

5入力パラメロンによる4変数以下の論理関数の実現法*

坪井 定一**

1. まえがき

前号に3入力パラメロンによる4変数論理関数の実現方法について述べた⁵⁾。本稿では5入力パラメロンを用いる場合について述べる。4. 以下に詳述する方法によれば、5変数以下のすべての自己双対関数(83種類)を可能な最少段数で実現することができる。これらを利用すれば、4変数以下のすべての論理関数(65536通り)を可能な最少段数で実現する回路を導くことは容易である。

すなわち $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が自己双対でない n 変数論理関数であるとすれば、これを

$$F(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = x_0 f(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee x_0' f^d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(f^d は f の双対関数)

によって $(n+1)$ 変数の自己双対関数 F に変換することができる***。したがって f を最少段数で実現する回路を得るには、まず F を最少段数で実現する回路を作り、しかる後に入力変数 x_0 に対応するパラメロンを定数 1(+) に固定すればよい。

2. T 数

自己双対関数に対して T 数というものを次のようにして定義する。

まず出力 1 を与えるすべての入力ベクトルを選び出して、 $(n+1)$ 個の各変数に現われる 1 の個数 t^1 と 0 の個数 t^0 を数える。そして各変数について

$$t = \max(t^1, t^0) \quad (t^1 + t^0 = 2^n)$$

なる数 t を定義して、その t を大きい順番に並べ代えたもの

$$T \equiv (t_1, t_2, \dots, t_{n+1})$$

をその関数の T 数という。

なお 5 変数のいくつかの自己双対関数に対しては、回路の設計上その関数の parity が必要になることが

ある。5変数自己双対関数の parity とは、出力 1 を与える 16 個の入力ベクトルを 1 の個数が偶数個のもの p_e 個と奇数個のもの p_o 個とに分けたとき、その小さい方の数 p

$$p = \min(p_e, p_o) \quad (p_e + p_o = 16)$$

をいう。このような関数の T 数を

$$T \equiv (t_1, t_2, \dots, t_5; p)$$

と表わす。

3. 回路の表現方法

自己双対関数はかならず定数なしで実現することができる。したがってその回路は、入力パラメロンから出力パラメロンにどのように結合されているかということだけで表現することができる。

そこで第 1 表* に示すような約束をすれば、1 段の回路はただちに $\bigcirc \times$ で表現できる(たとえば第 1 図(a))。回路が 2 段の場合には、1 段目のパラメロンから 2 段目の出力パラメロンへはすべて順結合で結合することに決めておけば、入力パラメロンから 1 段目の各パラメロンへの結合の仕方を示せばよい(たとえば第 1 図(b))。なお 1 段目のあるパラメロンから 2 段目の出力パラメロンへ 2 重結合のある場合で混乱を招く心配のないときには、第 1 図(c) に示したように略記してもよいことにする。

第 1 表 記 号

結合の向き	単結合	2重結合	3重結合
順結合	○	⊙	⊛
逆結合	×	※	※

4. 4変数以下の自己双対関数

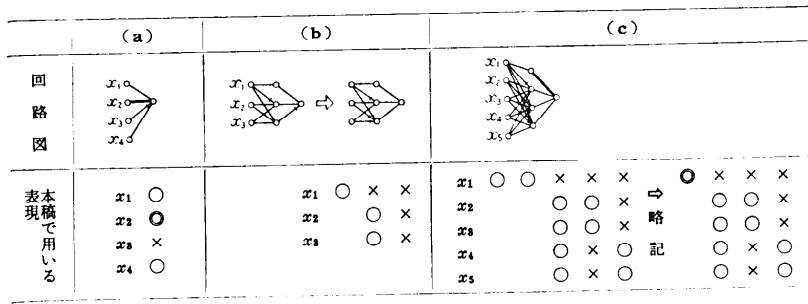
4変数以下の自己双対関数は7種類ある。その T 数を第 2 表に示す。同表の関数(1)は $y=x$ であるが、これを $y(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1$ と見ればその T 数は(8, 4, 4, 4)となる。同様に3変数関数(2)(3)も4変数関数と見れば、その T 数はそれぞれ(6, 6, 6, 4)(4, 4, 4, 4)となる。このようにして7種類ある

* A Logical Design of Circuit Representing Boolean Functions with 4 or less Variables by means of 5 Fan-ins Parametrons, by Teiichi Tsuboi (Yaskawa Electric Mfg. Co., Ltd.)

