

ランダム・ウォークを利用した乱数検定法と乱数の分布変換法*

石 柊 正 士**

1. まえがき

最近モンテカルロ法すなわち乱数を用いる試行錯誤法がいろいろな方面に応用されているが、筆者は以前からランダム・ウォークのシミュレーションにより拡散方程式と、それに関連する種々の方程式たとえば、Laplace, Poisson, Helmholtz などの方程式で表わされる各種の問題を解くモンテカルロ法専用の電子計算装置（その本体をランダム・ウォーク装置と呼んでいる）の研究を行なっている¹⁾。ランダム・ウォークのシミュレーションにおいて、必要とする乱数としては、放射性同位元素のガンマ崩壊を利用した物理乱数（一様乱数）を使用しているが、その検定は装置の点から簡単に行なえる頻度検定のみを行なってきた。しかし頻度検定のみでは乱数のもつランダムネス（ここでは一応等確率性と解釈している）の一面しか知ることができず十分ではないので、さらに他の角度からも検討する目的で、このランダム・ウォーク装置を用いて乱数を検定する方法を案出した^{2,3)}。ここではその原理および方法について述べるとともに、一様乱数を任意の分布をもつ乱数に変換する方法も考案した⁴⁾のであわせて記述する。

2. ランダム・ウォーク

まず筆者が行なっているランダム・ウォーク・シミュレーションについて説明する。

2.1 ランダム・ウォークとランダム・ウォーク・ポイントの到達確率

ランダム・ウォークは次のようにして実現させる。二次元の空間に間隔 h の平行線を格子状に引き、第 1 図に示すように格子点 Q_i ($i=1, 2, \dots, n$) の集合で、ある境界 Γ を形成して、一つの閉領域 ϕ を作る。この領域内のある格子点 P を出発点とし、ランダム・ウォーク・ポイントを点 P の 4 隣接点 P_j ($j=1, 2, 3, 4$) のいずれに進ませるかを一様乱数によって等確率に定

め、距離 h を移動させる。この過程を次々と続け、ランダム・ウォーク・ポイントが境界 Γ を形成する格子点 Q_i に到達すれば、このランダム・ウォークを停止し、1回のランダム・トリップを終了させる。第 1 図の→印は、ランダム・ウォーク・ポイントの移動を示す。ランダム・ウォーク・ポイントが点 P を出発して Γ 上の点 Q_i に到達する確率を表わす関数を $U(P \rightarrow Q_i)$ と書くと、この値は、点 P の 4 隣接点 P_j から点 Q_i に到達する確率を表わす関数 $U(P_j \rightarrow Q_i)$ を用いて次式のように表わすことができる。

$$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 U(P_j \rightarrow Q_i) = U(P \rightarrow Q_i) \quad (1)$$

ただし等確率に方向を定めてランダム・ウォーク・ポイントを移動させるのであるから、点 P から点 P_j へ移動する確率はそれぞれ $1/4$ である。いま点 P の座標を (x, y) とすると点 P_j の座標はそれぞれ次のように表わすことができる。

$$P_1: (x+h, y), P_2: (x, y+h)$$

$$P_3: (x-h, y), P_4: (x, y-h)$$

したがって (1) 式の右辺を左辺に移項して整理し、両辺を h^2 で割り、 h を十分小さくすれば次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{4} \{ & U[(x+h, y) \rightarrow Q_i] - 2U[(x, y) \rightarrow Q_i] \\ & + U(x-h, y) \rightarrow Q_i] + U(x, y+h) \rightarrow Q_i] \\ & - 2U[(x, y) \rightarrow Q_i] + U[(x, y-h) \rightarrow Q_i] \} \\ \simeq \frac{1}{4} \Delta U = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{ただし } \Delta \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

(2) 式は Laplace の方程式である。以上のように確率を表わす関数 U は Laplace の方程式を満足することは明らかである。この関係は三次元の場合にも簡単に拡張できる。

2.2 到達確率の数値計算の方法

上に述べた到達確率 U の数値計算についてはいくつかの方法が考えられる。

(1) 連立方程式による方法 (Liebmann の方法⁵⁾)

