

特異値計算アルゴリズム dqds 法および mdLVs 法のための新しいシフト戦略

高田 雅美^{1,a)} 石上 裕之^{2,b)} 木村 欣司^{2,c)} 山下 巧^{2,d)} 岩崎 雅史^{3,e)} 中村 佳正^{2,f)}

概要: 本論文では、新しいシフト戦略として Algebraic シフト を提案することによって、特異値計算アルゴリズム dqds 法および m2dLVs 法の計算速度と相対精度を改善する。従来、LAPACK に実装された dqds 法では、経験則に基づく aggressive シフトを採用している。従来の mdLVs 法では、Johnson シフトを採用している。aggressive シフトは高速に計算されるが、無誤差の計算でも過大なシフトを与える可能性がある。Johnson シフトについては、その計算において平方根を多用するため、速度の面できわめて不十分である。そこで、本論文では、dqds 法および m2dLVs 法の両方に対して、数学理論に基づく Algebraic シフト を導入する。このシフト戦略の有効性を確認するために、従来のシフト戦略との比較を行う。

キーワード: 特異値計算, シフト戦略, Algebraic シフト, dqds 法, m2dLVs 法, LAPACK 3.4.2

New Shift Strategy in the dqds Algorithm and the mdLVs Algorithm for Singular Values

MASAMI TAKATA^{1,a)} HIROYUKI ISHIGAMI^{2,b)} KINJI KIMURA^{2,c)} TAKUMI YAMASHITA^{2,d)}
MASASHI IWASAKI^{3,e)} YOSHIMASA NAKAMURA^{2,f)}

Abstract: In this paper, we propose a new shift strategy "Algebraic shift", which improves computational time and relative errors in the dqds and m2dLVs algorithms for singular values. The dqds algorithm in LAPACK has adopted the aggressive shift, which is based on a rule of heuristics. The original mdLVs algorithm adopts the Johnson shift. While the aggressive shift is quickly computed, it may give a too large shift even in exact computation. Since the Johnson shift needs a lot of square root, the computational time is weakness. Therefore, we introduce the Algebraic shift, which has the proof based on mathematical theory, to the dqds and m2dLVs algorithms. To evaluate the shift strategy, we compare with existing shift strategy.

Keywords: singular value computation, shift strategy, Algebraic shift, dqds algorithm, m2dLVs algorithm, LAPACK version 3.4.2

¹ 奈良女子大学
Nara Women's University, Nara, Nara 630-8506, JAPAN
² 京都大学
Kyoto University, Kyoto, Kyoto 606-8501, JAPAN
³ 京都府立大学
Kyoto Prefectural University, Kyoto, Kyoto 606-8522, JAPAN
a) takata@ics.nara-wu.ac.jp
b) hishigami@amp.i.kyoto-u.ac.jp
c) kkimur@amp.i.kyoto-u.ac.jp
d) takumi@amp.i.kyoto-u.ac.jp
e) imasa@kpu.ac.jp
f) ynaka@i.kyoto-u.ac.jp

1. はじめに

線形数値計算において、特異値分解は重要な行列計算の1つである。特異値分解の応用分野としては、情報検索 [1] や画像処理 [14] が挙げられる。いくつかの特異値分解アルゴリズムでは、高速化のために、特異値計算と特異ベクトル計算が別々に実行される。この場合、計算された特異値の精度が、特異ベクトル計算の精度に影響を与える [18]。よって、高速かつ高精度な特異値計算法の開発が望まれる。既存の特異値計算法として、dqds (原点シフ

ト付き differential quotient-difference) 法 [2], [13], [15] と mdLVs (原点シフト付き modified discrete Lotka-Volterra) 法 [5], [17] がある. mdLVs 法は, 収束の最終局面におけるすぐれた安定性が示されている [6]. さらに, mdLVs 法の変形版として, m2dLVs (modified mdLVs) 法が開発されている [11]. m2dLVs 法は, mdLVs 法と同様に, 上 2 重対角行列の特異値を計算することができる. また, 誤差解析による数値安定性が示されており, 詳細な解析の結果として dqds 法と同程度の高精度性が証明されている [11]. ゆえに, m2dLVs 法を実装においても積極的に採用する. dqds 法と m2dLVs 法の漸化式の演算量を比較すると, dqds 法の方が少ない [11], [13]. そのため, m2dLVs 法よりも dqds 法の方が高速である. しかしながら, mdLVs 法同様, m2dLVs 法は, 収束の最終局面におけるすぐれた安定性が保証されているので, 高精度な特異値計算が期待できる.

dqds 法および m2dLVs 法は, 漸化式の反復計算を繰り返すことで, 特異値を得ることができる. これらの計算法の反復回数を減少させるために, 原点シフトが導入されている. シフト量を計算する方法として, dqds 法では aggressive シフト [13] を, mdLVs 法では Johnson シフト [7] を採用している. なお, dqds 法および m2dLVs 法は aggressive シフトや Johnson シフト以外にも, 任意のシフト戦略と組み合わせることが可能である. aggressive シフトは, 高速に計算されるが, 経験則に基づくシフトであるため, 無誤差の計算でも過大なシフトを与える可能性がある. 一方, Johnson シフトは, 平方根を多数必要とするため, 速度面で極めて不利である. また, シフト量として, 与えられた行列 Z に対する ZZ^T の最小固有値に非常に近い値を計算できず, 結果的に, m2dLVs 法における反復回数が多くなる可能性がある. そこで, 本論文では, aggressive シフトや Johnson シフトの欠点を解消するために, 新たなシフト戦略として Algebraic シフトを提案する.

