寄　　書

$\sqrt{n}$ の小数展開の統計*

高　橋　耕　貴**　渋　谷　政　昭**

$\sqrt{2}$, π などの無理数, 超越数を小数の形で表わしたとき, 各数字がどのように規則的に, あるいは無規則的に並んでいるか, については多くの関心が払われてきたようである. 電子計算機の誕生以来もいくつかの試みがあるが[1~6], 初期の頃 ENIAC が e, π を 2,000けた計算してその威力を示したのも, von Neumann が, これらの数値の統計に関心をもっていたのが一つの理由であったそうである.

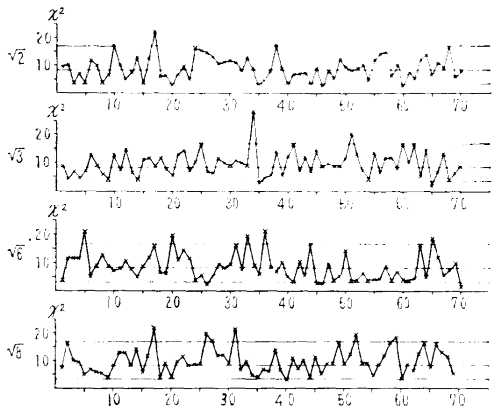
これらの報告を見ると, e は局所的にかなりの特色を示すが, π, e における各数字は大体“確率的”である. “確率性”を表わす数論上の概念として, 次のような“正規性”が考察されている(たとえば文献 7)).

実数 x (簡単のため $0<x<1$ とする) の s 進数展開を $x=\cdot x_1x_2x_3\cdots\cdots$ とする. $B_k=b_1b_2\cdots\cdots b_k$ を数字 $0, 1, \cdots\cdots, s-1$ の長さ k のパターンとする. $x_1x_2\cdots\cdots x_n$ という系列の中で B_k というパターンの現われる回数を $N(B_k, n)$ と書くとき, 可能な s^k 個のすべての B_k にたいして

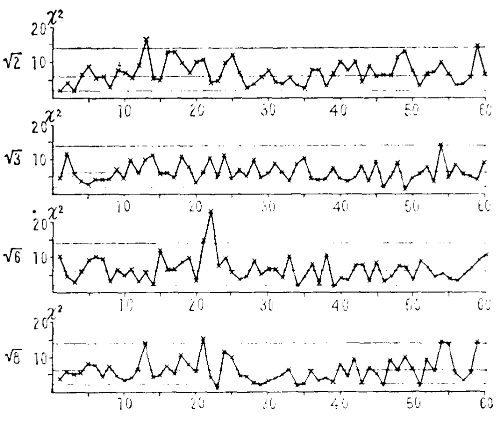
$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}N(B_k, n)=s^{-k}$$

が成り立つとき, “x は s 進法で正規である” という. “ほとんどすべての実数は, すべての $s=2, 3, 4, \cdots\cdots$, に対して s 進法正規である (絶対正規という)” ことが証明されている. 絶体正規でない実数は可付番ではない. また, 任意に与えられた一つの s に対して s 進法正規な実数を構成することもできる. しかしながら, 具体的な絶体正規数は得られておらず, $\sqrt{2}$, π などが何進法かで正規かどうかは未知であり, また, “ある一つの s に対して s 進法正規ならば絶対正規である” という命題が正しいかどうかも未知である.

ある数の正規性を確かめるために, どれだけ多くの実験的計算を行なっても, 所詮空虚な試みではあるが, 理論的検討を進めようとする人への刺激となるだろう. ここでは, $\sqrt{n}$ について検討してみた. 計算の限りでは $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, …… は正規であることが予想される. $\sqrt{n}$ の計算は比較的容易なためか, 調べた限りでは印刷報告されていない. 聞くところによると, PC-1 がデモンストレーションのため, かなり多



第1図　10 進展開の χ^2 適合度. 1点 100 けた (図の横線は自由度 9 の χ^2 分布の 95, 50, 5%点)



第2図　8進展開の χ^2 適合度. 1点 125 けた (図の横線は自由度 7 の χ^2 分布の 95, 50, 5% 点)

* Statistics of Digits of $\sqrt{n}$, by Kōki Takahashi and Masaaki Sibuya (The Inst. of Statist. Math., Tokyo)
** 統計数理研究所電子計算機室

数のけたを計算印刷していたとのことである[註1].

