プログラムのページ

担当　森　口　繁　一

6308. 偏微分方程式の前進型解法

三浦　大亮（東洋レーヨン）

次のような抛物型偏微分方程式を解くことを例として前進型の解法によるプログラムを示す．

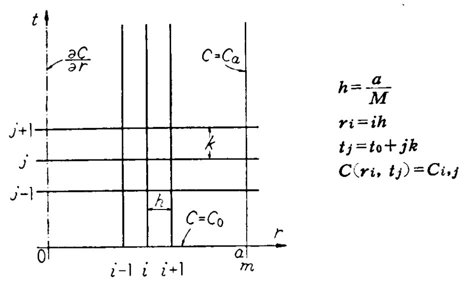
$$\frac{\partial C}{\partial t}=K\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right) \qquad (1)$$

初期/境界条件　$t=t_0,\ C(r,\ t_0)=C_0$　　（2）

$r=a,\ C(a,\ t)=C_a$　　（3）

$r=0,\ \dfrac{\partial C}{\partial r}=0$　　（4）

問題の物理的性質は，円柱型の物体の熱伝導または，拡散を表現したものである．したがって軸対称であるから，積分領域を次のようにすることができる．



第1図

解法

（1）式を次のような差分方程式になおす．

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{C_{i,j+1}-C_{i,j}}{k} \qquad (5)$$

$$K\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right)=K \times\left(\frac{C_{i+1,j}-2C_{i,j}+C_{i-1,j}}{h^2}+\frac{1}{ih}\frac{C_{i+1,j}-C_{i-1,j}}{2h}\right) \qquad (6)$$

これを整理して（1）を計算しやすい形に直すと

$$C_{i,j+1}=\beta\left(1+\frac{1}{2i}\right)C_{i+1,j}-\beta\left(2-\frac{1}{\beta}\right)C_{i,j} +\beta\left(1-\frac{1}{2i}\right)C_{i-1,j} \qquad (7)$$

ただし，　$\beta\equiv\dfrac{Kk}{h^2}=\dfrac{1}{6}$

$$\left.\begin{array}{l} t=t_0 \text{ で } C_{i,0}=C_0\ (i=0,1,2,\cdots,m) \\ r=a \text{ で } C_{m,j}=C_a\ (j=1,2,\cdots\cdots) \\ r=0 \text{ で } C_{0,j+1}=C_{0,j}+4\beta(C_{1,j}-C_{0,j}) \end{array}\right\} \quad (8)$$

のようになる．

（7）によれば，初期条件と境界条件から j について1ステップづつ任意の所まで1点づつ積分を進めて，各格子点での $C_{i,j}$ の値を計算していくことができる．

＜前進型のプログラム＞

```
begin real T, To, TT, K, H, KK, A, MF, IIF,
          Co, CA;
   integer M, I, J;
  real array C[0:20, 0:5], S1, S2[1:20];
   READ CARD (M, To, T, K, A, Co, CA);
   WRITE PRINTER ('△△△K:=', K,
     '△△△A:=', A);
   MF:=M; H:=A/MF;
     KK:=1.0/6.0 *H↑2/K;
   comment BETA EQUALS 1/6;
  INITIALIZATION: comment DEFINED BY
    YOUR PROBLEM;
   for I:=1 step 1 until M do
     begin IIF:=I;
       S1[I]:=(1.0+1.0/(2.0*IIF))*0.16666667;
       S2[I]:=(1.0-1.0/(2.0*IIF))*0.16666667
     end;
  BOUNDARY:
   for I:=0 step 1 until M do C[I, 0]:=Co;
   for I:=1 step 1 until 5 do C[M, I]:=CA;
   J:=0;
  MAIN:
   for TT:=To+KK step KK until T do
   begin
   for I:=M-1 step -1 until 1 do
     C[I, J+1]:=S1[I]*C[I+1, J]+0.66666667*
       C[I, J]+S2[I]*C[I-1, J];
     C[0, J+1]:=C[0, J]+0.66666667*(C[1, J]
       -C[0, J]);
```

```
    if J<4 then begin J:=J+1; go to
      LOOP 1 end;
OUTPUT: WRITE PRINTER (,, '△△△T:=',
            TT-5.0*KK, TT-4.0*KK,
            TT-3.0* KK, TT-2.0*KK,
            TT-KK);
    J:=0;
    for I:=0 step 1 until M do
      begin
        WRITE PRINTER (I, C[I, o], C[I, 1],
          C[I, 2], C[I, 3], C[I, 4)];
        C[I, 0]:=C[I, 5]
      end;
    ADVANCE PRINTER (0);
LOOP 1: end MAIN END;
          WRITE PRINTER (,,'△△△T:='),
            TT-5.0*KK,
            TT-4.0*KK, TT-3.0*KK,
            TT-2.0*KK, TT-KK);
          for I:=0 step 1 until M do
            begin switch SW:=P 0, P 1, P 2,
                            P 3, P 4;
  go to SW[J+1];
    P 0: WRITE PRINTER (I, C[I, 0]);
    P 1: WRITE PRINTER (I, C[I, 0], C[I, 1]);
    P 2: WRITE PRINTER (I, C[I, 0], C[I, 1],
      C[I, 2]);
    P 3: WRITE PRINTER (I, C[I, 0], C[I, 1],
      C[I, 2], C[I, 3]);
    P 4: WRITE PRINTER (I, C[I, 0], C[I, 1],
      C[I, 2], C[I, 3], C[I, 4])
      end
    end
```