階差法によって一般に $\Delta U(x, y) = 0$ は次式のような代数方程式で表わせる。

* The Method of Test and the Transformation of Distribution of Random Number utilizing Random Walk Simulation, by Tadashi Ishiketa (Faculty of Engineering, Osaka City University)

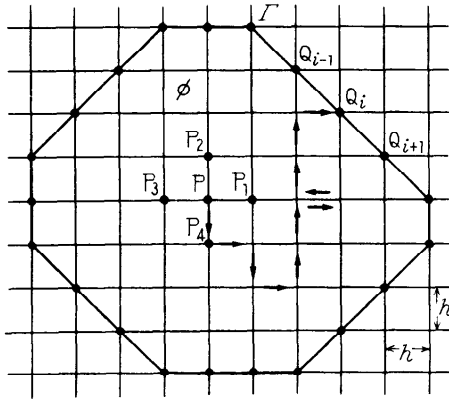
** 大阪市立大学工学部

$$U(x+h, y) + U(x, y+h) + U(x-h, y) + U(x, y-h) - 4U(x, y) = 0 \quad (3)$$

(3)式を境界内のすべての格子点について求め、これらを連立一次方程式として解けばUの値が得られるが、格子点の数が非常に多い場合には方程式の数も多くなり、多大の労力を要するのでデジタル形電子計算機によらねばならない。

(2) 確率計算による方法

ランダム・ウォーク・ポイントが一つの格子点の間を移動する確率、すなわち1ステップ進む確率は前述のように1/4であるから、点Pから点Q_iへ到達するまでにnステップ(第1図の場合の→印の総計にあ



第1図 二次元のランダム・トリップの一例

たる)を要したとすればその確率は(1/4)ⁿとなる。この値にnステップを要して到達する道順の数K_nを乗じたもののnについての総和をとればU(P→Q_i)が求められる。

$$U(P \rightarrow Q_i) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (4)$$

(3) 質量分割法⁹⁾

出発点Pに質量1の質点を置く。これを質量1/4の四つの質点に分割して、Pの4隣接点P₁, P₂, P₃, P₄に移す。これら1/4質量の質点の各々をさらに4等分して質量を(1/4)²とし、P_j(j=1, 2, 3, 4)から各質点をそれぞれの4隣接点に移す。このような操作を繰り返し続け、これらの各質点が境界Γ上の点Q_iに到達したときこの点にとどまるものとする。点Pから出発してn回の操作を繰り返して、点Q_iに集まる質量をP_n(P→Q_i)と表わすと、これはnを大きくしていくと次第に一つの極限值に近づくが、この極限值はU(P→Q_i)に相当する。

$$U(P \rightarrow Q_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(P \rightarrow Q_i) \quad (5)$$

この課程をデジタル形電子計算機によって模擬した例があり、爆発法と名付けられている。

(4) モンテカルロ法

この方法は実際に乱数を用いて実験的にUの値を求める方法で、点Pを出発したランダム・ウォーク・ポイントが点Q_iに到達する回数mとランダム・トリップの総数Mとの比がU(P→Q_i)の推定値Ūとなる。

$$\tilde{U}(P \rightarrow Q_i) = \frac{m}{M} \quad (6)$$

筆者らが開発したランダム・ウォーク装置はこれを自動的に行なわせるものである。(1), (2)および(3)の方法は決定論的であるので、ここでは解析的方法と名づけ、これらの方法に対して(4)の方法を実験的方法と呼ぶことにする。

2.3 計算例

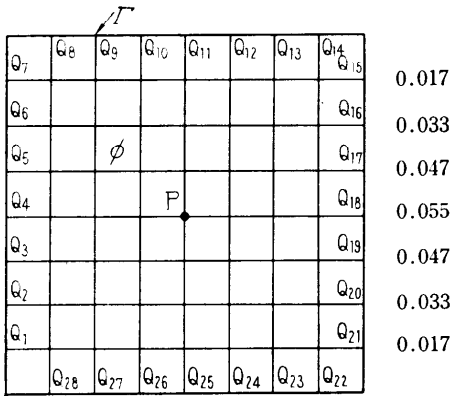
境界Γを解析的に取り扱いやすい正方形を選び、出発点Pを中心にとった場合のU(P→Q_i)の値を解析的方法および実験的方法によって求めて比較した。第2, 3, 4図はそれぞれ正方計の一边を、4分割, 6分割, 8分割した場合を示す。図の一边にU(P→Q_i)およびŪ(P→Q_i)の値を付記してある。正方形の内部の格子点が増すと、解析的方法によってU(P→Q_i)の値を求めるのは困難になるので、第4図には、