2 章では, 特異値計算法である dqds 法, mdLVs 法および m2dLVs 法について説明する. 3 章では, Algebraic シフトについて提案する. 4 章では, aggressive シフトを用いた dqds 法, Johnson シフトを用いた m2dLVs 法, Algebraic シフトを組み込んだ dqds 法および m2dLVs 法について比較実験を行う.

2. 特異値計算法

2.1, 2.2, 2.3 節では, dqds 法, mdLVs 法, m2dLVs 法について, それぞれ, 紹介する.

2.1 dqds 法

M 次元上 2 重対角行列

$$B = B^{(0)} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} & b_2^{(0)} & & & 0 \\ & b_3^{(0)} & b_4^{(0)} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{2M-3}^{(0)} & b_{2M-2}^{(0)} \\ & & & & b_{2M-1}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

の特異値を計算する方法として, dqds 法がある. ここで, $B^{(0)}$ の対角成分は非負, 副対角成分はすべて正の浮動小数点数と仮定する. 仮に, ある副対角成分が 0 であるならば, 行列 $B^{(0)}$ を 2 つの小行列に分けて特異値計算を行うことができるため, 一般性を失わない仮定である [2]. Cholesky 分解を基本とした LR 法 [2], [16] の 1 反復においては,

$$\left(B^{(n+1)}\right)^T B^{(n+1)} = B^{(n)} \left(B^{(n)}\right)^T - S^{(n)} I \quad (2)$$

のような行列変形が実行される. ここで n は反復回数, $S^{(n)}$ はシフト量, I は単位行列とする. $\lambda_{\min} \left(B^{(n)} \left(B^{(n)}\right)^T\right)$ を, $B^{(n)} \left(B^{(n)}\right)^T$ の最小固有値とすると, シフト量 $S^{(n)}$ は,

$$0 \leq S^{(n)} < \lambda_{\min} \left(B^{(n)} \left(B^{(n)}\right)^T\right), \quad (3)$$

の範囲で選ぶことができる. できるだけ最小固有値 $\lambda_{\min} \left(B^{(n)} \left(B^{(n)}\right)^T\right)$ に近い値をシフト量 $S^{(n)}$ として設定できれば, 収束速度の向上が期待できる.

$$q_i^{(n)} = \left(b_{2i-1}^{(n)}\right)^2, \quad (4)$$

$$e_i^{(n)} = \left(b_{2i}^{(n)}\right)^2, \quad (5)$$

とする. ここで, 変数 i は ($i: 1 \leq i \leq M$) である. 補助変数 $d_i^{(n)}$ 導入して, 式 (2) の行列成分間に成り立つ等式を書き下すと,

$$\begin{aligned} d_1^{(n+1)} &= q_1^{(n)} - S^{(n)}, \\ q_1^{(n+1)} &= d_1^{(n+1)} + e_1^{(n)}, \\ e_1^{(n+1)} &= e_1^{(n)} \frac{q_2^{(n)}}{q_1^{(n+1)}}, \\ d_2^{(n+1)} &= d_1^{(n+1)} \frac{q_2^{(n)}}{q_1^{(n+1)}} - S^{(n)}, \\ &\vdots \\ q_M^{(n+1)} &= d_M^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (6)$$

となり, 特異値計算が可能となる. 反復計算を繰り返すことで, $q_i^{(n+1)}$ は上 2 重対角行列 B の特異値の 2 乗に収束する. これを dqds 法と呼ぶ. dqds 法では, $q_i^{(n+1)} = 0 (i = 1, \dots, M-1)$ となる場合には,

$$e_i^{(n+1)} = 0 \quad (7)$$

$$d_{i+1}^{(n+1)} = q_{i+1}^{(n)} - S^{(n)} \quad (8)$$

とすることで反復計算を継続できることが知られている [13]. $q_M^{(n+1)} = 0$ の場合には, 明らかに反復計算を継続できるように問題はない. しかし, 桁落ちの関係で, $q_i^{(n+1)}$, $d_i^{(n+1)}$ は正值性を保証するように実装するべきであり, そのため, 式 (3) では,

$$S^{(n)} < \lambda_{\min} \left(B^{(n)} \left(B^{(n)} \right)^\top \right), \quad (9)$$

と等号を含まない条件を採用している. ただし, 計算誤差の関係で, 式 (3) を満たした場合でも, 正值性を保証できない場合がある. その際は, $S^{(n)} = 0$ として反復計算を行う. また, 式 (3) において, $\lambda_{\min} \left(B^{(n)} \left(B^{(n)} \right)^\top \right)$ が 0 となる場合, すなわち $q_i^{(n)}$ が 0 となる場合にも, シフト量 $S^{(n)} = 0$ とすることによって, 反復計算を継続することができる [2]. $S^{(n)} = 0$ の場合には, dqds 法では, 明らかに $q_i^{(n+1)}$, $d_i^{(n+1)}$ の非負性が保証される.

