

Gauss の数値積分公式の分点と重率の決定*

山下 真 一 郎**

1. 緒 論

定積分の数値積分法には、多くの方法があるが、それらのほとんどは平均値法によるものである。すなわち、(1)式のように、左辺の定積分を右辺で近似しようというものである。

$$\int_a^b w(x)f(x) dx \doteq \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) \quad (1)$$

ここに $w(x)$ は重率関数である。

数値積分公式の精度(近似度)は、被積分関数 $f(x)$ が、 r 次以下の多項式の場合に、常に正確に(1)式の左辺と右辺が等しく、 $(r+1)$ 次の多項式の場合に始めて異なるとき、 r であるという。任意の相異なる N 個の点を通るような多項式は、たかだか $(N-1)$ 次式であるから、数値積分公式の精度は、公式の取り得る自由度を P とすれば、 $(P-1)$ である。

平均値法による数値積分公式の自由に取り得るパラメータは $n, x_i, W_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ であって、これらを固定することにより、異なった積分公式が得られる。 n が固定されたとき、主な公式は次の四つの型に分けられる。

- I. x_i を固定し、 W_i を積分精度を上げるように選ぶ。精度は $(n-1)$ である。
- II. x_i, W_i ともに積分精度を上げるように選ぶ。精度は $(2n-1)$ である。
- III. x_i の何点かを固定して、残りの全てを積分精度を上げるように選ぶ。
- IV. W_i を固定して、 x_i を積分精度を上げるように選ぶ。

2. Gauss の数値積分公式

Gauss の数値積分公式は II の型であり、(1) 式の重率関数 $w(x)$ を種々に選ぶことにより、種々の公式があるが、通常、(1) 式において、 $a=-1, b=+1, w(x)=1$ 、の場合をいう。これはまた、Legendre の多項式に関係があるので、Legendre-Gauss の積分

公式とも呼ばれる。

Legendre-Gauss の積分公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) + E \quad (2)$$

における分点 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ は n 次の Legendre 多項式 $P_n(x)$ の 0 点で与えられ、重率 W_i 、誤差 E は、

$$W_i = \frac{2(1-x_i^2)}{[nP_{n-1}(x_i)]^2} \quad (3)$$

$$E = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} \cdot f^{(2n)}(\xi) \quad (\text{ここに } |\xi| < 1) \quad (4)$$

で与えられる。

3. Legendre 多項式の 0 点の計算

Gauss の積分公式の作成のおもな仕事は、Legendre 多項式 $P_n(x)$ の 0 点の計算である。

$P_n(\cos \theta)$ の n が大きいときの漸近式は、 $n \geq 1, 0 < \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$ において、

$$P_n(\cos \theta) \approx \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \theta}} \cdot \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right] \quad (5)$$

で与えられるから、 $P_n(x)$ の 0 点は、だいたい、(5) 式の 0 点、

$$\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right] = 0 \quad (6)$$

すなわち、

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} = k\pi \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

で与えられる。これから、 $P_n(x)$ の 0 点は、 $x = \cos \theta$ として、

$$x_k = \cos \left(\frac{k-1/4}{n+1/2} \pi \right) \quad (8)$$

$$= \sin \left(\frac{n+1-2k}{2n+1} \pi \right)$$

$$k=1, 2, \dots, n$$

と求められる。(8) 式の近似根は、きわめて良い結果を与える。 $n=10$ 程度で 3 桁ぐらい正確である。この近似根を補正するには、Newton 法を用いる。関数値 $P_n(x)$ の計算には、漸化式

$$P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x$$

$$(r+1)P_{r+1}(x) - (2r+1)xP_r(x) + rP_{r-1}(x) = 0$$

* Computation of the Abscissas and Weight Coefficients for the Gaussian Quadrature Formulae, by Shin-ichiro Yama shita (FACOM Computing and Data Processing Center)

** ファコム株式会社

$$r=1, 2, \dots, n-1 \quad (9)$$

から, $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$ の多項式の係数を求めておき, $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$ の値を求める. 微係数 $P_n(x)'$ は

$$(1-x^2)P_n(x)' = n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)] \quad (10)$$

から求めた. $n=30$ 程度では, 45 桁の計算で, 4 回か 5 回で収束するようである.

4. プログラムおよび結果

この計算は, 1962年9月 FACOM-222 にて, 多重精度のサブルーチンを作成し, 小田尚子, 大森義和両氏(当時有隣電機)の協力を得て計算したのであったが, このたび FACOM-231 で, のちに示す ALGOL プログラムにて再計算したものである.

プログラムは, あまり良いできとはいえないが, 使用したそのままを掲げた. FACOM-231 ALGOL については, 別の機会に発表する予定であるが, 計算桁数を任意に指定できる. それは最初の `begin` の次の `comment` で, `reallength:=45`, `integerlength:=40`; などのように指定する. これは, いずれも mantissa の長さである. また Boolean は 1 桁である.

`procedure` の CRLF は standard procedure であるが, プログラムを積み重ねて作成したために, 改行を `count` するようにあらためて宣言した.

`procedure PR`, `PRint` などは結果を表のように印刷するためのもで, FACOM-231 ALGOL の standard procedure 群からは, これ以外に良い方法を思いつかなかった.