	Γ			
Q ₃	Q ₄	Q ₅	Q ₆	
Q ₂	φ	P	Q ₇	
Q ₁			Q ₈	
	Q ₁₂	Q ₁₁	Q ₁₀	Q ₉
	(1)の方法	(2)の方法	(3)の方法	(4)の方法
	0.0625	0.06250	0.06250	0.062
	0.1250	0.12500	0.12500	0.126
	0.0625	0.06250	0.06250	0.062

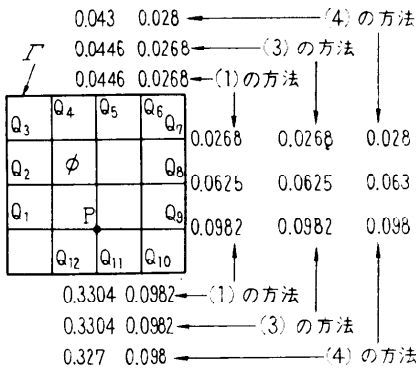
第2図 境界Γ, 領域φ, UおよびŪの値の一例

	Γ					
Q ₅	Q ₆	Q ₇	Q ₈	Q ₉	Q ₁₀	Q ₁₁
Q ₄	φ					Q ₁₂
Q ₃			P			Q ₁₃
Q ₂						Q ₁₄
Q ₁						Q ₁₅
Q ₂₀	Q ₁₉	Q ₁₈	Q ₁₇	Q ₁₆		
	(2)の方法	(3)の方法	(4)の方法			
	0.02885	0.02885	0.029			
	0.05769	0.05769	0.057			
	0.07692	0.07692	0.077			
	0.05769	0.05769	0.057			
	0.02885	0.02885	0.029			

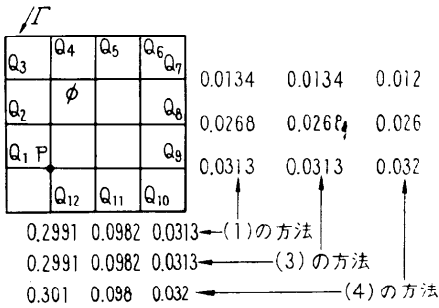
第3図 境界Γ, 領域φ, UおよびŪの値の一例



第4図 境界Γ, 領域φおよび \tilde{U} の値の一例



第5図 境界Γ, 領域φ, Uおよび \tilde{U} の値の一例



第6図 境界Γ, 領域φ, Uおよび \tilde{U} の値の一例

(4)の方法による $\tilde{U}(P \rightarrow Q_i)$ の値のみを示してある。第5, 6図に一边を4分割し, 出発点Pを中心以外の格子点にとった場合の $U(P \rightarrow Q_i)$ および $\tilde{U}(P \rightarrow Q_i)$ の値を示す。図中(4)の方法による $\tilde{U}(P \rightarrow Q_i)$ の値は, 10,000回のランダム・トリップの結果から求めたもので, 一般にこの値の信頼性は中心極限定理によって評価される。

3. 乱数検定法

3.1 原理と方法

理想的な一様乱数すなわち等確率に出現する乱数を用いて前述の方法でランダム・ウォークを行なった場合, ランダム・ウォーク・ポイントの到達確率を表わす関数 U の値が, 第2章で示したように解析的方法で求めた値に一致することに着目して, 検定すべき乱数を用いてランダム・ウォークを行なわせ, この実験的方法によって得られる \tilde{U} の値と, 別に解析的方法によって求めた U の値との間で χ^2 検定を行なえば, 検定すべき乱数のランダムネスの一面を評価することができる。この場合境界 Γ としては解析的に取り扱いやすい正方形や長方形, あるいは立方体などを選ぶ。