2.2 mdLVs 法

複数の生物種の捕食関係を数式化した数理生物モデルとして, LV (Lotka-Volterra) 系 [20] が知られている. 可積分な場合の LV 系に対して, 可積分系特有の時間変数に関する離散化を行うと, 漸化式

$$u_k^{(n+1)} = \frac{1 + \delta^{(n)} u_{k+1}^{(n)}}{1 + \delta^{(n+1)} u_{k-1}^{(n+1)}} u_k^{(n)}, \quad (10)$$

が導出される [12]. ここで, k ($k = 1, 2, \dots, 2M - 1$) は種の番号, $u_k^{(n)}$ と $\delta^{(n)}$ は反復回数 n における変数 u_k と差分間隔をそれぞれ表す. この漸化式 (10) は dLV (discrete LV) 系と呼ばれる. $\delta^{(n)} > 0$ と選ぶことによって, 漸化式 (10) では減算や零による除算は発生しない. また, $u_k^{(0)} > 0$ ならば, すべての n に対して $u_k^{(n)} > 0$ のように, 常に正值性が保たれる.

漸化式 (10) の境界条件と初期値を, それぞれ

$$u_0^{(n)} \equiv 0, \quad u_{2M}^{(n)} \equiv 0, \quad (11)$$

$$u_k^{(0)} = \frac{(b_k^{(0)})^2}{1 + \delta^{(0)} u_{k-1}^{(0)}}, \quad (12)$$

とする. 反復回数 $n \rightarrow \infty$ で, $u_{2i-1}^{(n)}$ は第 i 番目の特異値の 2 乗に, $u_{2i}^{(n)}$ は 0 に収束する. これが, dLV 法と名付けられた特異値計算法の動作原理である.

dLV 法を効率的なアルゴリズムとするために, 原点シフトを導入する [12]. これにより, 反復回数が減少する. まず, 変数 $w_k^{(n)}$ と $v_k^{(n)}$ を用いて, dLV 系を再定義する.

$$w_k^{(n)} = \frac{u_k^{(n)}}{1 + \delta^{(n)} u_{k-1}^{(n)}}, \quad (13)$$

$$v_k^{(n)} = u_k^{(n)} \left(1 + \delta^{(n)} u_{k+1}^{(n)} \right), \quad (14)$$

$$w_k^{(n+1)} = v_k^{(n)}. \quad (15)$$

この際, 式 (12) より, $w_k^{(0)} = b_k^{(0)2}$ となる. ここで,

$$Z^{(n)} = \begin{pmatrix} \sqrt{v_1^{(n)}} & \sqrt{v_2^{(n)}} & & & \\ & \sqrt{v_3^{(n)}} & \sqrt{v_4^{(n)}} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \sqrt{v_{2M-3}^{(n)}} & \sqrt{v_{2M-2}^{(n)}} \\ & & & & \sqrt{v_{2M-1}^{(n)}} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

とすると, シフト量 $S^{(n)}$ は,

$$0 \leq S^{(n)} < \lambda_{\min} \left(\left(Z^{(n)} \right)^\top Z^{(n)} \right), \quad (17)$$

の範囲から選ばれる. すなわち, 漸化式 (13)-(15) のみで構成されるアルゴリズムの収束を加速するために, 式 (15) を

$$\begin{aligned} w_{2i-1}^{(n+1)} &= v_{2i-1}^{(n)} + v_{2i-2}^{(n)} - w_{2i-2}^{(n+1)} - S^{(n)}, \\ w_{2i}^{(n+1)} &= \frac{v_{2i-1}^{(n)} v_{2i}^{(n)}}{w_{2i-1}^{(n+1)}}, \end{aligned} \quad (18)$$

に変更する [12]. よって, dLV 法に原点シフトを導入した特異値計算法 mdLVs 法は, 式 (13), (14) および (18) で定義される [4]. mdLVs 法 [17] では, Johnson 下界 [7] が利用されている. 一般的に, 式 (17) の範囲で $S^{(n)}$ を大きくすると収束は加速されるが, 大きすぎると $u_k^{(n)}$ の正值性が崩れ, 場合によっては mdLVs 法が数値不安定になる. よって, 漸化式 (18) において式 (17) を満たさないシフト量を採用したならば, 式 (18) ではなく式 (15) によって反復させることによって, $u_k^{(n)}$ の正值性を保つように実装されている [5], [12].

dLV 法においては, 入力行列 $B = B^{(0)}$ の対角および副対角成分は正の値の浮動小数点数とし, 以降の計算における $u_k^{(n)}$, $w_k^{(n)}$ と $v_k^{(n)}$ はすべて正の値の浮動小数点数とする. よって, $B^{(0)}$ の対角成分が非負と仮定する dqds 法よりも, 強い仮定が必要となる. 数値計算では, 丸め誤差の影響により, すべての $u_k^{(n)}$ が正の値の浮動小数点数であっても, 漸化式 (13)-(15) による反復計算の後, ある $u_j^{(n+1)}$ が 0 となりうるからである. j が偶数の場合には, 行列を 2 つの小行列に分けて特異値計算を行えばよい. 問題はならない [2]. しかし, j が奇数の場合には, 現在, 理論解析ならびに実装における対処法は現時点で確立されていない. 後者のような場合の理論的考察は, mdLVs 法における今後の課題である.