** 安川電機製作所

*** 以後この操作を“自己双対化する”という。

* 3重結合が実際の回路に現われることはないが、以後の説明に用いるので附記した。



第1図 回路の表現

第2表 4変数以下自己双対関数のT数

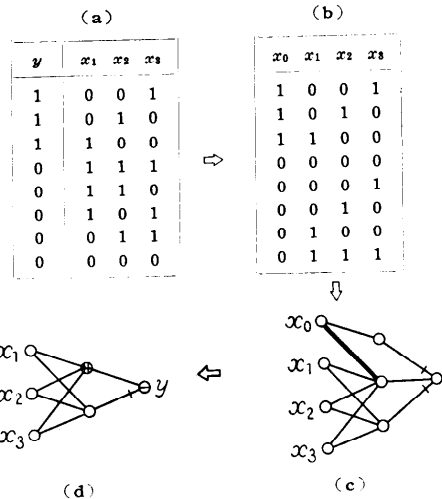
1変数	2変数	3変数	4変数	備考	
(1)	(1)	(2, 1)	(4, 2, 2)	(8, 4, 4, 4)	$y=x$
(2)		(3, 3, 3)	(6, 6, 6, 4)		3入力多数決
(3)		(2, 2, 2)	(4, 4, 4, 4)		3入力 parity
(4)			(7, 5, 5, 5)		
(5)			(6, 6, 4, 4)		
(6)			(6, 4, 4, 4)		
(7)			(5, 5, 5, 5)		

4変数以下の自己双対関数それぞれに対して、7種類のたがいに異ったT数が得られるので、今後上記7種類の関数をいうときにはすべて4変数関数と見てそのT数で呼ぶことにする。たとえば今後(8, 4, 4, 4)といえは、それは関数 $y=x$ のことである。

第2図にこれら7種類の関数の具体的な例と、それらの関数を最少段数で実現する回路を示す。なお以後の説明のために、この7種類の関数を、その実現回路の必要段数によってXグループ(0段または1段)とYグループ(2段)とに分ける。また第2図で、Yグループの関数4種類については、それぞれ2個あるいは3個の回路が用意されているが、これも次節以下の準備のためである。

(例) $y=x_1x_2x_3 \vee x_1'x_2x_3' \vee x_1'x_2'x_3$
 を実現する回路を作ってみよう。

まずこの関数(第3図(a))を自己双対化してみると、出力1を与える入力ベクトルとして第3図(b)に示す8個のベクトルを得る。これは(5, 5, 5, 5)であるが、第2図に示されている(5, 5, 5, 5)のちょうど反転になっている。いまの場合第2図に用意されている三つの回路のうちのどれを利用してもよいから、たとえば一番上の回路を取ればいま必要な(5, 5, 5, 5)は第3図(c)で実現される。ここで x_0 を1(+)に固定すれば y を実現する回路として第3図(d)を得る。



第3図 $y=x_1x_2x_3 \vee x_1'x_2x_3' \vee x_1'x_2'x_3$

なお第2図で、Yグループの関数に対する11個の回路はすべて、出力パラメトロン“強さ”が常に1になるように設計されている。“強さ”とは次のようにして定義される。すなわち $(l+m)$ 入力のパラメトロンが l 個の1と m 個の0とで $1(0)$ に発振している場合、その $1(0)$ は強さ $(l-m)$ であるという。またあるパラメトロン $1(0)$ がつねに“強さ”1である場合、そのパラメトロンを“強さ”1のパラメトロンという。第2図に示した回路でいえば、いかなる入力を与えても1段目の3個のパラメトロンがすべて1あるいはすべて0(“強さ”が3)になることはないということである。第3図(d)の回路についても同様で、出力パラメトロンが“強さ”3の1にはならないことは当然であるが、“強さ”3の0になることも決してないのである。

5. 5変数の自己双対関数——特例

真に5変数の自己双対関数は76種類ある。これら

X グループ

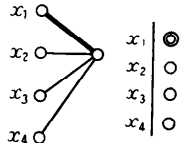
x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
1	0	0	0

(8, 4, 4, 4)

$x_1 \circ$

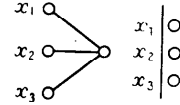
x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1

(7, 5, 5, 5)



x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
0	1	1	0

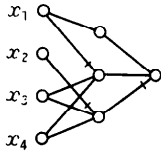
(6, 6, 6, 4)



Y グループ

x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1

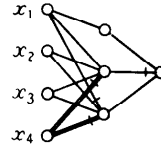
(6, 6, 4, 4)