3.2 実験結果と考察

乱数信号としてはランダム・ウォークの4方向を定める $+X, -X, +Y, -Y$ の4種を用い, 第2図に示した正方形(一边4分割)の場合について, 1,600回のランダム・トリップを行なったが, それに要した乱数は7,217個であった。したがってトリップあたりの平均ステップ数は4.5である。第1表に各 Q_i 点にお

第1表 ランダム・ウォークによる検定の結果

到達点	$U(P \rightarrow Q_i)$	$\tilde{U}(P \rightarrow Q_i)$	$ U - \tilde{U} $	χ^2
Q1	0.0625	0.0569	0.0056	0.81
Q2	0.1250	0.1219	0.0031	0.13
Q3	0.0625	0.0700	0.0075	1.44
Q4	0.0625	0.0494	0.0131	4.41
Q5	0.1250	0.1219	0.0031	0.13
Q6	0.0625	0.0663	0.0038	0.36
Q7	0.0625	0.0588	0.0037	0.36
Q8	0.1250	0.1244	0.0006	0.01
Q9	0.0625	0.0631	0.0006	0.01
Q10	0.0625	0.0719	0.0094	2.25
Q11	0.1250	0.1419	0.0164	3.37
Q12	0.0625	0.0538	0.0087	1.96
計	1.0000	1.0003		15.24

ける $U(P \rightarrow Q_i)$ ($i=1, 2, \dots, 12$)の値, 実験による推定値 $\tilde{U}(P \rightarrow Q_i)$, $U - \tilde{U}$ の絶対値および χ^2 の値を示す。第2表には同時に行なった頻度検定による結果を示す。この場合一様乱数であるため, 各乱数はそれぞれ1/4の確率で出現することが期待されるのでそれを理論値とし, 表には理論値, 出現値, 理論値と出現値との差の絶対値および χ^2 の値を示してある。

\tilde{U} が解析値 U に一致すれば乱数は等確率に出現しているという仮説のもとに χ^2 検定を行なった。自由度11, $\chi^2=15.24$ であったので, この場合の χ^2 検定の結

第2表 頻度検定による結果

乱数	理論値	出現値	理論値-出現値	χ^2
+X	0.2500	0.2504	0.0004	0.00
-X	0.2500	0.2439	0.0061	1.07
+Y	0.2500	0.2476	0.0024	0.16
-Y	0.2500	0.2581	0.0081	1.99
計	1.0000	1.0000		3.22

果は確率 0.20 と 0.10 との間である。一般には有意水準 0.05 を基準にしているの、この基準に従えば上の仮説は棄却されない。同様に頻度による方法も、+X, -X, +Y, -Y の4種の乱数が等確率に出現するという仮説をたて χ^2 検定を行なったが、自由度 3, $\chi^2=3.22$ であったので、この場合の検定の結果は確率 0.50 と 0.30 との間であって同じ有意水準では上の仮説は棄却されない。

したがって、いまの場合どちらの検定にも合格して、乱数は一応等確率に出現したものとみなすことができる。ただし、前者の場合の方がきびしい検定になっている。このランダム・ウォークによる乱数検定にはさらに次のような特徴がある。

(1) たとえば乱数の列(いまの場合 +X, -X, +Y, -Y の列)の一部に、ある周期性が現われたとすると、ランダム・ウォーク・ポイントが境界へなかなか到達しないとか、あるいは、ある格子点へばかり到達するというようなことが起こるので、これをチェックすることができる(頻度検定ではこのようなチェックはできない)。

(2) ある乱数(たとえば +X)の出現確率が他のものよりも高いときは、ランダム・ウォーク・ポイントがその乱数によって決定される方向(X軸の+方向)に移動する確率が高くなり、その結果が \tilde{U} の値に影響するので乱数の出現確率のかたよりもある程度推定でき頻度検定も兼ねている。このことは実験結果にもよく現われている。すなわち第2表に示すように乱数 -Y の出現値が他のものより大きい、その影響が明らかに第1表に示す $U(P \rightarrow Q_{11})$ に現われている。