2.3 m2dLVs 法

mdLVs 法に関して, 計算機上において $\lambda_{\min} \left(\left(Z^{(n)} \right)^\top Z^{(n)} \right)$ に非常に近いシフト量を用いた場合, 有効桁数が原因で, 桁落ちが生じる可能性がある.

この状況を改善するために,

$$f_i^{(n)} = (S^{(n)} + w_{2i-2}^{(n+1)}) - v_{2i-2}^{(n)}, \quad (19)$$

を導入する. ここで, 変数 $f_1^{(n)} = S^{(n)}$ とする. このとき, 漸化式 (18) は,

$$\begin{aligned} w_{2i-1}^{(n+1)} &= v_{2i-1}^{(n)} - f_i^{(n)}, \\ w_{2i}^{(n+1)} &= v_{2i}^{(n)} \frac{v_{2i-1}^{(n)}}{w_{2i-1}^{(n+1)}} = v_{2i-1}^{(n)} \frac{v_{2i}^{(n)}}{w_{2i-1}^{(n+1)}}, \end{aligned} \quad (20)$$

と書き換えることができる. また,

$$\begin{aligned} f_{i+1}^{(n)} &= S^{(n)} - v_{2i}^{(n)} + w_{2i}^{n+1} \\ &= S^{(n)} + \left(\frac{v_{2i}^{(n)}}{w_{2i-1}^{(n+1)}} \right) (f_i^{(n)}), \end{aligned} \quad (21)$$

が得られる. 以上より, 漸化式

$$\begin{aligned} f_1^{(n)} &= S^{(n)}, \\ f_{i+1}^{(n)} &= S^{(n)} + \left(\frac{v_{2i}^{(n)}}{w_{2i-1}^{(n+1)}} \right) (f_i^{(n)}), \\ w_{2i-1}^{(n+1)} &= v_{2i-1}^{(n)} - f_i^{(n)}, \\ w_{2i}^{(n+1)} &= v_{2i}^{(n)} \frac{v_{2i-1}^{(n)}}{w_{2i-1}^{(n+1)}} = v_{2i-1}^{(n)} \frac{v_{2i}^{(n)}}{w_{2i-1}^{(n+1)}}, \end{aligned} \quad (22)$$

によって, mdLVs 法と同様に上 2 重対角行列の特異値が計算できる. 本論文では, これを m2dLVs 法と呼ぶ. m2dLVs 法は, mdLVs 法とは異なり, 誤差解析による数値安定性が示されている [11]. そのため, m2dLVs 法に基づいて信頼性の高い特異値計算コードを開発することができる.

3. シフト戦略

本章では, dqds 法および m2dLVs 法に対して有用なシフト戦略として, 新たに Algebraic シフトを提案する. なお, 本章の議論では, dqds 法の変数を用いて説明しているが, m2dLVs 法の変数に置き換えることは容易である.

3.1 節では, aggressive 下界について, 3.2 節では, Johnson 下界について説明する. 3.3, 3.4 および 3.5 節では, Algebraic シフトで用いる 4 種類のシフト量の計算法を示す. 3.6 節では, 4 種類のシフト量の計算法を組み合わせた Algebraic シフトについて説明する.

3.1 aggressive シフト

LAPACK に実装された dqds 法では, 経験則に基づく aggressive シフト戦略を採用している [9]. $d_{M-2}^{(n+1)}$, $d_{M-1}^{(n+1)}$, $d_M^{(n+1)}$, $\min_{1 \leq i \leq M-2} d_i^{(n+1)}$, $\min_{1 \leq i \leq M-1} d_i^{(n+1)}$, $\min_{1 \leq i \leq M} d_i^{(n+1)}$ と, $q_i^{(n+1)}$, $e_i^{(n+1)}$ の部分的な情報を基に, 12 種類のシフト戦略を使い分けている. さらに, その 12 種類のシフト戦略においても, 行列全体の情報を参照す

ることなく下界を計算する [13].

ここで,

$$\lambda_{\min} \left(B^{(n+1)} \left(B^{(n+1)} \right)^\top \right) \leq \min_{1 \leq i \leq M} \left(d_i^{(n+1)} + S^{(n)} \right) \quad (23)$$

が成り立つことに注意する [2]. 反復計算が繰り返されると, 右辺値は左辺値に近づくことが示されているが [2], 右辺値は上界であるため, なんらかの手法を用いて, その上界の値を基に左辺値の下界を計算する必要がある. しかし, 行列成分すべてを参照することなく, 右辺値と行列 $B^{(n)}$ の一部の成分から, 左辺値の下界を導く数学的に厳密な公式は知られていない.