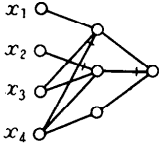
x_1	\circ	\times
x_2		\circ
x_3	\circ	\times
x_4	\circ	\times

x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	0	0

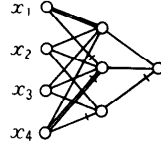
(6, 4, 4, 4)



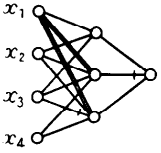
x_1	\circ	\times	\times
x_2		\times	\circ
x_3		\times	\circ
x_4		\odot	\times



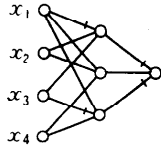
x_1	\circ
x_2	
x_3	\circ
x_4	\times



x_1	\odot	\times
x_2	\circ	\circ
x_3	\circ	\circ
x_4	\circ	\times



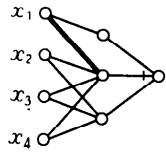
x_1	\circ	\times	\odot
x_2	\circ	\times	\circ
x_3	\circ	\times	\times
x_4		\times	\circ



x_1	\circ	\circ	\times
x_2	\times	\circ	
x_3	\times		\circ
x_4			\circ

x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1

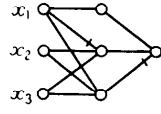
(5, 5, 5, 5)



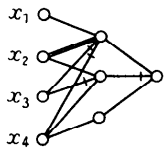
x_1	\circ	\times
x_2		\times
x_3		\times
x_4		\times

x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	1	1
1	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	1	0

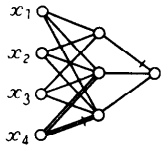
(4, 4, 4, 4)



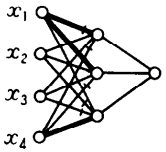
x_1	\circ	\times	\times
x_2		\circ	\times
x_3		\circ	\times



x_1	\circ
x_2	\odot
x_3	\times
x_4	\times



x_1	\times	\circ	\circ
x_2	\times	\circ	\circ
x_3	\times	\circ	\circ
x_4		\odot	\times



x_1	\times	\odot	\circ
x_2	\circ	\circ	\times
x_3	\circ	\circ	\times
x_4	\times	\times	\odot

第2図 4変数以下の自己双対関数とその実現回路

T 数	11,11,11,11,11	8, 8, 8, 8, 8;0	9, 9, 9, 9, 9;1	9, 9, 9, 9, 9;3	10, 8, 8, 8, 8;2	10,10,10, 8, 8;2	11, 9, 9, 9, 9;3
出力を 1 とする入力ベクトル	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1
	1 1 1 1 0	1 1 1 0 0	1 1 1 1 0	1 1 1 1 0	1 1 1 1 0	1 1 1 1 0	1 1 1 1 0
	1 1 1 0 1	1 1 0 1 0	1 1 1 0 1	1 1 1 0 1	1 1 1 0 1	1 1 1 0 1	1 1 1 0 1
	1 1 0 1 1	1 0 1 1 0	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1
	1 0 1 1 1	0 1 1 1 0	1 0 1 1 1	1 0 1 1 1	1 0 1 1 1	1 0 1 1 1	1 0 1 1 1
	0 1 1 1 1	1 1 0 0 1	0 1 1 1 1	0 1 1 1 1	1 1 0 0 0	0 1 1 1 1	0 1 1 1 1
	1 1 1 0 0	1 0 1 0 1	1 1 0 0 0	1 1 0 0 1	1 0 1 0 0	1 1 1 0 0	1 1 1 0 0
	1 1 0 1 0	0 1 1 0 1	1 0 1 0 0	1 0 1 0 1	1 0 0 1 0	1 1 0 0 0	1 1 0 0 0
	1 0 1 1 0	1 0 0 1 1	1 0 0 1 0	0 1 1 0 1	1 0 0 0 1	1 0 1 0 0	1 1 0 0 0
	0 1 1 1 0	0 1 0 1 1	1 0 0 0 1	1 0 0 1 1	0 1 1 0 0	1 0 0 1 0	1 0 1 0 0
	1 1 0 0 1	0 0 1 1 1	0 1 1 0 0	0 1 0 1 1	0 1 0 1 0	1 0 0 0 1	1 0 0 1 0
	1 0 1 0 1	1 0 0 0 0	0 1 0 1 0	0 0 1 1 1	0 1 0 0 1	0 1 1 0 0	1 0 0 0 1
	0 1 1 0 1	0 1 0 0 0	0 1 0 0 1	0 0 0 1 1	0 0 1 1 0	0 1 0 1 0	0 1 0 1 0
	1 0 0 1 1	0 0 1 0 0	0 0 1 1 0	1 0 0 0 0	0 0 1 0 1	0 1 0 0 1	0 1 0 0 1
	0 1 0 1 1	0 0 0 1 0	0 0 1 0 1	0 1 0 0 0	0 0 0 1 1	0 0 1 1 0	0 0 1 1 0
	0 0 1 1 1	0 0 0 0 1	0 0 0 1 1	0 0 1 0 0	1 0 0 0 0	0 0 1 0 1	0 0 1 0 1
回		×	×○○○○	○○○××	○	×××	○
路	○○○○○	○××××	○○×○○	××××○	×○○○○	○○○×○	×××○○
	○○○○○	○○○○×	○○○○×	○○○●○	×××××	○○○○×	×○○××
		○××○○	○○○○×	○○○○×			