われわれの計算した統計は次のとおりである.

I. $\sqrt{n}$ (n=2, 3, 5, 6, 7, 8, 10) について

I-1. 10進法　100けたごと70ブロック（7,000けた）について 0, 1, …, 9 の度数を求め，χ^2 適合度を計算し，70個の χ^2 の値を“管理図”に画いた（**第1図**）.

I-2. 8進法　128けたごと60ブロック（23,040ビット）について 0, 1, ……, 7 の度数を求め，やはり

第1表 (a) $\sqrt{2}$ 10 進頻度

No. ＼ 数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	χ^2
1	108 (108)	98 (98)	109 (109)	82 (82)	100 (100)	104 (104)	90 (90)	104 (104)	113 (113)	92 (92)	8.380 (8.380)
2	70 (178)	92 (190)	107 (216)	102 (184)	90 (190)	111 (215)	117 (207)	96 (200)	110 (223)	105 (197)	16.680 (10.039)
3	100 (278)	104 (294)	90 (306)	96 (280)	84 (274)	102 (317)	107 (314)	91 (291)	117 (340)	109 (306)	8.920 (12.779)
4	89 (367)	91 (385)	80 (386)	110 (390)	115 (389)	96 (413)	107 (421)	100 (391)	100 (440)	112 (418)	11.360 (10.565)
5	91 (458)	103 (488)	106 (492)	110 (500)	101 (490)	94 (507)	101 (522)	93 (484)	101 (541)	100 (518)	3.140 (9.731)
6	113 (571)	100 (588)	96 (588)	87 (587)	103 (593)	109 (616)	97 (619)	88 (572)	103 (644)	104 (622)	8.220 (8.613)
7	82 (653)	113 (701)	111 (699)	96 (683)	91 (684)	88 (704)	118 (737)	89 (661)	101 (745)	111 (733)	14.220 (12.537)
8	104 (757)	87 (788)	98 (797)	112 (795)	101 (785)	103 (807)	105 (842)	94 (755)	96 (841)	100 (833)	4.200 (11.074)
9	92 (849)	112 (900)	112 (909)	83 (878)	111 (896)	92 (899)	97 (939)	109 (864)	101 (942)	91 (924)	9.980 (9.265)
10	103 (952)	105 (1005)	95 (1004)	102 (980)	120 (1016)	102 (1001)	93 (1032)	100 (964)	85 (1027)	95 (1019)	7.660 (6.412)
11	96 (1048)	100 (1105)	109 (1113)	95 (1075)	99 (1115)	98 (1099)	91 (1123)	109 (1073)	108 (1135)	95 (1114)	3.780 (5.843)
12	89 (1137)	102 (1207)	100 (1213)	94 (1169)	116 (1231)	113 (1212)	94 (1217)	98 (1171)	107 (1242)	87 (1201)	6.440 (7.623)
13	127 (1264)	83 (1290)	108 (1321)	88 (1257)	88 (1319)	94 (1306)	100 (1317)	121 (1292)	101 (1343)	90 (1291)	19.450 (4.898)
14	114 (1378)	110 (1400)	97 (1418)	110 (1367)	104 (1423)	87 (1393)	104 (1421)	78 (1370)	105 (1448)	91 (1382)	11.360 (4.602)