`procedure P` は漸化式で多項式の係数を求めるものである. チェビシエフの多項式の場合には, $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$, $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$ であるから $P(2, -1, n+1, A, B)$ とすれば, A に T_{n-1} の係数, B に T_n の係数が入っているとき, A に T_n , B に T_{n+1} の係数が入る.

すなわち, $P_{n+1}(x) = (\alpha x P_n(x) + \beta P_{n-1}(x)) / \gamma$ (α, β, γ は整数) の型の漸化式のための計算式である.

`procedure Function` は偶または奇多項式の関数値を求めるためのものである.

結果の check は $\sum_{i=1}^n W_i = 2$ となることを利用する. 印刷された結果を手計算でチェックしたが, 誤差は末桁の丸めの程度で, 全桁満足すべきものであった. abscissa x_i は $x=0$ に対して対称である. 表の中で $i=1(1) \left[\frac{n}{2} \right]$ の x_i には負号をつけるべきものとする.

Computation of the Abscissas and Weight Coefficients for the Gaussian Quadrature Formulae:

```
begin comment reallength:=45;
integer I, K, n, c, k; real f, df, x; Boolean B;
array T, S[0:50];
procedure CRLF;
begin Printstring(' '); c:=c+1 end;
procedure PR(A);
  value A; integer A;
if A=0 then Printstring('0') else
if A=1 then Printstring('1') else
if A=2 then Printstring('2') else
if A=3 then Printstring('3') else
if A=4 then Printstring('4') else
if A=5 then Printstring('5') else
if A=6 then Printstring('6') else
if A=7 then Printstring('7') else
if A=8 then Printstring('8') else
Printstring('9');
procedure PRint(a, b, c, d);
  value a, b, c, d; real a; integer b, c, d;
begin integer I, J, N;
N:=entier(a); PR(N); Printstring('.');
  a:=(a-N)*10.0;
for I:=1 step 1 until d do begin
for J:=1 step 1 until b do begin
  N:=entier(a); PR(N); a:=(a-N)*10.0 end;
for J:=1 step 1 until c do Printstring('▼')end
end;
procedure Function(a, b, n, A);
  value b, n; integer n; real a, b; array A;
begin real X, F; integer K, I;
K:=n div 2; F:=A[K]; X:=b*b;
for I:=K-1 step -1 until 0 do F:=F*X+A[I];
if n=K+K then a:=F else a:=-F*b
end;
procedure P(a, b, c, n, A, B);
  integer a, b, c, n; array A, B;
begin integer I, K; real s, t;
K:=n div 2;
if n=K+K then begin
even: t:=B[0]; B[0]:=A[0]*b/c;
A[0]:=s:=t;
for I:=1 step 1, until K-1 do begin
t:=B[I]; B[I]:=(A[I]*b+a*s)/c;
A[I]:=s:=t end;
B[K]:=-a*s/c end else begin
odd: for I:=0 setp 1 until K-1 do begin
t:=B[I]; B[I]:=(A[I]*b+a*t)/c;
A[I]:=t end;
t:=A[K]:=B[K]; B[K]:=a*t/c end
end P;
Readinteger(n); T[0]:=S[0]:=1.0; c:=0;
```


i	N = 9	Abscissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	9	0.96816	02395	07626	08983	55762	02903	0.08127	43883	61574	41197	19921	58110
2	8	0.83603	11073	26635	79429	94297	88069	0.18064	81606	94857	40405	84720	31242
3	7	0.61337	14327	00590	39730	87020	39341	0.26061	06964	02935	46231	87428	69418
4	6	0.43245	34234	03808	92903	85380	14643	0.31234	70770	40002	84006	86304	06584
5	5	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.33023	93550	01259	76316	45250	69286

i	N = 10	Abscissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	10	0.97390	65285	17171	72007	79640	12084	0.06667	13443	08688	13759	35688	09893
2	9	0.86506	33666	88984	51073	20966	88423	0.14945	13491	50580	59314	57763	39657
3	8	0.67940	95682	99024	40623	43273	65114	0.21908	63625	15982	04399	55349	34228
4	7	0.43339	53941	29247	19079	92659	43165	0.26926	67193	09996	35509	12269	21569
5	6	0.14887	43389	81631	21088	48260	01129	0.29552	42247	14752	87017	38929	94651

i	N = 11	Abscissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	11	0.97822	86581	46056	99280	39380	01122	0.05566	85671	16173	66648	27537	20442
2	10	0.88706	25997	68095	29907	51577	69303	0.12558	03694	64904	62463	46942	99223
3	9	0.73015	20055	74049	32409	34162	52031	0.18629	02109	27734	25142	60976	41431
4	8	0.51909	61292	06811	81592	57256	69458	0.23319	37645	91990	47991	85237	04843
5	7	0.26954	31559	52344	97233	15319	85400	0.26280	45445	10246	66218	06888	69890
6	6	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.27292	50867	77900	63071	44835	28336

i	N = 12	Abscissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	12	0.98156	06342	46719	25069	05490	90149	0.04717	53363	86511	82719	46159	61485
2	11	0.90411	72563	70474	85667	84658	66119	0.10693	93259	95318	43096	02547	18193
3	10	0.76990	26741	94304	68703	68938	33212	0.16007	83285	43346	22633	46525	29543
4	9	0.58731	79542	86617	44729	67024	18940	0.20316	74267	23065	92174	90644	55809
5	8	0.36783	14989	98180	19375	26915	36643	0.23349	25365	38354	80876	08498	98924
6	7	0.12523	34085	11468	91547	24413	69463	0.24914	70458	13402	78500	05624	36042