また,

$$\begin{aligned} \Phi_a &= \left\{ \sum_{i=1}^M \frac{1}{d_i^{(n+1)} + S^{(n)}} \right\}^{-1} - S^{(n)} \\ &< \left\{ \sum_{i=1}^M \left[\left(B^{(n)} \left(B^{(n)} \right)^\top \right)^{-1} \right]_{ii} \right\}^{-1} - S^{(n)} \\ &< \lambda_{\min} \left(B^{(n)} \left(B^{(n)} \right)^\top \right) - S^{(n)} \\ &= \lambda_{\min} \left(B^{(n+1)} \left(B^{(n+1)} \right)^\top \right) \end{aligned} \quad (24)$$

が成り立つ [2]. しかし, 数値実験の結果では, Φ_a をシフト戦略として用いた場合, dqds 法や m2dLVs 法の反復回数を減少させる効果は確認できなかった. すなわち, Φ_a は, 数学的に厳密な下界であるが, シフト戦略として適切だとは言えない. そのため, $d_i^{(n+1)}$ の値を有効に利用する方針を採用する LAPACK の aggressive シフト戦略は, 経験則に基づいた戦略となる. 以上より, すべての行列成分を参照することなく, かつ, dqds 法の漸化式に現れる $d_i^{(n+1)}$ の値を利用する方針として, $\lambda_{\min} \left(B^{(n)} \left(B^{(n)} \right)^\top \right)$ の下界を計算する aggressive シフト戦略は, 必然的に無誤差の計算でも過大なシフトを与える可能性のある戦略となる.

3.2 Johnson 下界

Johnson 下界では, 行列

$$\frac{(B^{(n)})^\top + B^{(n)}}{2} = \begin{pmatrix} \sqrt{q_1^{(n)}} & \frac{\sqrt{e_1^{(n)}}}{2} & & & & \\ \frac{\sqrt{e_1^{(n)}}}{2} & \sqrt{q_2^{(n)}} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \sqrt{q_{M-1}^{(n)}} & \frac{\sqrt{e_{M-1}^{(n)}}}{2} \\ & & & & \frac{\sqrt{e_{M-1}^{(n)}}}{2} & \sqrt{q_M^{(n)}} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

に対する Gerschgorin 下界から導かれる [3]. 行列 $B^{(n)}$ の $\lambda_{\min} \left((B^{(n)})^T B^{(n)} \right)$ の下界は, $e_0^{(n)} = 0, e_M^{(n)} = 0$ とすると,

$$\Phi_J = \left(\max \left\{ 0, \min_{1 \leq i \leq M} \left[\sqrt{q_i^{(n)}} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{e_{i-1}^{(n)}} + \sqrt{e_i^{(n)}} \right) \right] \right\} \right)^2 \quad (26)$$

となる. よって, Johnson 下界を利用したシフト量計算では, $2M - 1$ 回の平方根計算が必要である.

3.3 Laguerre 下界および一般化 Newton シフト

上 2 重対角行列 $B^{(n)}$ を用いて,

$$A = \left(B^{(n)} \right)^T \left(B^{(n)} \right), \quad (27)$$

とする. 変数 $\beta_j^{(n)}$ を

$$\beta_1^{(n)} = \frac{1}{q_1^{(n)}}, \quad \beta_j^{(n)} = \frac{1}{q_j^{(n)}} + \left(\frac{e_{j-1}^{(n)}}{q_j^{(n)}} \right) \beta_{j-1}^{(n)}, \quad 2 \leq j \leq M \quad (28)$$

と置くと,

$$\sum_{j=1}^M \beta_j^{(n)} = \text{Tr} \left(A^{-1} \right), \quad (29)$$

が成り立つ. 次に, 変数 $\gamma_j^{(n)}$ を

$$\gamma_1^{(n)} = \beta_1^{(n)2}, \quad \gamma_j^{(n)} = \beta_j^{(n)2} + \frac{e_{j-1}^{(n)}}{q_j^{(n)}} \left(\gamma_{j-1}^{(n)} + \beta_{j-1}^{(n)2} \right), \quad 2 \leq j \leq M \quad (30)$$

と置くと,

$$\sum_{j=1}^M \gamma_j^{(n)} = \text{Tr} \left(A^{-2} \right), \quad (31)$$

が成り立つ. 式 (28)-(31) の証明は, 別論文に記載する予定である.

ここで T を

$$T \equiv M \times \text{Tr} \left(A^{-2} \right) - \left(\text{Tr} \left(A^{-1} \right) \right)^2, \quad (32)$$

と定義する. 理論的には $T > 0$ であるが, 計算機上ではこの関係が保証されていない. もし計算機上で $T > 0$ となる値が得られれば, A の最小固有値の Laguerre 下界 [10] をシフト量として用いることができる. Laguerre 下界は, 以下の式であらわされる.

$$\Phi_L \equiv \frac{M}{\text{Tr} \left(A^{-1} \right) + \sqrt{M-1} \sqrt{T}}. \quad (33)$$

一方, $T \leq 0$ ならば, 一般化 Newton シフト [8], [22] を適

用する.

$$\Phi_N \equiv \sqrt{\frac{1}{\text{Tr} \left(A^{-2} \right)}}. \quad (34)$$

ただし, 理論的には $\Phi_L \geq \Phi_N$ であるが, 計算機上ではこの関係が保証されていない. そのため, $T > 0$ の場合,

$$\Phi_T \equiv \max(\Phi_L, \Phi_N), \quad (35)$$

を用いる.