ここで関数 U と乱数の出現確率との関連について簡単な考察を行なってみる。

関数 $U(P \rightarrow Q_i)$ は乱数 +X, -X, +Y, -Y の出現確率 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を変数にもつものとし、これを $U(P \rightarrow Q_i, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ と書くことにする。理想的な一様乱数の場合には $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はそれぞれ 1/4 であるが、一般には 1/4 よりそれぞれ $d\alpha, d\beta, d\gamma, d\delta$ だ

けのかたよりがあるとすると、 $U(P \rightarrow Q_i, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ は $U(P \rightarrow Q_i, 1/4+d\alpha, 1/4+d\beta, 1/4+d\gamma, 1/4+d\delta)$ と書くことができる。 $d\alpha, d\beta, d\gamma, d\delta$ が微小であるとして Taylor 展開を行なうと、

$$\begin{aligned} & U(P \rightarrow Q_i, 1/4+d\alpha, 1/4+d\beta, 1/4+d\gamma, 1/4+d\delta) \\ & - U(P \rightarrow Q_i, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4) \\ & = d\alpha \frac{\partial U}{\partial \alpha} + d\beta \frac{\partial U}{\partial \beta} + d\gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma} + d\delta \frac{\partial U}{\partial \delta} \\ & + \frac{1}{2} \left(d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + d\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \dots \right)^2 U + \dots \quad (7) \end{aligned}$$

(7) 式の左辺は等確率に出現していない乱数を用いたときの U の値と等確率に出現している乱数を用いたときの U の値すなわち解析的に求めることのできる U の値との差でランダム・ウォークの実験によって求めることができるものであり、また右辺の二次の導関数以上の項を省略すると、 $d\alpha, d\beta, d\gamma, d\delta$ は乱数の出現の頻度によって知ることができるので、 $\partial U/\partial \alpha, \partial U/\partial \beta, \partial U/\partial \gamma, \partial U/\partial \delta$ の値、したがって右辺が求まる。この関係からわかるように、もし $\partial U/\partial \alpha, \partial U/\partial \beta, \partial U/\partial \gamma, \partial U/\partial \delta$ が 1 より大きいと、乱数の出現確率のかたよりが大きく現われることになる。したがってこのような場合は(7)式の左辺の情報を用いる本検定法は頻度検定より出現確率のかたよりを敏感に検出できるものと考えられる。もっとも $\partial U/\partial \alpha, \partial U/\partial \beta, \partial U/\partial \gamma, \partial U/\partial \delta$ が一般に 1 より大であるかどうかは現在のところ明らかではない。

4. 乱数の分布変換法

4.1 原理と方法

第2章で述べたように境界 Γ , 閉領域 ϕ , 出発点 P および到達点 Q_i を与えると $U(P \rightarrow Q_i)$ が一意に定まる。いい換えると、ランダムウォーク・ポイントは $U(P \rightarrow Q_i)$ なる確率で点 Q_i に到達するといえる。したがってランダム・ウォーク・ポイントが点 Q_i に到達したことをもって、 $U(P \rightarrow Q_i)$ なる確率に相当する信号が得られるが、この信号は、出現確率 $U(P \rightarrow Q_i)$ をもつ乱数とみなすことができる(付1)。また各境界点に到達する信号を適当に組み合わせ取り出すと、任意の出現確率をもった乱数が得られる。したがって、任意の分布 f , たとえば正規分布とか、Poisson 分布などの乱数を、この分布 f に対応するように $U(P \rightarrow Q_i)$ を組み合わせ信号を取り出すことによって得ることができる(付2)。一般にこのような操作により、ランダム・ウォークを行なわせるのに

使用した一様乱数を任意の分布の乱数に変換することができるのであって、これがランダム・ウォークを利用した乱数の分布変換法の原理である。なおこの場合乱数の値は $U(P \rightarrow Q_i)$ の組み合わせ点すなわち番号の取り出し点の番号に対応させる。

適用例 1. 一様乱数を正規形 $N(0, 1)$ 乱数 (平均値 $\mu=0$, 標準偏差 $\sigma=1$ の乱数) に変換するため第 4 図に示した正方形において出発点 P を中心にとった場合の $U(P \rightarrow Q_i)$ を組み合わせた。