i	N = 13	Abscissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	13	0.98418	30547	18588	14947	28294	48807	0.04048	40047	65315	87952	00215	92200
2	12	0.91759	83992	22977	96520	65478	36500	0.09212	14998	37728	44791	44217	75953
3	11	0.80157	80907	33309	91279	42064	89582	0.13887	35102	19787	23846	36017	76868
4	10	0.64234	93394	40340	22064	39846	06995	0.17814	59807	61945	73828	00466	91996
5	9	0.44849	27510	36446	85287	79128	52127	0.20781	60475	36888	50231	25232	19306
6	8	0.23045	83159	55134	79406	55281	21097	0.22628	31802	62897	23841	20901	86039
7	7	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.23255	15532	30873	91019	45895	15268

i	N = 14	Abscissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	14	0.98629	39086	96812	33884	15972	66704	0.03511	94603	31751	86303	18328	76138
2	13	0.92843	48836	63573	51733	63911	39377	0.08015	80371	59760	20980	56332	77062
3	12	0.82720	13150	69764	99318	97947	42650	0.12151	85706	87903	18468	94148	09072
4	11	0.68729	29048	11685	47014	80198	03019	0.15720	31671	58193	53456	96019	38623
5	10	0.51524	86363	58154	09196	52907	18551	0.18553	83974	77937	81374	17165	90125
6	9	0.31911	23689	27889	76043	56718	24168	0.20519	84637	21295	60396	59240	65661
7	8	0.10805	49487	07343	66206	62446	50219	0.21526	38534	63157	79019	58764	43316

i	N = 15	Abscissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	15	0.98799	25180	20485	42848	95657	18586	0.03075	32419	96117	26835	46283	93577
2	14	0.93727	33924	00705	90430	77589	47710	0.07036	60474	88108	12470	92674	16450
3	13	0.84920	65834	10427	21620	06483	20774	0.10715	92204	67171	93501	18695	46685
4	12	0.72441	77313	60170	04741	61860	54613	0.13957	06779	26154	31444	78047	94511
5	11	0.57097	21726	08538	84753	72267	37253	0.16626	92058	16993	93355	32008	60481
6	10	0.39415	13470	77563	36989	72073	70981	0.18616	10000	15562	21102	68005	61866
7	9	0.20119	40939	97434	52230	06283	03394	0.19843	14853	27111	57645	61183	26443
8	8	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.20257	82419	25561	27288	06201	99967

i	N = 16	Abcissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	16	0.98940	09349	91649	93259	61541	73450	0.02715	24594	11754	09485	17805	72456
2	15	0.94457	50230	73232	57607	79884	15534	0.06225	35239	38647	89286	28438	36994
3	14	0.86563	12023	87831	74388	04678	97712	0.09515	85116	82492	78480	99251	07602
4	13	0.75540	44083	55003	03389	51011	94847	0.12462	89712	55533	87205	24762	82192
5	12	0.61787	62444	02643	74844	66717	64048	0.14959	59888	16576	73208	15017	30547
6	11	0.45801	67776	57227	38634	24194	42983	0.16915	65193	95002	53818	93120	79030
7	10	0.28160	35507	79258	91323	04605	01460	0.18260	34150	44923	58886	67636	67969
8	9	0.09501	25098	37637	44018	53193	35424	0.18945	06104	55068	49628	53967	23208

i	N = 17	Abcissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	17	0.99057	54753	14417	33567	54340	19940	0.02414	83028	68547	93196	01100	26287
2	16	0.95067	55217	68767	76122	27169	57895	0.05545	95293	73987	20112	94401	65358
3	15	0.88023	91537	76985	90212	29556	94488	0.08503	61483	17179	18088	35353	70191
4	14	0.78151	40038	96801	40692	52300	55520	0.11188	38471	93403	97109	47883	85626
5	13	0.65767	11592	16690	76585	03022	16643	0.13513	63684	68525	47328	63199	81702
6	12	0.51269	05370	86476	96788	62465	68629	0.15404	57610	76810	28808	14315	94801
7	11	0.35123	17624	53876	31529	71955	17095	0.16800	41021	56450	04450	99706	63798
8	10	0.17248	41814	95847	85525	06774	93654	0.17656	27053	66992	64632	52709	90113
9	9	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.17944	64703	56206	52545	82656	44261

i	N = 18	Abcissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	18	0.99156	51684	20930	94673	00160	04706	0.02161	60135	26483	31031	33427	10266
2	17	0.95582	39495	71397	75518	11958	92929	0.04971	45488	94969	79645	33349	46202
3	16	0.89260	24664	97555	73920	60605	91127	0.07642	57302	54889	05652	91296	77616
4	15	0.80370	49589	72523	11568	24174	55014	0.10094	20441	06287	16556	28139	84924
5	14	0.69168	70430	60353	20787	48910	81288	0.12255	52067	11478	46018	45191	26800
6	13	0.55977	08310	73947	53460	78715	48525	0.14064	29146	70650	65120	47313	03751
7	12	0.41175	11614	62842	64603	59317	93833	0.15468	46751	26265	24492	54180	03836
8	11	0.25188	62256	91505	50958	89728	54877	0.16427	64837	45832	72298	60537	76465
9	10	0.08477	50130	41735	30124	22618	52935	0.16914	23829	63143	59184	06564	70134