3.4 Kato-Temple の不等式による下界

Y を実対称行列として, $\rho = x^T Y x (x^T x = 1)$, $\varepsilon = \|Yx - \rho x\|_2$ とすると, 开区間 $(\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$ に, ρ および Y の固有値のうち, 1 つの固有値 $\lambda_0(Y)$ のみが含まれるとき,

$$\rho - \frac{\varepsilon^2}{\bar{\lambda} - \rho} \leq \lambda_0(Y) \leq \rho + \frac{\varepsilon^2}{\rho - \underline{\lambda}} \quad (36)$$

が成り立つ. 特に, $x = (0, \dots, 0, 1)^T$, $\bar{\lambda}$ を

$$C^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{q_1^{(n)}} & \sqrt{e_1^{(n)}} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \sqrt{e_{M-1}^{(n)}} \\ 0 & & & \sqrt{q_M^{(n)}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{q_1^{(n)}} & \sqrt{e_1^{(n)}} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \sqrt{e_{M-1}^{(n)}} \\ 0 & & & \sqrt{q_M^{(n)}} \end{pmatrix}^T, \quad (37)$$

に対する $M - 1$ 次首座小行列 $C^{(n)'}$ の最小固有値の下界として, $\bar{\lambda} > \rho = C_{M,M}^{(n)} = q_M^{(n)}$ が成り立つならば, $\varepsilon = \|C^{(n)}x - \rho x\|_2$ として, $B^{(n)}(B^{(n)})^T$ の最小固有値の下界

$$\Phi_K \equiv C_{M,M}^{(n)} - \frac{\varepsilon^2}{\bar{\lambda} - C_{M,M}^{(n)}} \leq \lambda_{\min} \left(C^{(n)} \right) = \lambda_{\min} \left(B^{(n)}(B^{(n)})^T \right), \quad (38)$$

がシフト量として利用できる. ここで, $\bar{\lambda}$ は, 以下のよう

$$C^{(n)'} = \begin{pmatrix} q_1^{(n)} + e_1^{(n)} & \sqrt{e_1^{(n)} q_2^{(n)}} & & \\ \sqrt{e_1^{(n)} q_2^{(n)}} & q_2^{(n)} + e_2^{(n)} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \sqrt{e_{M-2}^{(n)} q_{M-1}^{(n)}} & \sqrt{e_{M-2}^{(n)} q_{M-1}^{(n)}} & q_{M-1}^{(n)} + e_{M-1}^{(n)} & \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$K^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} q_1^{(n)} + e_1^{(n)} & \sqrt{e_1^{(n)} q_2^{(n)}} & & \\ \sqrt{e_1^{(n)} q_2^{(n)}} & q_2^{(n)} + e_2^{(n)} & & \\ \cdot & \cdot & \ddots & \\ \sqrt{e_{M-2}^{(n)} q_{M-1}^{(n)}} & & & q_{M-1}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

とする． $C^{(n)'}$ の最小固有値に付随する固有ベクトル空間の中から長さ 1 の任意のベクトル y を選ぶと、

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(K^{(n)}) &\leq y^\top K^{(n)} y = y^\top C^{(n)'} y - e_{M-1}^{(n)} (y(M))^2 \\ &\leq y^\top C^{(n)'} y = \lambda_{\min}(C^{(n)'}) \end{aligned} \quad (41)$$

が成り立つため、 $\lambda_{\min}(C^{(n)'}) \geq \lambda_{\min}(K^{(n)})$ となる．ここで、

$$H^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{q_1^{(n)}} & \sqrt{e_1^{(n)}} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \sqrt{e_{M-2}^{(n)}} \\ 0 & & & \sqrt{q_{M-1}^{(n)}} \end{pmatrix} \quad (42)$$

を定義すると、行列 $K^{(n)}$ は

$$K^{(n)} = H^{(n)} \left(H^{(n)} \right)^\top \quad (43)$$

と分解できる．さらに、

$$K^{(n)'} = \left(H^{(n)} \right)^\top H^{(n)} \quad (44)$$

と定めると、 $\lambda_{\min}(K^{(n)}) = \lambda_{\min}(K^{(n)'})$ となり、 $\lambda_{\min}(C^{(n)'}) \geq \lambda_{\min}(K^{(n)'})$ が成り立つ．この行列 $K^{(n)'}$ は、行列 A と同じ構造をしており、 $\text{Tr}(A^{-1})$ と $\text{Tr}(A^{-2})$ の計算の最後の $i = M$ の加算を行わないことによって、 $\text{Tr}((K^{(n)'})^{-1})$ と $\text{Tr}((K^{(n)'})^{-2})$ の計算が可能である．

すなわち、 $K^{(n)'}$ の最小固有値の下界が計算できれば、 $K^{(n)}$ の最小固有値の下界が計算でき、さらに、 $C^{(n)'}$ の最小固有値の下界が得られる．行列 $H^{(n)}$ は行列 $B^{(n)}$ よりも行列の次元数が 1 つ小さいだけなので、行列 A に関する下界 Φ_L 、 Φ_N のように $K^{(n)'}$ に関しても下界が計算できる．具体的には、式 (29)、(31) の行列 A の行列の次元数 M を $M-1$ にすると、

$$\sum_{i=1}^{M-1} \beta_i^{(n)} = \text{Tr} \left(\left(K^{(n)'} \right)^{-1} \right), \quad (45)$$

$$\sum_{i=1}^{M-1} \gamma_i^{(n)} = \text{Tr} \left(\left(K^{(n)'} \right)^{-2} \right), \quad (46)$$