第 4 図

の関数を実現する回路を第 2 図に示したようにして用意することはできるが、それを利用するのはややめんどうである。一番具合の悪いのは、5 変数の T 数が 47 通りしかなく、数種類の関数が同じ T 数を示すことが生じてしまうのである。したがって、いま必要としている回路が、用意されている 76 種類の回路のうちの一どれなのかということを探るのが相当大変であろうと想像される。

そこでこう考えていけばかならず回路図が導き得るという公式を作る方が便利であろうとの考えから、以下にその公式を説明する。ただしその一般公式をあてはめることのできない関数が 6 種類、一般公式をあてはめると最少段数の条件を満足しなくなる関数が 1 種類ある。この 7 種類の関数については第 2 図と同様に、関数の一例とその実現回路とを第 4 図に示す。なお、これら 7 種類の関数と等しい T 数を示す関数は他には存在しないので、第 4 図に示した T 数以外の T 数を示す残りの 69 種類の関数については、すべて次節以下に述べる一般公式が適用できる。

6. 5 変数の自己双対関数——A-X 合成法

$$y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

を実現する回路の作り方を例にとりながら一般公式を説明することにしよう。

まず y を自己双対化したのち、出力 1 を与える 16

第 3 表

	$x_0 = x_1$	$x_0 \neq x_1$
	$x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4$	$x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4$
(a)	1 1 1 1 1	0 1 1 1 1
	0 1 1 1 1	0 1 1 1 0
	0 1 1 1 0	0 1 1 0 1
	0 1 1 0 1	0 1 0 1 1
	0 1 0 1 1	0 1 1 0 0
	0 0 1 1 1	0 1 0 1 0
	0 1 1 0 0	0 1 0 0 1
	0 1 0 1 0	0 0 0 0 1
	0 1 0 0 1	
	0 0 1 1 0	
	0 0 1 0 1	
	0 0 0 1 1	
	0 1 0 0 0	
	0 0 1 0 0	
	0 0 0 1 0	
	0 0 0 0 1	
(15, 9, 9, 9, 9)	(7, 7, 5, 5, 5)	(8, 8, 4, 4, 4)

個の入力ベクトルを書き並べる。いまの例では第 3 表 (a) を得、(15, 9, 9, 9, 9) を作ればよいということがわかる。つぎに五つの入力変数 (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) のうちから適当な二つの変数 x_u と x_v とを選んで、いま書き並べた 16 個の入力ベクトルを

$$\begin{cases} x_u = x_v \text{ なるもの} \\ x_u \neq x_v \text{ なるもの} \end{cases}$$

とに分ける。

いまの例で (x_u, x_v) として (x_0, x_1) を選ぶとそれぞれ第3表 (b), (c) のようになって、一方は $(\overline{7}, \overline{7}, 5, 5, 5)$ 他方は $(\overline{8}, \overline{8}, 4, 4, 4)$ となる。この場合に x_u と x_v とにスラーを掛けて他の変数から区別する。なお、このようにして16個の入力ベクトルを二つに分けた結果は必ず8個・8個になるが、その各8個を $x_u(x_v)$ を除いた残りの4変数の論理関数と見做せばその関数は4変数以下の自己双対関数である(証明略)。

さて、このようにして得た二つの関数のうち少なくとも一方が第5図に示した7種類の関数になれば*, そのもとの関数を実現する回路は直ちに得られるのである。言葉を換えていえば、 $x_u = x_v$ と $x_u \neq x_v$ とに分けた少なくとも一方が第5図に示した7種類の関数のどれかになるような二つの入力変数の組 (x_u, x_v) が見つければよいということである。そうして前節5に示した関数を除く69種類の関数については、そのどれをとってもこのような (x_u, x_v) を見つけること