第1表 (b) $\sqrt{2}$ 8進頻度

No. ＼ 数字	0	1	2	3	4	5	6	7	χ^2
1	175 (175)	166 (166)	160 (160)	137 (137)	157 (157)	152 (152)	158 (158)	175 (175)	6.825 (6.825)
2	157 (332)	159 (325)	188 (348)	177 (314)	137 (294)	153 (305)	147 (305)	162 (337)	11.463 (7.572)
3	161 (493)	142 (467)	165 (513)	135 (449)	153 (447)	176 (481)	166 (471)	182 (519)	11.250 (10.583)
4	159 (652)	170 (637)	157 (670)	162 (611)	160 (607)	171 (652)	141 (612)	160 (679)	3.725 (8.487)
5	135 (787)	151 (788)	209 (879)	161 (772)	143 (750)	172 (824)	150 (762)	159 (838)	22.763 (16.627)
6	182 (969)	161 (949)	157 (1036)	159 (931)	149 (899)	179 (1003)	148 (910)	145 (983)	8.473 (6.060)
7	160 (1129)	174 (1123)	158 (1194)	159 (1090)	154 (1053)	156 (1159)	163 (1073)	156 (1139)	1.738 (13.433)
8	177 (1306)	159 (1282)	166 (1360)	165 (1255)	140 (1193)	168 (1327)	153 (1226)	152 (1291)	5.800 (16.031)
9	154 (1460)	168 (1450)	155 (1515)	160 (1415)	169 (1362)	160 (1487)	157 (1383)	157 (1448)	1.400 (12.747)
10	165 (1625)	181 (1631)	160 (1675)	153 (1568)	153 (1515)	162 (1649)	161 (1544)	145 (1593)	4.963 (3.153)
11	159 (1784)	152 (1783)	188 (1863)	156 (1724)	175 (1690)	146 (1795)	165 (1709)	139 (1732)	10.950 (7.795)
12	169 (1953)	170 (1953)	146 (2009)	161 (1885)	158 (1848)	160 (1955)	160 (1869)	156 (1888)	2.488 (11.123)

χ^2 の“管理図”を画いた（**第2図**）.

II. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ について

II-1. I-1 の計算を140ブロック（14,000けた）まで行なうとともに，0, 1, ……, 9 の度数を累積し，累積したものについて χ^2 適合度を求めた.

II-2. I-2 の計算を120ブロック（46,080ビット）まで行ない，やはり累積度数の適合度を計算した.

IIの結果の一部を**第1表**に示す.

品質管理技術者が第1, 2図を眺めれば，管理状態から外れとみなす部分もいくつかある．たとえば，$\sqrt{2}$, 10進，第24～31点；$\sqrt{3}$, 10進，第34点；$\sqrt{6}$, 8進，第22点など．しかしながら正規性を疑うことはできないだろう．なお，10進でも8進でも，$\sqrt{2}$ と $\sqrt{8}$ の図が比較的類似していることは，当然予想されるが興味がある.

累積度数の適合度の図は省略するが，当然各点は相関をもち，“互角の勝負における勝越し”と同様に大きな波を打つ．極端な値が生じたならば直ぐには恢復しない．この“揺らぎ”については別に論じたい.

$\sqrt{n}$ の計算法として，まず卓上計算機で使用されている次の方法を思いつく.

$\sqrt{a}<1$ の s 進小数を求めるには，

(1) as^2 から 1, 3, …… を引いて，負になる直前の $2a_1-1$ で止めると，$1+3+\cdots+(2a_1-1)=a_1^2$ だから

$$a_1s^{-1}\leqq\sqrt{a}<(a_1+1)s^{-1}$$

(2) (1) の減算の結果 $as^2-a_1^2$ を s^2 倍し，$2a_1s+1$, $2a_1s+3$, …… を引き，負となる直前まで a_2 回（$2a_1s+2a_2-1$ まで）引く.

$$a_1s^{-1}+a_2s^{-2}\leqq\sqrt{a}<a_1s^{-1}+(a_2+1)s^{-2}.$$

(3) 以上を逐次繰り返えす.

（卓上計算機の場合，決して良い方法ではない）

これを $s=2$ の場合に翻訳すると，$a>0$ にたいして，

(a) $d_0=[\sqrt{a}]$（整数部分），$c_0=a-d_0^2$ とおく.

(b) $4c_i\geqq4d_i+1$ が成り立てば

$$d_{i+1}=2d_i+1,\ c_{i+1}=4c_i-(4d_i+1)$$

成り立たなければ

$$d_{i+1}=2d_i,\ c_{i+1}=4c_i\ (i=0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

不等式の判定は上位のけた（語）から減算を行ない，不成立ならば中断する．けたをずらす代わりに，数値の記憶装置での位置を数える.