が得られる．さらに、上記の 2 つの式を用いて下界 Φ_L と Φ_N を計算し、より大きい方を $K^{(n)'}$ の下界として採用する．この得られた下界を $\bar{\lambda}$ として利用できる．

3.5 Gerschgorin 下界

3 重対角行列 $B^{(n)} B^{(n)\top}$

$$B^{(n)} B^{(n)\top} = \begin{pmatrix} b_1^{(n)2} + b_2^{(n)2} & b_2^{(n)} b_3^{(n)} & & \\ b_2^{(n)} b_3^{(n)} & b_3^{(n)2} + b_4^{(n)2} & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ b_{2(M-1)}^{(n)} b_{2M-1}^{(n)} & b_{2M-1}^{(n)2} & & \end{pmatrix}, \quad (47)$$

の最小固有値に対する Gerschgorin 下界 [3] をシフト量として採用することもできる．ここで、 $b_0^{(n)} = b_{2M}^{(n)} = 0$ とすると、 $B^{(n)} B^{(n)\top}$ の Gerschgorin 下界は、以下の式で得られる．

$$G \equiv \min_i \left[\left(b_{2i-1}^{(n)2} + b_{2i}^{(n)2} \right) - \left(b_{2i-2}^{(n)} b_{2i-1}^{(n)} + b_{2i}^{(n)} b_{2i+1}^{(n)} \right) \right], \quad (48)$$

$$\Phi_G \equiv \max(G, 0). \quad (49)$$

このシフト計算では、 $M-1$ 回の平方根計算が必要である．Johnson 下界と比較すると、約半分の平方根計算で下界を計算できる．加算、減算、乗算に比べ、平方根計算は著しく計算時間が長い*1．平方根計算が計算時間の観点で支配的となるため、Gerschgorin 下界 Φ_G の計算量は、Johnson 下界 Φ_J の計算量の約半分といえる．

3.6 Algebraic シフト の概略

本節では、計算されたシフト量を採用するための条件を示す．

dqds 法および m2dLVs 法において、各反復で用いられたシフト量の総和は、変数 SIGMA および DESIG に蓄積される．SIGMA は大きい量を保持し、DESIG は小さい量を保持することによって、計算機上での有効桁数を増やしている．しかし、特異値計算終了後は、計算された各特異値に SIGMA のみ加算される．各反復において SIGMA と DESIG が更新される際、計算機上では有効桁数が存在するため、SIGMA と DESIG を用いても情報落ちが起きる．最も保守的に情報落ちを検知するためには、変数 SIGMA と $\text{SIGMA} + S^{(n)}$ の値が等しくなることを確認すれば良い．仮に、変数 SIGMA と $\text{SIGMA} + S^{(n)}$ の値が等しくないならば、SIGMA と DESIG によって、情報落ちを回避する可能性が高い．

そこで、新たに提案する Algebraic シフトでは、変数 FLAG を用いて、以下の手順でシフト戦略を切り替える．本節の以下の文章では、「=」は右辺の値を左辺の変数に代入

*1 dqds 法および m2dLVs 法では、反復計算が進むにつれ、副対角成分が小さくなり、行列を小行列に分割できるようになる．そのため、結果として、小さい行列を扱うことになり、平方根計算のパイプライン処理を利用できなくなる．

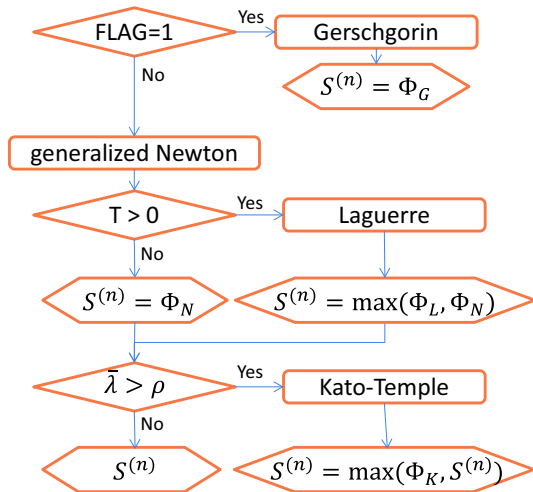


図 1 Algebraic シフトにおけるシフト量の決定手順。

Fig. 1 The procedure for determination of shift in the Algebraic shift .