注 identifier の説明および数値例については，次のプログラムのあとの記述を参照のこと．

6309. 偏微分方程式の Crank-Nicolson 解法

三浦　大亮（東洋レーヨン）

問題は前に同じ．

Crank-Nicolson の方法

（1）式を次のような形の差分方程式に直すことができる．

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{C_{i,j+1}-C_{i,j}}{k} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}
&K\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right)\\
&=\frac{K}{2}\left(\frac{C_{i+1,j+1}-2C_{i,j+1}+C_{i-1,j+1}}{h^2}\right.\\
&\quad+\frac{1}{ih}\,\frac{C_{i+1,j+1}-C_{i-1,j+1}}{2h}\\
&\quad+\frac{C_{i+1,j}-2C_{i,j}+C_{i-1,j}}{h^2}\\
&\quad\left.+\frac{1}{ih}\,\frac{C_{i+1,j}-C_{i-1,j}}{2h}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

これから（7）に相当するものを導くと

$$\left.\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{2i}\right)C_{i+1,j+1}-2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)C_{i,j+1}\\
&\quad+\left(1-\frac{1}{2i}\right)C_{i-1,j+1}\\
&\quad=-\left(1+\frac{1}{2i}\right)C_{i+1,j}\\
&\quad+2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)C_{i,j}-\left(1-\frac{1}{2i}\right)C_{i-1,j}
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

境界条件，初期条件は（8）と同じである．ただしこの場合には，前進型の場合より，やや精度は低くなるが $\beta\equiv\frac{Kh}{k^2}$ に対する制限はない．また $r=0$ では次の式を用いる．

$$r=0\ \text{で}\quad 4C_{1,j+1}-2\left(2+\frac{1}{\beta}\right)C_{0,j+1}$$
$$=-4C_{1,j}+2\left(2-\frac{1}{\beta}\right)C_{0,j} \tag{12}$$

（11）および（12）には，左辺の未知数として現われるものが，三つまたは，二つであるために，（7）のように初期値から1点づつ計算していくことができないで，$j+1$ の線上の各点の値 $C_{i,j+1}$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, m-1$) についての連立方程式を解きながらステップを進める．

（11）と（12）によって表わされる連立方程式はステップごとに $m-1$ 元のものであるが，この係数行列は tridiagonal form となることを利用して解くことができる．

すなわち

$$\begin{aligned}
&B_0=-2\left(2+\frac{1}{\beta}\right),\quad C_0=4,\\
&D_0=-4C_{1,j}+2\left(2-\frac{1}{\beta}\right)C_{0,j}\\
&A_i=\left(1-\frac{1}{2i}\right),\quad B_i=-2\left(1+\frac{1}{\beta}\right),\\
&C_i=\left(1+\frac{1}{2i}\right),\\
&D_i=-\left(1+\frac{1}{2i}\right)C_{i+1,j}
\end{aligned}$$