(c) (b) を k 回反復すれば

$$2^{-k}d_k \leqq \sqrt{a} < 2^{-k}(d_k+1)$$

一方，Newton 近似法を用いるには $1/\sqrt{n}$，$n=2, 3, \cdots\cdots$ を

$$x_{k+1}=x_k(3-nx_k{}^2)/2$$

で求める．

$$x_k=(1-\varepsilon_k)/\sqrt{n}$$

とおくと，

$$nx_k{}^2=1-2\varepsilon_k+\varepsilon_k{}^2$$

これは結果が倍長の乗算と，その整数倍である．

$$(3-nx_k{}^2)/2=1+\varepsilon_k-\varepsilon_k{}^2/2$$

前の結果の補数をとり1けたシフトする．ε の位についてだけ行なえばすむ．

$$x_{k+1}=x_k+x_k(\varepsilon_k-\varepsilon_k{}^2/2)$$

第2項は x_k と，それと大体同じ長さの数との積で倍長となる．有効部分は ε_k だけ下がるので，x_k と加算するとき重なる部分は少ない．

数値部分 μ ビットの2進法計算機で，1語の $1/\sqrt{n}$（切捨て）を初期値 x_0 とすると $\varepsilon_0<\sqrt{n}\cdot 2^{-\mu}$，$\varepsilon_k \fallingdotseq (1.5\,\varepsilon_0)^{2^k}$ だから k 回反復後の絶対誤差を e とすると，

$$-\log_2 e=2^k(\mu-\log_2 1.5-0.5\log_2 n)+0.5\log_2 n.$$

HIPAC-103 を用い，はじめ1ビットずつの方法によったところ，4時間で約 3,000 けた（10 進）しか求められず，なおプログラムに改善の余地があったが断念した．Newton 近似では表のとおりである．

けた数（10 進）	7,000 けた	14,000 けた
平方根の計算	15分	50分
10 進印刷：10 進 8 進度数：χ^2：検算	70分	270分

検算は，計算した $\sqrt{n}$（2進）を2乗，10 進変換（その必要はないわけだが）印刷して確かめた．数値はスペースをとるのでここには省略する．

なお，文献等について田中穣氏に御教示いただいたことを感謝している．

参考文献

1) N.C. Metropolis, G. Reitwiesner and J. von Neumann: Statistical treatment of values of first 2,000 decimal places of e and π calculated on the ENIAC, MTAC, 4 (1950), pp. 109〜111.
2) F. Greenberger: Further statistics on the digit of e, MTAC, 6 (1952), pp.123〜124.
3) S.C. Nicholson and J. Jeenel: Some comments on a NORC computation of π, MTAC, 9 (1955), pp. 162〜164.
4) R.E. Greenwood: Coupon collector's test for random digits, MTAC, 9 (1955), pp. 1〜5, 224, 229.
5) R.K. Pathria: A statistical study of randomness among the first 10,000 digits of π, Math. Comp., 16 (1962), pp. 188〜197.
6) 田中　穣：円周率 10 万桁の統計，数理科学，2 (1964), No. 7, pp. 6〜11.
7) I. Niven: Irrational Numbers, 1956, Carus Math. Monographs, Math. Assn. Amer.

（昭和40年4月8日受付）

〔註〕 本稿提出後，次の論文の所在を知った．

これらでは，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ がそれぞれ小数点以下 1544，1314 けた求められており，若干の統計も計算されている．$\sqrt{2}$ については同程度の計算が同じ頃別にも行なわれている．また J. Marcus Boorman, Math. Magaz., **1** (1887) が $\sqrt{2}$ を 315 けた，$\sqrt{3}$ を 222 けたまで正しい値を出しているとのことである．

Uhler, H.S. (1951): Many figure approximations to $\sqrt{2}$, and distribution of digits in $\sqrt{2}$ and $1/\sqrt{2}$.

Proc. Nat. Acad. Sc., **37**, pp. 63〜67

Uhler, H.S. (1951): Approximations exceeding 1300 decimals for $\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$, sin (π/3) and distribution of digits in them, ibid. pp. 443〜447.

なお Uhler の論文にある $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ の値は次のような印刷誤りがある．

Page 65.　下から 13 行目　93691 は 93690

Page 444.　下から 16 行目　44154 は 34154

である．