$\sum_{a_4=\lfloor \frac{r}{s-r} \rfloor +1}^{|D_4|} \sum_{a_3=0}^{\min\{|D_3|-1, \lceil \frac{s}{s-r} \rceil -1\}} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある．$a_3 \geq s/(s-r)$ ならば $i$ が加わることで $a_3 > s/(s-r)$ となり，費用は $r$ 増加する．この場合は，

$$\sum_{a_4=\lfloor \frac{r}{s-r} \rfloor +1}^{|D_4|} \sum_{a_3=\lceil \frac{s}{s-r} \rceil}^{|D_3|-1} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)$$

通りある．

よって，$i \in D_3$ のシャープレイ値 $\phi_i(D, \gamma)$ は，

$$\begin{aligned}
&\phi_i(D, \gamma) = \\
&s \sum_{a_3=0}^{\min\{|D_3|-1, \frac{s}{s-r}-1\}} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\
&+ r \sum_{a_3=\frac{s}{s-r}}^{|D_3|-1} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\
&+ s \sum_{a_4=0}^{\min\{|D_4|, \lceil \frac{r}{s-r} \rceil -1\}} \sum_{a_3=0}^{a_4} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\
&+ r \sum_{a_4=0}^{\min\{|D_4|, \lceil \frac{r}{s-r} \rceil -1\}} \sum_{a_3=a_4+1}^{|D_3|-1} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\
&+ r(n-1)! \\
&+ s \sum_{a_4=\lfloor \frac{r}{s-r} \rfloor +1}^{|D_4|} \sum_{a_3=0}^{\min\{|D_3|-1, \lceil \frac{s}{s-r} \rceil -1\}} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4) \\
&+ r \sum_{a_4=\lfloor \frac{r}{s-r} \rfloor +1}^{|D_4|} \sum_{a_3=\lceil \frac{s}{s-r} \rceil}^{|D_3|-1} comb(n, |D_3|, |D_4|, a_3, a_4)
\end{aligned}$$

となる．

**Case 4:** $i \in D_4$ のシャープレイ値．

$k \in D_1, D_2, D_3$ のシャープレイ値は既知であり，命題 2.1 より対称なプレイヤーどうしのシャープレイ値は等しい．よって，$i \in D_4$ のシャープレイ値は，

$$\phi_i(D,\gamma) = \frac{\gamma(N) - \sum_{k \in D \setminus D_4} \phi_k(D,\gamma)}{|D_4|}$$

で計算できる． □

## 4. おわりに

本稿では，費用が 2 種類に制限された場合の施設配置ゲームの仁とシャープレイ値の計算について議論した．具体的には，費用 2 種類の施設配置問題が NP 困難であることを確認し，費用 2 種類かつ施設 2 個の場合の凸ゲームの特徴づけを行った．この場合には仁が楕円体法を用いて多項式時間で計算できる．そして費用 2 種類かつ施設 2 個の場合にはシャープレイ値が顧客数の多項式時間計算可能であることを示した．

最後に，本研究の今後の課題について述べる．まず，費用 2 種類かつ施設 2 個の場合の凸ゲームの特徴づけを行ったが，これはかなり限定的な場合である．そのため，より多くのインスタンスに対して凸ゲームの特徴づけを行うことが考えられる．次に，費用 2 種類かつ施設 2 個の場合にシャープレイ値の計算が多項式時間で計算可能であることを示したが，仁については未解決である．

### 参考文献

[1] Faigle, U., Kern, W. and Kuipers, J.: On the computation of the nucleolus of a cooperative game, *Internat. J. Game Theory*, Vol. 30, pp. 79–98 (2001).
[2] Garey, M. R. and Johnson, D. S.: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Co. New York, NY, USA (1979).
[3] Goemans, M. X. and Skutella, M.: Cooperative facility location games, *J. Algorithms*, Vol. 50, pp. 194–214 (2004).
[4] Okamoto, Y.: Fair cost allocations under conflicts, *Discrete Optim.*, Vol. 5, pp. 1–18 (2008).
[5] Schmeidler, D.: The Nucleolus of a Characteristic Function Game, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 17, pp. 1163–1170 (1969).
[6] Shapley, L. S.: A Value for n-Person Games, *Annals of Mathematics Studies*, Vol. 28, pp. 305–317 (1953).
[7] Shapley, L. S.: Cores of convex games, *Internat. J. Game Theory*, Vol. 1, pp. 11–26 (1971).
[8] von Neumann, J. and Morgenstern, O.: *Theory of Game and Economic Behavior*, Princeton University Press (1953).
[9] 中山幹夫, 船木由喜彦 and 武藤滋夫: **協力ゲーム理論**, 勁草書房 (2008).

# 正誤表

pp. 1 Abstract

in the size of customers → in the number of customers

pp. 5 図 3

定理 → 命題 3.2