i	N = 19	Abcissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	19	0.99240	68438	43584	40318	90176	70253	0.01946	17882	29726	47703	63120	41464
2	18	0.96020	81521	34830	03085	27788	40687	0.04481	42267	65699	60033	28381	57401
3	17	0.90315	59036	14817	90164	26609	28532	0.06904	45427	37641	22658	07082	58006
4	16	0.82271	46565	37142	82497	89224	86712	0.09149	00216	22449	99946	44620	94123
5	15	0.72096	61773	35229	37861	70958	60823	0.11156	66455	47333	99471	60239	01681
6	14	0.60054	53046	61681	02346	96381	64946	0.12875	39625	39336	22767	55157	84856
7	13	0.46457	07413	75960	94571	72671	48104	0.14260	67021	73606	61177	57461	09441
8	12	0.31656	40999	63629	83199	01173	28849	0.15276	60420	65859	66677	88554	00897
9	11	0.16035	86456	40225	37586	80961	15740	0.15896	88433	93954	34764	99564	39465
10	10	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.16105	44498	48783	69597	91636	25320

i	N = 20	Abcissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	20	0.99312	85991	85094	92478	61223	88471	0.01761	40071	39152	11831	18619	62351
2	19	0.96397	19272	77913	79126	76661	31197	0.04060	14298	00386	94133	10399	52274
3	18	0.91223	44282	51325	90586	77524	41203	0.06267	20483	34109	06356	95065	35187
4	17	0.83911	69718	22218	82339	45290	61701	0.08327	67415	76704	74872	47581	43222
5	16	0.74633	19064	60150	79261	43050	70355	0.10193	01198	17240	43503	67501	35480
6	15	0.63605	36807	26515	02545	28366	96226	0.11819	45319	61518	41731	23773	77711
7	14	0.51086	70019	50827	09800	43640	50955	0.13168	86384	49176	62689	84944	99748
8	13	0.37370	60887	15419	56067	25481	77024	0.14209	61093	18382	05132	92983	25067
9	12	0.22778	58511	41645	07808	04961	95368	0.14917	29864	72603	74678	78287	37001
10	11	0.07652	65211	33497	33375	46404	09398	0.15275	33871	30725	85069	80843	31955

i	$N = 21$	Abscissas (X_i)						Weights (W_i)					
1	21	0.99375	21706	20389	50026	02420	35937	0.01601	72282	57774	33332	42246	16358
2	20	0.96722	68385	66306	29431	66222	14907	0.03695	37897	70852	49379	99506	68299
3	19	0.92009	93341	50400	82879	01871	33714	0.05713	44254	26857	20828	36358	26472
4	18	0.85336	33645	83317	28364	72506	38597	0.07610	01136	28379	30201	70516	53300
5	17	0.76343	99634	75677	90861	58778	51306	0.09344	44234	56033	86155	32897	41113
6	16	0.66713	88041	97412	31930	59666	69990	0.10879	72991	67148	37766	34745	78070
7	15	0.55161	88358	87219	80705	90187	96724	0.12183	14160	53728	53419	53671	77125
8	14	0.42434	21202	07438	78357	36688	88543	0.13226	89386	33337	46178	10525	74496
9	13	0.28302	13168	02401	09660	07925	16064	0.13988	73947	91073	15472	21334	23867
10	12	0.14556	18541	60895	09093	70309	82338	0.14452	44039	89970	05906	38271	66553
11	11	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.14608	11336	49690	42719	19851	47683

i	$N = 22$	Abscissas (X_i)						Weights (W_i)					
1	22	0.99429	45854	82399	29207	30314	21161	0.01462	79952	98272	20068	49910	98047
2	21	0.97006	04978	35428	72712	39509	86765	0.03377	49015	84814	15479	33022	46865
3	20	0.92695	67721	87174	00052	06929	39259	0.05229	33351	52683	28594	03120	51273
4	19	0.86581	25777	20300	13653	64256	37019	0.06979	64684	24520	48809	49614	18930
5	18	0.78781	68059	79208	16200	42779	55408	0.08594	16062	17067	72741	44436	81372
6	17	0.69448	72631	86682	78005	06898	35762	0.10041	41444	42880	96493	20788	37830
7	16	0.58764	04035	06911	59295	88769	27638	0.11293	22960	80539	21839	34006	07421
8	15	0.46935	58379	86757	02640	63307	10966	0.12325	23768	10512	42428	55609	86154
9	14	0.34193	58208	92084	22515	81474	20427	0.13117	35047	87062	37073	29649	92530
10	13	0.20786	04266	88221	28547	88465	33919	0.13654	14983	46015	17135	25738	31231
11	12	0.06973	92733	19722	22121	38417	96118	0.13925	18728	55631	99337	54102	48341