第 3 表に σ を 0.5 きざみにとった場合の正規形乱数の出現確率の理論値と、それを実現させるための $U(P \rightarrow Q_i)$ の組み合わせ (表には $U(Q_i)$ と書いてある), その場合の組み合わせた $U(P \rightarrow Q_i)$ すなわち出現確率および理論値と出現確率との差である設定誤差を示す。

第 3 表 正規形乱数への変換の場合の $U(Q_i)$ の組み合わせ

σ	理論値	$U(Q_i)$ の組み合わせ	出現確率	設定誤差
$-\infty \sim -3.0$	0.001	—	0.000	0.001
$-3.0 \sim -2.5$	0.005	—	0.000	0.005
$-2.5 \sim -2.0$	0.017	$U(Q_1)$	0.017	0.000
$-2.0 \sim -1.5$	0.044	$U(Q_2)$	0.047	0.003
$-1.5 \sim -1.0$	0.092	$U(Q_3)+U(Q_{10})$	0.094	0.002
$-1.0 \sim -0.5$	0.150	$U(Q_2)+U(Q_6)+U(Q_7)+U(Q_9)+U(Q_{13})$	0.149	0.001
$-0.5 \sim 0$	0.191	$U(Q_4)+U(Q_8)+U(Q_{11})+U(Q_{12})+U(Q_{14})$	0.191	0.000
$0 \sim 0.5$	0.191	$U(Q_{15})+U(Q_{17})+U(Q_{18})+U(Q_{21})+U(Q_{22})$	0.191	0.000
$0.5 \sim 1.0$	0.150	$U(Q_{16})+U(Q_{20})+U(Q_{23})+U(Q_{25})+U(Q_{27})$	0.149	0.001
$1.0 \sim 1.5$	0.092	$U(Q_{19})+U(Q_{24})$	0.094	0.002
$1.5 \sim 2.0$	0.044	$U(Q_{26})$	0.047	0.003
$2.0 \sim 2.5$	0.017	$U(Q_{28})$	0.017	0.000
$2.5 \sim 3.0$	0.005	—	0.000	0.005
$3.0 \sim \infty$	0.001	—	0.000	0.001
計	1.000		0.996	

適用例 2. 一様乱数を Poisson 形乱数 (平均値 k , 標準偏差 \sqrt{k} , $y=e^{-k} \cdot k^x/x!$) に変換するため同じく第 4 図に示した正方形において出発点 P を中心にとった場合の $U(P \rightarrow Q_i)$ を組み合わせた。

第 4 表に $k=2.0$, $x=0, 1, \dots, 8$ とした場合の Poisson 形乱数の出現確率の理論値とそれを実現させるために $U(P \rightarrow Q_i)$ の組み合わせ, その場合の組み合わせた $U(P \rightarrow Q_i)$ すなわち出現確率および設定誤差を示す。

この場合理論値の小さい値のもの (正規形では σ が $\pm \infty \sim \pm 3.0$, $\pm 3.0 \sim \pm 2.5$ (複号同順) の場合,

第 4 表 Poisson 形乱数への変換の場合の $U(Q_i)$ の組み合わせ

x	理論値	$U(Q_i)$ の組み合わせ	出現確率	設定誤差
0	0.135	$U(Q_2)+U(Q_6)+U(Q_9)+U(Q_{12})$	0.132	0.003
1	0.271	$U(Q_3)+U(Q_{10})+U(Q_{16})+U(Q_{17})+U(Q_{22})+U(Q_{23})+U(Q_{24})$	0.271	0.000
2	0.271	$U(Q_5)+U(Q_{12})+U(Q_{19})+U(Q_{20})+U(Q_{26})+U(Q_{27})+U(Q_{28})$	0.271	0.000
3	0.180	$U(Q_{11})+U(Q_{18})+U(Q_{21})+U(Q_{25})$	0.182	0.002
4	0.090	$U(Q_4)+U(Q_{14})+U(Q_{15})$	0.089	0.001
5	0.036	$U(Q_7)+U(Q_8)$	0.034	0.002
6	0.012	$U(Q_i)$	0.017	0.005
7	0.003	—	0.000	0.003
8	0.001	—	0.000	0.001
計	0.999		0.996	