Aグループ

$(\overline{8}, \overline{8}, 4, 4, 4)$	$(\overline{4}, \overline{4}, 4, 4, 8)$	$(\overline{6}, \overline{6}, 6, 6, 4)$
1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 1
1 1 1 1 0	1 1 1 0 1	1 1 1 1 0
1 1 1 0 1	1 1 0 1 1	1 1 1 0 1
1 1 0 1 1	0 0 1 1 1	1 1 1 0 0
1 1 1 0 0	1 1 0 0 1	1 1 0 1 1
1 1 0 1 0	0 0 1 0 1	1 1 0 1 0
1 1 0 0 1	0 0 0 1 1	0 0 1 1 1
1 1 0 0 0	0 0 0 0 1	0 0 1 1 0
○	○ × ○	○ × ○ ○ ○
○	× ○ ○	× × ○ ○ ○

Bグループ

$(\overline{7}, \overline{7}, 5, 5, 5)$	$(\overline{6}, \overline{6}, 4, 4, 4)$	$(\overline{6}, \overline{6}, 4, 4, 4)$	$(\overline{4}, \overline{4}, 4, 4, 4)$
1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1 1 0	1 1 1 1 1
1 1 1 1 0	1 1 1 0 0	1 1 1 0 1	1 1 1 1 0
1 1 1 0 1	1 1 0 1 1	1 1 0 1 1	1 1 1 0 0 1
1 1 0 1 1	1 1 0 0 0	1 1 1 0 0	1 1 0 0 0
1 1 1 0 0	1 0 1 1 1	1 1 0 1 0	0 0 1 0 1
1 1 0 1 0	1 0 0 0 0	1 1 0 0 1	0 0 1 0 0
1 1 0 0 1	0 1 1 0 0	0 0 1 1 1	0 0 0 1 1
0 0 1 1 1	0 1 0 1 1	0 0 0 0 0	0 0 0 1 0
○ ○ ○ ○ ○	○ × ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ×
○ × × × ×	○ × × × ×	○ ○ × × ×	○ ○ × ○
○ × ○ ○ ○	○ ○ ○ × ×	× × × × ×	× × × ×
× ○ ○ ○ ○	○ × × × ×	× ○ ○ × ×	× ○ ○ ○

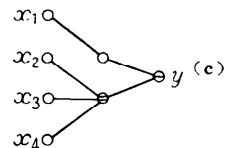
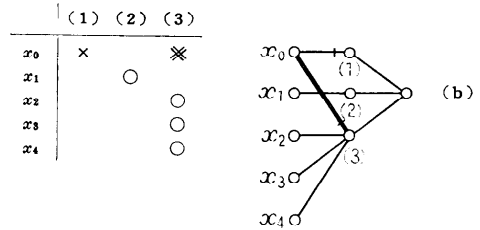
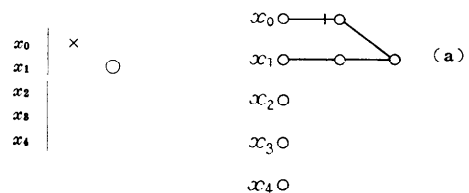
第5図

* 変数の置換, 変数の否定を適当に施して等しくすることができれば。

ができるのである。

具体的にいまの例でやってみると以下のようになる。この例は特別で $x_0 = x_1$ の $(\overline{7}, \overline{7}, 5, 5, 5)$ も $x_0 \neq x_1$ の $(\overline{8}, \overline{8}, 4, 4, 4)$ も両方とも第5図に載っている。そのどちらに着目しても $(15, 9, 9, 9, 9)$ の回路を導くことはできるが、最初に $(\overline{8}, \overline{8}, 4, 4, 4)$ に着目した場合について説明する。 $(\overline{7}, \overline{7}, 5, 5, 5)$ に着目した場合については次節7で説明することにする。

さて、第3表 (c) の $(\overline{8}, \overline{8}, 4, 4, 4)$ と第5図に示した $(\overline{8}, \overline{8}, 4, 4, 4)$ とを比較してみれば、いま必要な回路として第6図 (a) を得る。この回路の性質は



第6図 $y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 (1)$

$x_0 = x_1$ なる入力に対しては“強さ”が0になり、 $x_0 \neq x_1$ なる入力に対しては“強さ”2で当該関数を得るようなものである。第5図のAグループ3種類の回路はすべてこのような性質