i	$N = 23$	Abscissas (X_i)						Weights (W_i)					
1	23	0.99476	93349	97552	12352	39257	15445	0.01341	18594	87141	77208	13094	93458
2	22	0.97254	24712	18115	23195	60240	76820	0.03098	80058	56979	44431	06942	19641
3	21	0.93297	10868	26016	10234	91969	89038	0.04803	76717	31084	66857	16410	71632
4	20	0.87675	23582	70441	66737	81568	85934	0.06423	24214	08525	85212	17696	15158
5	19	0.80488	84016	18839	89215	11184	06996	0.07928	14117	76718	95492	28925	24742
6	18	0.71966	13631	31950	19446	16244	83748	0.09291	57660	60035	14747	70186	17369
7	17	0.61960	98757	63646	15638	50973	11649	0.10489	20914	64541	41007	40861	85014
8	16	0.50950	14778	46007	54968	97930	47866	0.11499	66402	22411	36494	16435	12933
9	15	0.39030	10380	30290	83142	14888	72880	0.12304	90843	06729	53046	75784	00672
10	14	0.26413	56809	70344	93053	38695	38283	0.12890	57221	88082	14997	85953	39399
11	13	0.13325	68242	98466	11093	17426	82241	0.13246	20394	04696	61737	16424	64703
12	12	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.13365	45721	86106	17535	14571	10545

i	$N = 24$	Abscissas (X_i)						Weights (W_i)					
1	24	0.99518	72199	97021	36017	99974	09700	0.01234	12297	99987	19954	68056	67070
2	23	0.97472	85559	71309	49819	83919	93008	0.02853	13886	28933	66318	13078	15951
3	22	0.93827	45520	02732	75852	36490	01708	0.04427	74388	17419	80616	86027	48211
4	21	0.83641	55270	04401	03421	31543	41982	0.05929	85849	15436	78074	63677	58500
5	20	0.82000	19859	73902	92195	39498	72669	0.07334	64814	11080	30573	40336	15253
6	19	0.74012	41915	78554	36424	38281	03099	0.08619	01615	31953	27591	71852	02983
7	18	0.64809	36519	36975	56925	24957	86910	0.09761	86521	04113	88826	98806	64464
8	17	0.54542	14713	88839	53565	83756	17218	0.10744	42701	15965	63478	25773	42446
9	16	0.43379	35076	26045	13848	70842	31913	0.11550	56680	53725	60135	33444	83906
10	15	0.31504	26796	96163	37438	67932	91319	0.12167	04729	27803	39120	44631	53476
11	14	0.19111	88674	73616	30915	86398	20757	0.12583	74563	46828	29612	13753	82511
12	13	0.06405	68928	62605	62608	50430	82624	0.12793	81953	46752	15697	40561	65224

i		N = 25		Abcissas (Xi)					Weights (Wi)				
1	25	0.99555	69697	90498	09790	87849	46893	0.01139	37985	01026	28794	79029	64113
2	24	0.97666	39214	59517	51149	83153	86479	0.02635	49866	15032	13726	19018	15295
3	23	0.94297	45712	28974	33941	40111	69658	0.04093	91567	01306	31265	56234	87711
4	22	0.89499	19978	78275	36885	10420	06782	0.05490	46959	75835	19192	59368	91540
5	21	0.83344	26287	60834	00142	10211	08693	0.06803	83338	12356	91720	71871	85656
6	20	0.75925	92630	37357	63057	72828	65204	0.08014	07003	35001	01801	32349	59669
7	19	0.67356	63684	73468	36448	51206	33247	0.09102	82619	82963	64981	14972	20707
8	18	0.57766	29302	41222	96772	36898	41612	0.10053	59490	67050	64420	22068	90392
9	17	0.47300	27314	45714	96052	21821	15009	0.10851	96244	74263	65311	60939	57050
10	16	0.36117	23058	09387	83773	58217	30127	0.11485	82591	45711	64833	93255	45869
11	15	0.24386	68837	20988	43204	51903	62797	0.11945	57635	35784	77222	81781	26512
12	14	0.12786	46926	10710	39638	73598	18808	0.12224	24429	90310	04168	89595	18945
	13	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.12317	60537	26715	45120	39028	73079

i		N = 26		Abcissas (Xi)					Weights (Wi)				
1	26	0.99588	57011	45616	92900	32169	59322	0.01055	13726	17343	00715	56511	87685
2	25	0.97838	54459	56470	99110	05803	54311	0.02441	78510	92631	90878	96158	27519
3	24	0.94715	90666	61714	25013	59152	83518	0.03796	23832	94362	76395	03031	41248
4	23	0.90263	78619	84307	07421	76655	99231	0.05097	58252	97147	81199	83199	00724
5	22	0.84544	59427	88498	01879	75070	61467	0.06327	40463	29574	83553	94536	89907
6	21	0.77638	59488	20678	85619	29672	47242	0.07468	41497	65659	74588	70757	96102
7	20	0.69642	72604	19957	26486	38139	13729	0.08504	58943	13485	23921	04477	65079
8	19	0.60669	22930	17618	06323	19787	46916	0.09421	38003	55914	14846	36648	83067
9	18	0.50844	07148	24505	71769	57030	64725	0.10205	91610	94425	42323	84140	70253
10	17	0.40305	17551	23486	30648	10773	77098	0.10847	18405	28576	59065	65794	26727
11	16	0.29200	48394	85956	89514	28353	82077	0.11336	18165	46319	66654	94407	18442
12	15	0.17685	88203	56890	18396	90577	48418	0.11666	04434	85296	58204	46625	07540
13	14	0.05923	00934	29313	20709	37185	75198	0.11832	14152	79262	27651	63710	85700