Poisson 形では $x=7$, $x=8$ の場合は第 4 図のような領域での到達確率 $U(P \rightarrow Q_i)$ の組み合わせでは、実現できないので省略したが、さらに精度を高めるためには、すなわち設定誤差を小さくするには、一辺の分割数を多くし、到達確率 $U(P \rightarrow Q_i)$ の値を小さくして組み合わせるとよい。適用例 1 および 2 における設定誤差は最大 0.5% 程度であった。

4.2 実験結果と考察

前述の原理に基づきランダム・ウォーク装置を使用し、ランダム・トリップの回数を 10,000 として一様乱数を正規形乱数および Poisson 形乱数に変換する実験を行なった。第 5 表および第 6 表に出現確率、実験値、出現確率と実験値との差および理論値と実験値との差を示す。この表からみると理論値と実験値との間には最大 1.2% の差があるが、この程度の差が許容されるかどうかは、この変換した乱数の使用目的による。

第 5 表 実験結果

σ	出現確率	実験値	出現確率 - 実験値	理論値 - 実験値
$-\infty \sim -3.0$	0.000	0.000	0.000	0.001
$-3.0 \sim -2.5$	0.000	0.000	0.000	0.005
$-2.5 \sim -2.0$	0.017	0.018	0.001	0.001
$-2.0 \sim -1.5$	0.047	0.041	0.006	0.003
$-1.5 \sim -1.0$	0.094	0.091	0.003	0.001
$-1.0 \sim -0.5$	0.149	0.153	0.004	0.003
$-0.5 \sim 0$	0.191	0.192	0.001	0.001
$0 \sim 0.5$	0.191	0.192	0.001	0.001
$0.5 \sim 1.0$	0.149	0.151	0.002	0.001
$1.0 \sim 1.5$	0.094	0.104	0.010	0.012
$1.5 \sim 2.0$	0.047	0.046	0.001	0.003
$2.0 \sim 2.5$	0.017	0.016	0.001	0.001
$2.5 \sim 3.0$	0.000	0.000	0.000	0.005
$3.0 \sim \infty$	0.000	0.000	0.000	0.001
計	0.996	1.004		

第6表 実験結果

α	出現確率	実験値	出現確率～実験値	理論値～実験値
0	0.132	0.135	0.003	0.000
1	0.271	0.270	0.001	0.001
2	0.271	0.273	0.002	0.002
3	0.182	0.183	0.001	0.003
4	0.089	0.086	0.003	0.004
5	0.034	0.034	0.000	0.002
6	0.017	0.018	0.001	0.006
7	0.000	0.000	0.000	0.003
8	0.000	0.000	0.000	0.001
計	0.996	0.999		

この方法は一様乱数1個に対して変換した乱数1個が対応するのではないから1トリップあたりの平均ステップ数(使用した一様乱数の個数)が大きいほど変換能率が悪いわけであるが、最近高速の一様乱数発生器が開発されつつあるので、これを用いると、本方法でも従来のデジタル形電子計算機による分布変換の方法による発生速度と同程度のものを得ることができると考えられる。

5. むすび

以上述べたランダム・ウォークを利用する乱数の検定法ならびに分布変換法はともに製作したランダム・ウォーク装置を利用する立場から考案したものであるが、もちろんこの方法はデジタル形電子計算機でも容易に行なうことができる。

なおこれらの方法に関して未解決の問題は、

- (1) 乱数検定法においては乱数のもつランダムネスと到達確率との関連性を明らかにすること、
 - (2) 分布変換法においては精度の向上に伴う発生速度の低下に対する対策を講ずること、
- などである。

最後に本研究にあたって終始懇切なる指導を賜った本学工学部平井平八郎教授、種々の助言を賜った大阪大学工学部杉山博教授、大阪府立大学工学部宮武修教授、またデジタル形電子計算機の使用にあたって御援助下さった和歌山大学経済計測研究所ならびに和歌山大学学生小西健陽君に感謝する。

参考文献

- (1) 平井・浅居・北嶋・石桁：三次元ランダム・ウォーク装置とその応用，昭和37年度電気関係学会関西支部連合大会講演論文集，4-2。
- (2) 平井・浅居・石桁：ランダム・ウォーク装置と乱数検定への応用，電気通信学会電子計算機の研究，昭和38年1月，pp. 8~12。