- (1) $x_u = x_v$ なる入力に対しては“強さ”2で当該関数を実現する。
- (2) $x_u \neq x_v$ なる入力に対しては“強さ”0となる。

を備えるように設計されている。

さて話を元に戻して、いま得た回路——第6図(b)の(1)(2)——に $x_0=x_1$ の(7, 5, 5, 5)——第6図(b)の(3)——を追加して第6図(b)に示すような回路を作れば、これがいま必要としている(15, 9, 9, 9, 9)の回路である。なぜならば $x_0 \neq x_1$ なる入力に対しては同図の(1)と(2)とで“強さ”2の(8, 4, 4, 4)を作っているから(3)でその出力が影響されることはない。また $x_0=x_1$ なる入力に対しては(1)と(2)とは打ち消されるから(3)がそのまま出力になるからである。このようにして(15, 9, 9, 9, 9)の回路ができたから、ここで x_0 を1(+)に固定して y を実現する回路として第6図(c)を得る。

なおこのように第5図Aグループの回路と、第2図Xグループの回路とを利用して5変数自己双対関数の回路を作る方法をA-X合成法という。またA-X合成法ができるように、5変数自己双対関数を関数Aと関数Xとに分けることを、5変数自己双対関数をA-X分割するという。なお第3表に示した分割は見方を変えればB-X分割とも見ることができるが、それについては次節で述べる。

7. 5変数の自己双対関数——B-X合成法

ふたたび前節で扱った例を取り上げるが、今度は第3表の(b)が第5図に載っていることに着目して回路を作る方法を説明する。このように第5図Bグループ(第3表(b))の回路と、第2図Xグループ(第3表(c))の回路とを利用して回路を作ることをB-X合成法という。なおこの例(15, 9, 9, 9, 9)ではA-X合成法、B-X合成法いずれの方法でもその回路を導くことができるが、このように一つの関数が前記二方法およびこれから述べるA-Y・B-Y合成法の全部で四つあるうちの二つ以上の方法が適用可能なことは往々にして起こる。このような場合にそのどの方法を採用かは任意であるが、ある方法によれば1段目のパラメロンが3個で済むのに別の方法によると5個必要となるというようなこともあるからその点留意されたい。

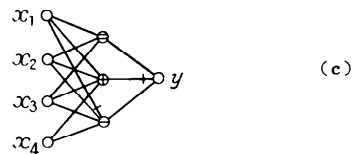
さて第5図Bグループのところには4種類の関数およびその回路が用意されている。これらはすべて次の性質を満足するように設計されている。

- (1) $x_u=x_v$ なる入力に対しては“強さ”3または4で当該関数を実現する。
- (2) $x_u \neq x_v$ なる入力に対しては“強さ”0となる。

そこで前節の場合と同様に考えて、第5図に示されている(7, 7, 5, 5, 5)の回路から第7図(a)の(1)(2)(3)(4)を得、一方第2図の(8, 4, 4, 4)から(5)を得、この両者を合わせて(15, 9, 9, 9, 9)の回路として第7図(a)を得る。

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
x_0	x	x	※	○		(a)
x_1	x	x	○	※	○	
x_2	○	x	○	○		
x_3	○	x	○			
x_4	○	x		○		

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
x_0	x	x	※	○	x	(b)
x_1	x	x	○	※	○	
x_2	○	x	○	○	x	
x_3	○	x	○			
x_4	○	x		○	x	



第7図 $y=x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ (2)

ここで最後に加えた(5)を考えてみると、このパラメロンは $x_0 \neq x_1$ のときに(8, 4, 4, 4)を実現しさえすればよいのであって、 $x_0=x_1$ のときにはどうなってもよいのである。したがって第7図(a)の(5)を(b)の(5)のように変えても回路の働きは変化しないはずである。このような変形を(4)と(5)とがちょうど打ち消し合って、1段目が(1)(2)(3)の3個で済む。このようにしてから x_0 を1(+)に固定すれば