i		N = 27		Abcissas (xi)					Weights (Wi)				
1	27	0.99617	92628	88988	56693	88872	08381	0.00979	89960	51294	36026	11500	55091
2	26	0.97992	34759	61501	22285	58733	55661	0.02268	62315	96180	62319	60342	06446
3	25	0.95090	05578	14705	00685	19080	30643	0.03529	70537	57419	71102	25782	89304
4	24	0.90948	23206	77491	10430	06450	18209	0.04744	94125	20615	06270	40967	10114
5	23	0.85620	79080	18294	49030	27372	22706	0.05898	35368	59833	59911	03008	33719
6	22	0.79177	16390	70508	22714	43973	44107	0.06974	88237	66245	59298	43228	88356
7	21	0.71701	34737	39423	69929	48162	11642	0.07960	48677	73057	77126	30749	59009
8	20	0.63290	79719	46495	14092	77346	37634	0.08842	31585	43756	95019	43228	02853
9	19	0.54055	15645	79456	89490	03009	41559	0.09608	87273	70028	50756	56526	46558
10	18	0.44114	82517	50026	88058	59741	55689	0.10250	16378	17745	79867	12477	11532
11	17	0.33599	39036	38508	89973	03190	34207	0.10757	82857	88533	18721	21629	84426
12	16	0.22645	93654	39536	85885	72391	07360	0.11125	24883	56845	19267	21630	96042
13	15	0.11397	25856	09529	96693	28949	83869	0.11347	63461	08965	14862	03699	48092
	14	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.11422	08673	78956	98904	50457	36901

i		N = 28		Abcissas (Xi)					Weights (Wi)				
1	28	0.99644	24975	73954	44995	04363	90483	0.00912	42825	93094	51773	88161	53922
2	27	0.98130	31653	70872	75369	45599	45807	0.02113	21125	92771	25975	15003	80993
3	26	0.95425	92806	28938	19725	41018	39705	0.03290	14277	82304	37997	76308	19170
4	25	0.91563	30263	92132	07386	96894	23329	0.04427	29347	59004	22783	95878	77653
5	24	0.86589	25225	74395	04894	22545	67379	0.05510	73456	75716	74543	14829	18226
6	23	0.80564	13709	17179	17144	78859	55425	0.06527	29239	66999	59579	33975	66775
7	22	0.73561	08780	13631	77202	81445	10292	0.07464	62142	34568	77902	39318	87173
8	21	0.65665	10940	38864	96121	98981	76506	0.08311	34172	28901	21839	03964	98244
9	20	0.56972	04718	11401	71930	80032	83356	0.09057	17443	93032	84094	21860	31336
10	19	0.47587	42249	55118	26103	44118	47667	0.09693	06579	97929	91585	04890	06095
11	18	0.37625	15160	89078	71022	13572	09556	0.10211	29675	78060	76981	42166	38505
12	17	0.27206	16276	35178	07767	68263	56125	0.10605	57659	22846	41791	04164	36996
13	16	0.16456	92821	33380	77128	14717	77891	0.10871	11922	58294	13525	35715	19303
14	15	0.05507	92898	84034	27042	65165	27341	0.11004	70130	16475	19628	23762	65601

i	N = 29	Abscissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	29	0.99667	94472	60596	58616	31915	32549	0.00851	69038	78746	40965	42638	13302
2	28	0.98254	55057	61413	17487	09260	15786	0.01973	20850	56122	70598	38598	01640
3	27	0.95728	55957	78087	72579	82080	36980	0.03074	04922	02093	62264	44085	25374
4	26	0.92118	02329	53058	78509	37534	36083	0.04140	20625	18682	83610	48300	10114
5	25	0.87463	78049	20102	79041	77934	21256	0.05159	48269	02497	92391	25943	81179
6	24	0.81818	54876	15252	44498	95722	14578	0.06120	30906	57079	13854	21098	48023
7	23	0.75246	28517	34477	13391	26100	77212	0.07011	79332	55051	27856	95814	86948
8	22	0.67821	45276	02686	51515	61850	05391	0.07823	83271	35763	78382	81448	88659
9	21	0.59628	17971	38227	82037	95862	11188	0.08547	22573	66172	52754	53448	49297
10	20	0.50759	29551	74227	64210	26279	19627	0.09173	77571	39258	76334	79664	11077
11	19	0.41315	28881	74008	66389	07065	86031	0.09696	38340	94408	60630	19000	74882
12	18	0.31403	16378	67639	93494	81959	23191	0.10109	12737	59914	96612	18205	46907
13	17	0.21135	22861	66001	07450	63757	28902	0.10407	33100	77729	37391	33284	71285
14	16	0.10627	82301	32679	23017	09823	92430	0.10587	61550	97320	94140	65913	27852
15	15	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.10647	93817	18314	24424	65111	26909

i	N = 30	Abscissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	30	0.99689	34840	74649	54027	16300	50918	0.00796	81924	96166	60561	54658	83474
2	29	0.98366	81232	79747	20997	00325	81605	0.01846	64683	11090	95914	23021	31912
3	28	0.96002	18649	68307	51221	68710	25581	0.02878	47078	83323	36934	97191	79611
4	27	0.92620	00474	29274	32587	93242	77080	0.03879	91925	69627	04959	68019	36446
5	26	0.88256	05357	92052	68154	31164	62530	0.04840	26728	30594	05290	29381	40422
6	25	0.82956	57623	82768	39744	28981	19732	0.05749	31562	17619	06648	17216	89402
7	24	0.76777	74321	04826	19491	79773	40974	0.06597	42298	82180	49512	81285	15115
8	23	0.69785	04947	93315	79693	22923	88026	0.07375	59747	37705	20626	82438	50022
9	22	0.62052	61829	89242	86114	04775	56431	0.08075	58952	29420	21535	46949	38460
10	21	0.53662	41481	42019	89926	41697	93311	0.08689	97872	01082	97980	23875	30715
11	20	0.44703	37695	38089	17678	06099	00322	0.09212	25222	37786	12871	76327	07087
12	19	0.35270	47255	30878	11347	10372	07089	0.09636	87371	74644	25963	94686	26351
13	18	0.25463	69261	67889	84643	98051	29817	0.09959	34205	86795	26706	27802	82103
14	17	0.15386	99136	08583	54696	37946	72743	0.10176	23897	48405	50459	64289	52168
15	16	0.05147	18425	55317	69583	30252	13166	0.10285	26528	93558	84034	12856	36705