(3) 石桁：情報処理学会関西支部第3回数値解析分科会における報告，昭和39年2月。

(4) 平井・石桁：三次元ランダム・ウォーク装置を利用した任意乱数発生法とその応用，昭和39年度電気四学会連合大会講演論文集，332。

(5) 日高：数値計算，岩波講座物理学，昭和13年，pp. 72~89。

(6) 宮武・中山：モンテカルロ法，日刊工業新聞社，昭和35年，pp. 98~101。

(7) H. Sugiyama and K. Joh: Some Probabilistic Methods for Numerical Analysis in Case of Boundary Value Problems of Partial Differential Equations (I), Technology Reports of The Osaka University, Vol. 12, No. 508, pp. 199~215, October, 1962.

〔付録1〕

ランダム・ウォークの性質上ランダム・ウォーク・ポイントの各格子点 Q_i への到達はまったく確率的であると考えられるが、実験的に検討するため、第3図に示した一辺6分割の正方形の領域で出発点を中心にとって400回のランダム・トリップを行ない、まずランダム・ウォーク・ポイントの各格子点 Q_i ($i=1, 2, \dots, 20$) への到達順序を記録した。次に各格子点 Q_i に整数 i を対応させ、たとえば到達点 Q_2, Q_5, Q_{15}, \dots であったとすると整数 $2, 5, 15, \dots$ と表わした。上のようにして得た整数列を I_0 で表わし、これについて自己相関を求めた。この場合 I_0 の平均値 \bar{I} は第3図の $U(P \rightarrow Q_i)$ を用いて理論的に次式のように表わすことができる。

$$\bar{I} = \sum_{i=1}^{20} i \times U(P \rightarrow Q_i) = 10.5 \quad (\text{付1})$$

また自己相関関数 $\phi(n)$ の期待値 $\bar{\phi}(n)$ は理論的に次式のように表わすことができる。

$$\bar{\phi}(n) = \bar{I}_0 \times \bar{I}_n \approx \bar{I}^2 = 110.25 \quad (\text{付2})$$

ただし I_n は I_0 について整数 n 個をずらせた整数列とし、 n は $1, 2, \dots$ とする。第7表に400個の整数について実際に $\phi(n)$ を求めた結果を示す。この結果はランダム・ウォーク・ポイントの到達が確率的で

第7表 自己相関関数の値

n	$\phi(n)$	n	$\phi(n)$
1	109.5	6	106.8
2	109.1	7	110.6
3	108.6	8	113.9
4	109.1	9	111.8
5	110.2		

あることを示している。

〔付録 2〕

一様乱数を任意の分布 f をもつ乱数に変換するためには、この分布 f に対応するように $U(P \rightarrow Q_i)$ を組み合わせることで信号を取り出すのであるが、分布 f が離散の場合には問題はないが、連続の場合には適当な区間に分けて各区間の値を $U(P \rightarrow Q_i)$ の値に対応させるようにする。組み合わせ方は一意的ではないので、設定誤差を最小にするように試行錯誤的に組み合わせる。境界 Γ 、閉領域 ϕ は解析的に取り扱いやすい正方形などに選ぶとよいが、分布 f によってどうしても組み合わせがうまくいかないときは閉領域 ϕ の中へ適当に境界点 Q'_j (出発点 P を避ける) を設定してそ

の点 Q'_j へ到達する確率 $U(P \rightarrow Q'_j)$ を用いて組み合わせることも考えられる。この場合ランダム・ウォーク・ポイントが Γ 上の点 Q_i へ到達する確率が第 2.3 節で求めた $U(P \rightarrow Q_i)$ とは異なり、解析的方法でこの到達する確率を求めることが困難になるので、そのときはあらかじめ必要とする乱数(変換後のもの)の 100 倍程度のランダム・トリップを行ない、 $\tilde{U}(P \rightarrow Q_i)$ および $\tilde{U}(P \rightarrow Q'_j)$ を求めておいて、これらの \tilde{U} の値を解析値 U として用いることも考えられる。この場合の \tilde{U} の信頼性も中心極限定理によって評価される。

(昭和 40 年 4 月 18 日受付)