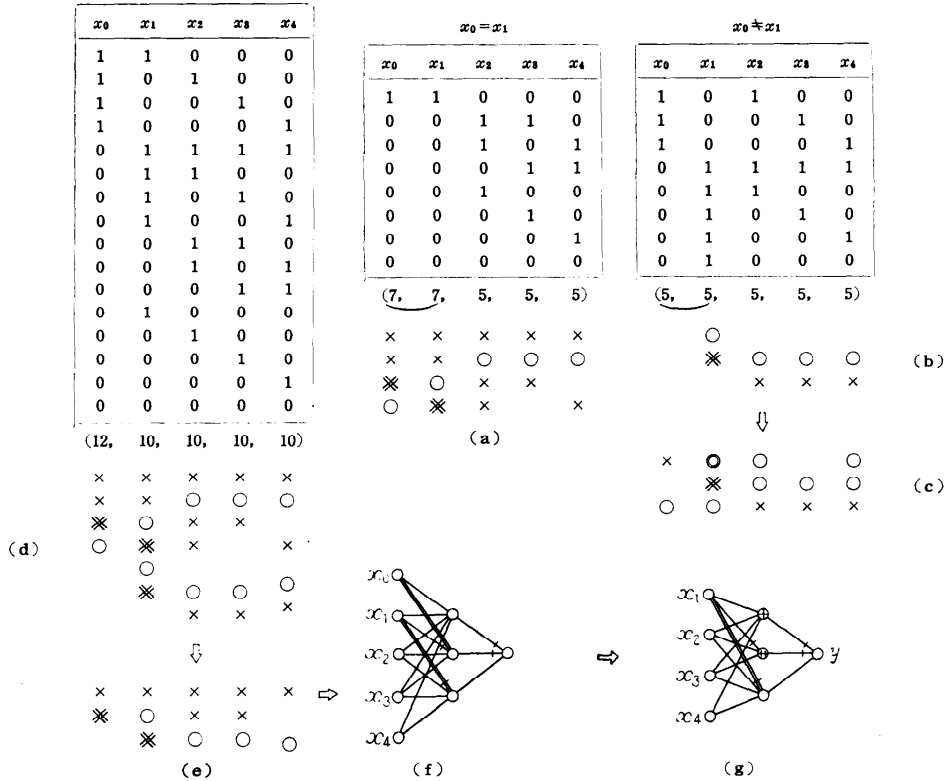
$$y=x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

を実現する回路として第7図(c)を得る。

このようにして1段目のパラメロンの個数を減らすということは、この例では大して問題ではないが、次節8に述べるB-Y合成法の場合には非常に重要である。

8. 5変数の自己双対関数——B-Y合成法

第5図Bグループの回路と、第2図Yグループの回路とを利用して回路を作ることをB-Y合成法という。この場合一般にはYで3個、Bで4個、合計7個のパラメロンが1段目に必要になるので、2段目の出力



第8図 $y = x_1 x_2' x_3' x_4' \vee x_1' x_2 x_3' x_4' \vee x_1' x_2' x_3 x_4' \vee x_1' x_2' x_3' x_4$

パラメトロンが7入力になってしまう。しかし前節で示したようにして、Yの3個のうちのある1個とBの4個のうちのある1個とがちょうど打ち消し合うようにすることができれば、出力パラメトロンを5入力にすることができる。第5図の回路および第2図の回路はいかなるときでも必ずこの条件を満たすように設計されているのである*。

以下

$$y = x_1 x_2' x_3' x_4' \vee x_1' x_2 x_3' x_4' \vee x_1' x_2' x_3 x_4' \vee x_1' x_2' x_3' x_4$$

を例にとってその回路の作り方を説明する。第8図はその説明図である。

まずyを自己双対化したのち、 (x_u, x_v) として (x_0, x_1) を選んで二つの関数に分割する。そうしてそれぞれの回路を第5図・第2図を参照して第8図(a)(b)のように書いてみる。この二つの回路を単純に合わせると(d)の回路が得られるが、これでは出力パラメトロンが7入力になってしまう。そこで1段目のパラメ

トロンを減らすべく、(b)の回路を(c)のように変形する。この変形に際して注意すべきことは以下に示す3項目ある。

- (1) 3個のうち少なくとも1個は、第5図から得た回路と合わせたときに打ち消されるようにすること。
- (2) $x_u \neq (=) x_v$ なる入力に対しては、変形の前後でその動作が変化しないようにすること。
- (3) $x_u = (\neq) x_v$ なるいかなる入力が入って来ても、出力の“強さ”が1になるようにすること。

具体的に第8図の例で示すと、(b)の回路を(c)のごとく変形する。この変形が上記3条件の(1)を満足していることは明らかである。つぎに(2)であるが、 $x_0 \neq x_1$ なる入力に対しては第8図(c)の回路は第9図(a)のように書くことができるから、その動作は変形の前後で変化していない。また(3)を調べてみると、 $x_0 = x_1$ なる入力に対しては第8図(c)の回路は第9図(b)のように書くことができるから、いかなる入力に対しても“強さ”は1である。