i	N = 31	Abscissas (Xi)						Weights (Wi)					
1	31	0.99708	74818	19477	07405	56265	54223	0.00747	08315	79248	77585	86968	75032
2	30	0.98468	59096	65152	48400	24651	66734	0.01731	86207	90310	58246	31579	96086
3	29	0.96250	39250	92949	66178	90524	40105	0.02700	90191	84979	42180	06087	08091
4	28	0.93075	69978	96648	16495	69457	59729	0.03643	22739	12385	46402	43920	10467
5	27	0.88976	00299	48271	04337	41920	08982	0.04549	37075	27201	10290	23158	57894
6	26	0.83992	03201	46267	34008	69045	35940	0.05410	30824	24916	85371	16662	59086
7	25	0.78173	31484	16624	94040	63600	20194	0.06217	47865	61028	42691	03435	43686
8	24	0.71577	67845	86853	28390	59708	65366	0.06962	85832	35410	36616	77561	26255
9	23	0.64270	67229	24260	34618	44182	03232	0.07639	03865	98776	61642	63576	74901
10	22	0.56324	91614	07149	26272	09449	23595	0.08239	29917	61589	26390	38233	67431
11	21	0.47819	37820	44902	48044	05940	39356	0.08757	67406	08477	87612	61980	69695
12	20	0.38838	59016	08232	94306	13514	61287	0.09189	01138	93641	47821	53628	71607
13	19	0.29471	80699	81701	61661	79038	97671	0.09529	02429	12319	51280	72041	97497
14	18	0.19812	11993	35570	62877	24129	96032	0.09774	33353	86328	72509	34740	10978
15	17	0.09955	53121	52341	52032	51747	90118	0.09922	50112	26672	30787	48755	14428
16	16	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.09972	05447	93426	45142	75338	33734

i	N = 32	Abscissas (Xi)					Weights (Wi)						
1	32	0.99726	38618	49481	56354	49811	28665	0.00701	86100	09470	09660	04070	63738
2	31	0.98561	15115	45268	33540	01750	44630	0.01627	43947	30905	67060	51705	62206
3	30	0.96476	22555	87506	43077	38119	28118	0.02539	20653	09262	05945	57525	89789
4	29	0.93490	60759	37739	68917	09191	34835	0.03427	38629	13021	43310	26877	32252
5	28	0.89632	11557	66052	12396	53072	43719	0.04283	58980	22226	68065	68786	46606
6	27	0.84936	76137	32569	97013	36930	04967	0.05099	80592	62376	17619	61632	44689
7	26	0.79448	37959	67942	40696	30972	98970	0.05868	40934	78535	54714	52836	37300
8	25	0.73218	21187	40289	68038	74266	65091	0.06582	22227	76361	84683	76500	63706
9	24	0.66304	42669	30215	20097	51151	68663	0.07234	57941	08848	50622	53993	56478
10	23	0.58771	57572	40762	32904	07454	76401	0.07819	38957	87070	30647	17409	18828
11	22	0.50689	99089	32229	39002	37474	74377	0.08331	19242	26946	75522	21990	74604
12	21	0.42135	12761	30635	34536	41194	36172	0.08765	20930	04403	81114	27714	62751
13	20	0.33186	86022	82127	64977	99168	05730	0.09117	38786	95763	88471	28685	77111
14	19	0.23928	73622	52137	07454	46032	09165	0.09384	43990	80804	56563	91802	37668
15	18	0.14447	19615	82796	49348	51863	73598	0.09563	87200	79274	85941	90820	02204
16	17	0.04830	76656	87738	31623	48125	70440	0.09654	00885	14727	80056	67648	30063