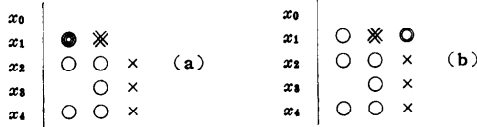
* 第10図参照。

さてこのように変形してから(7, 7, 5, 5, 5)の回路——第8図(a)——と合わせれば、いま必要な(12, 10, 10, 10, 10)の回路として第8図(e)あるいは(f)を得る。なお、この場合にはたまたま二組消去できたので、1段目の7個が3個になったのである。こ

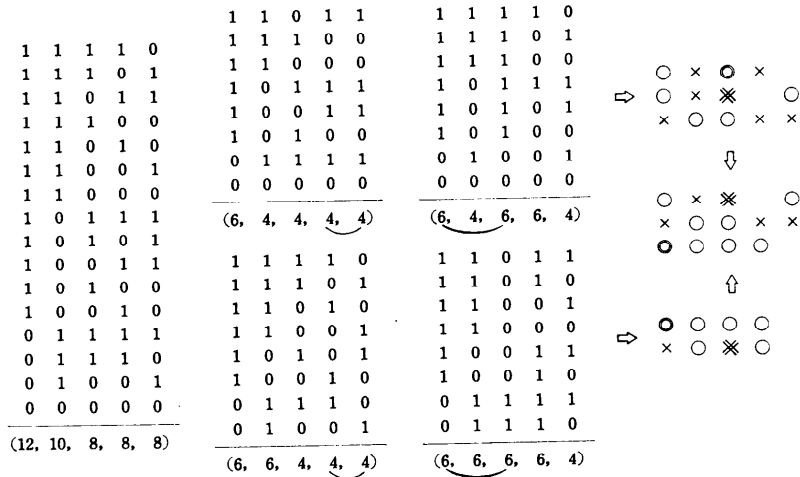
こで x_0 を1(+)に固定すれば y を実現する回路として(g)が得られる。

以上 B-Y 合成法を説明したが例外が二つある。それは (x_u, x_v) で二つの関数に分割したときには B-Y 合成法が可能のように見えるが、第2図に用意されている回路のどれを採っても、そうしてどう変形しても1段目のパラメترونの個数7個を減らすことのできないものである。その例外を第10図に示すが、 (x_u, x_v) の選び方によって、その一方は A-Y 分割が、また他方は B-X 分割が可能である。

ともかく B-Y 分割するとその合成がややめんどう



第9図



与えられた関数	B-Y 合成不能	A-Y 分割	
		B-X 分割	
1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 (12, 10, 8, 8, 8)	1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 (6, 4, 4, 4, 4)	1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 (6, 4, 6, 6, 4)	(Diagram showing decomposition of the first function into A-Y and B-X partitions)
1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 (10, 8, 8, 8, 8)	1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 (6, 6, 4, 4, 4)	1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 (4, 4, 4, 6, 6)	(Diagram showing decomposition of the second function into A-Y and B-X partitions)
1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 (4, 6, 4, 4, 4)	1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 (6, 4, 4, 6, 6)	1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 (6, 4, 4, 6, 6)	(Diagram showing decomposition of the third function into A-Y and B-X partitions)

第10図

になることは避けられないから、なるべくならそれ以外の $A-X \cdot A-Y \cdot B-X$ 合成法によることにし、それらがどうしても見つからない場合に限って $B-Y$ 合成法を採るということにすれば、この例外は問題にならない。

なお $A-Y$ 合成法についてはその説明を省いたが、考え方は他の合成法とまったく同様である。

9. むすび

以上で4変数以下のすべての論理関数を5入力パラメトロンによって実現する方法が明らかになった。これらが最少段数であるということは一々断らなかったが、0段あるいは1段で実現できる関数をまず網羅

し、それ以外の関数はすべて2段で実現できることを示したのである。

参考文献

- 1) 戸田 巖：自己双対論理関数の型の個数について、情報処理，2，1，p. 17 (1961)
- 2) 高橋秀俊：計算機械，岩波講座，現代応用数学，B 14-a II，岩波書店，東京 (1958)
- 3) 喜安善市：デジタル回路の数学，現代エレクトロニクス選書 34，共立出版，東京 (1961)
- 4) E. Goto: Threshold, Majority and Bilateral Switching Devices, MIT, 1961-2, 講義録
- 5) 坪井定一：3入力パラメトロンによる4変数論理関数の実現法，情報処理，4,3，p. 134(1963)
(昭和38年8月1日受付)