i	N = 33	Abscissas (Xi)					Weights (Wi)						
1	33	0.99742	46942	46455	21726	61680	17580	0.00660	62278	47587	37805	86492	35208
2	32	0.98645	57262	30642	48811	03756	98264	0.01532	17015	12934	67612	79457	68533
3	31	0.96682	29096	89992	76892	83777	06678	0.02391	55481	01749	48035	05332	57529
4	30	0.93869	43726	11168	35035	58351	24363	0.03230	03586	32328	95328	15614	47249
5	29	0.90231	67677	43433	58304	05313	31518	0.04040	15413	31669	59156	34097	90527
6	28	0.85800	96526	76504	06464	30614	80146	0.04814	77428	18711	69567	01468	80138
7	27	0.80616	23562	74166	58979	62008	70782	0.05547	08466	31663	56128	49444	95439
8	26	0.74723	04964	49562	15785	90551	24897	0.06230	64825	30317	48003	16277	25770
9	25	0.68173	19599	69742	78626	82159	46919	0.06859	45728	18656	71280	59550	73014
10	24	0.61024	23458	36379	02730	72875	13538	0.07427	98548	43954	14934	24721	75918
11	23	0.53338	99047	86347	64354	88942	64995	0.07931	23647	94886	73836	39083	84941
12	22	0.45185	00172	72450	69572	59932	77240	0.08364	78760	67038	70761	39280	14517
13	21	0.36633	92577	48073	34107	02206	23253	0.08724	82876	18844	33760	72816	70945
14	20	0.27760	90971	52497	02940	32480	67298	0.09008	19586	60638	57723	97437	05500
15	19	0.18643	92988	27991	57233	57987	59218	0.09212	39866	43316	84621	32409	77717
16	18	0.09363	10658	54733	38567	07429	24122	0.09335	64260	65596	11616	09991	26274
17	17	0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.09376	84461	60209	99656	73045	41546

i	N = 34	Abscissas (Xi)					Weights (Wi)						
1	34	0.99757	17537	90841	91924	33724	37454	0.00622	91405	55908	68471	86064	61071
2	33	0.98722	78164	06309	48504	97504	31099	0.01445	01627	48595	03541	52022	10328
3	32	0.96870	82625	33344	28176	46465	73055	0.02256	37219	85494	97008	40940	88714
4	31	0.94216	23974	05107	09163	16760	25460	0.03049	13806	38446	13180	94423	87681
5	30	0.90780	96777	18324	46880	08998	89019	0.03816	65937	96387	51632	17659	20289
6	29	0.86593	46383	34564	46926	35720	90671	0.04552	56115	23353	27245	38225	63395
7	28	0.81688	42279	00933	66459	15789	06586	0.05250	74145	72678	10616	82459	74842
8	27	0.76106	48766	29873	01418	74089	68978	0.05905	41358	27524	49319	39609	72350
9	26	0.69893	91132	16262	90793	30001	06575	0.06511	15215	54076	41137	85444	30064
10	25	0.63102	17270	80528	54531	77757	55519	0.07062	93758	14255	72499	90387	96567
11	24	0.55787	55006	69746	64273	64598	86216	0.07556	19746	60031	93127	08339	74228
12	23	0.48010	65451	90327	03419	41026	80507	0.07986	84443	39771	84473	88188	32806
13	22	0.39835	92777	58645	94063	14947	52937	0.08351	30996	99845	65518	70202	28046
14	21	0.31331	10813	39463	24745	83167	65650	0.08646	57397	47035	74978	42468	56280
15	20	0.22566	66916	16449	48386	86411	80934	0.08870	18978	35693	86928	70764	57364
16	19	0.13615	23572	59182	97589	44288	24331	0.09020	30443	70640	72957	39422	42017
17	18	0.04550	98219	53102	54274	90756	70851	0.09095	67403	30259	87361	53376	03948

i	N = 35	Abscissas (Xi)								Weights (Wi)							
1	35	0.99770	65690	99600	29726	01631	39312	0.00588	34334	20443	08497	57538	96240				
2	34	0.98793	57644	43851	49803	51170	89185	0.01365	08283	48361	49226	64040	02920				
3	33	0.97043	76160	39229	83321	50704	82584	0.02132	29799	11483	58088	34379	83966				
4	32	0.94534	51482	07827	32953	87259	85529	0.02882	92601	08894	25404	87160	39714				
5	31	0.91285	42613	59317	61446	49370	63555	0.03611	01158	63463	38053	27169	69647				
6	30	0.87321	91250	25222	33152	32823	49141	0.04310	84223	26170	21878	23064	59374				
7	29	0.82674	98990	92225	40683	40506	12748	0.04976	93704	01353	52980	51996	76084				
8	28	0.77381	02522	86912	55526	74230	09209	0.05604	08162	12370	12857	83277	47165				
9	27	0.71481	45015	56628	78326	44086	31224	0.06187	36719	66080	18888	70141	38788				
10	26	0.65022	43646	65890	38867	57928	08984	0.06722	22852	69086	90396	43055	08748				
11	25	0.58054	53447	49764	50993	45020	08189	0.07204	47947	72560	06466	54619	09785				
12	24	0.50632	27732	41488	61502	42975	55837	0.07630	34571	55442	05353	86585	37884				
13	23	0.42813	75415	17814	25418	76206	13001	0.07996	49422	42324	26293	26620	80985				
14	22	0.34660	15544	30813	94587	69798	34930	0.08300	05937	28856	58837	99265	28216				
15	21	0.26235	29412	09296	05797	08952	00455	0.08538	66533	92099	12522	59439	87391				
16	20	0.17605	10611	65989	56997	43036	56445	0.08710	44469	97183	53424	33220	31605				
17	19	0.08837	13432	75659	26360	09294	33497	0.08814	05304	30275	46297	07388	07593				
18		0.00000	00000	00000	00000	00000	00000	0.08848	67949	07104	29063	82073	87777				

5. 謝 辞

この計算を企画、実行するにあたり御協力くださった、日本大学宇野利雄氏、武蔵工業大学佐竹誠也氏、

日本女子大学 小田尚子氏、ファコム株式会社 岡本彬氏、同大森義和氏、同紫村和子氏、同プログラム課の諸氏に、心から感謝いたします。

(昭和39年5月21日受付)