することを、「==」は左辺と右辺の値を数値計算し有限桁の範囲で等しいことを意味する。

- (1) FLAG = 0
- (2) SIGMA == SIGMA + $q_M^{(n)}$ が成り立つ場合、手順 (7) に移動
- (3) シフト量の計算
- (4) SIGMA == SIGMA + $S^{(n)}$ が成り立つ場合、または、 $S^{(n)} \geq q_M^{(n)}$ の場合、手順 (7) に移動
- (5) 原点シフトが導入された反復計算の実行
- (6) $d_i^{(n+1)} > 0$ が成り立つ場合、手順 (2) に移動
- (7) 原点シフトを導入しない反復計算の実行
- (8) FLAG = 1
- (9) 手順 (2) に移動

手順 (1) は、アルゴリズムの初期設定時および減次 [13], [17] の場合のみ行われる。手順 (2) では、不要なシフト量の計算を行わせないための条件を導入する。行列 $B^{(n)} (B^{(n)})^T$ の右下の要素 $q_M^{(n)}$ に対して、以下の式が成り立つ [21]。

$$0 \leq S^{(n)} < \lambda_{\min} \left(B^{(n)} (B^{(n)})^T \right) < q_M^{(n)}. \quad (50)$$

式 (50) より、SIGMA と SIGMA + $q_M^{(n)}$ が等しいならば、行列 $B^{(n)} (B^{(n)})^T$ のシフト量 $S^{(n)}$ は、必ず SIGMA == SIGMA + $S^{(n)}$ となる。すなわち、手順 (4) の条件である SIGMA == SIGMA + $S^{(n)}$ が満たされることとなり、手順 (5) の原点シフトが導入された反復計算がなされないため、シフト量の計算が不要となる。ゆえに、手順 (2) では、条件を満たす場合、手順 (7) に移動する。手順 (3) のシフト量の計算では、FLAG の値によってシフト量の計算法を選択する。ここで利用可能なシフト量の計算法のための下界は、Laguerre 下界、一般化 Newton シフト、Kato-Temple の不等式による下界、Gerschgorin 下界である。すなわち、手順 (3) をフローチャートで表すと図 1 のようになる。手順

(4) では、情報落ちを回避するための条件を入れる。また、 $S^{(n)} \geq q_M^{(n)}$ のときは、式 (50) より、 $S^{(n)}$ が $B^{(n)} (B^{(n)})^T$ の最小固有値以上となるためこれをシフト量として用いることは不適切である。そのため、この場合は手順 (7) に移動する。手順 (5) では、反復計算が行われる。手順 (6) では、正值性が保証される場合、新たな反復に進むため、手順 (2) に移動する。なお、m2dLVs 法の場合は、 $d_i^{(n+1)}$ の代わりに $w_{2i-1}^{(n+1)}$ を用いる。

手順 (7) では、シフト量の計算時間の削減、情報落ちの回避、桁落ちの回避、正值性の保証のいずれかを目的として、原点シフトを導入しない反復計算を行う。ここで、m2dLVs 法では、式 (15) を用いるため、反復計算ではなく、代入計算とみなせる。なお、手順 (2) の SIGMA == SIGMA + $q_M^{(n)}$ 、手順 (4) の SIGMA == SIGMA + $S^{(n)}$ もしくは $S^{(n)} \geq q_M^{(n)}$ 、手順 (6) の $d_i^{(n+1)} > 0$ が成り立つのは、反復計算の終盤において可能性が高い。そのため、以降の反復計算では Gerschgorin 下界を用いてシフト量を計算させるために、手順 (8) では、FLAG の値を変更する。

Laguerre 下界、一般化 Newton シフト、および Kato-Temple の不等式による下界によるシフト計算は、反復計算の終盤において、非常に最小特異値に近くなる下界である。そのため、収束の終盤においては、最小特異値に近すぎないシフト量を与えることができる Gerschgorin 下界で十分である。また、Gerschgorin 下界の誤差は行列の次元数と無関係であるのに対して、他の下界は少なくとも行列の次元数に比例した計算誤差が蓄積される。そのため、収束の終盤では、Gerschgorin 下界を用いた方が、安定して特異値に収束させることができる。

4. 実験

提案した Algebraic シフトの有効性を確認するために、比較実験を行う。実験に用いる計算機は、CPU は Intel Core i7-3770K@3.50 GHz、メモリ容量 32GB である。コンパイラは、gfortran 4.7.2 とし、オプション -O2 を用いる。比較対象は LAPACK3.4.2 [9] の DLASQ とし、LAPACK に含まれないコードはこの DLASQ を基に開発する。なお、DLASQ には、aggressive シフトが採用された dqds 法が実装されている。比較するコードは、以下の 4 種類である。

code1 DLASQ

code2 Algebraic シフトを導入した dqds 法

code3 Johnson シフトを採用した m2dLVs 法

code4 Algebraic シフトを導入した m2dLVs 法

上 2 重対角のテスト行列として、対角成分と副対角成分が 1 の行列 B_{t1} 、要素値が $[0, 1]$ を満たす乱数行列 B_{t2} 、近接した特異値を持たない行列 B_{t3} 、近接した特異値を持つ行列 B_{t4} および B_{t5} を用いる。行列 B_{t2} 以外は、特異

値が明らかな行列である．行列 B_{t1} , B_{t3} , B_{t4} および B_{t5} の特異値 $\sigma_{(t1)i}$, $\sigma_{(t3)i}$, $\sigma_{(t4)i}$ および $\sigma_{(t5)i}$ は,

$$\sigma_{(t1)i} = 2 \cos \left(\frac{i}{2M+1} \pi \right), \quad (51)$$

$$\sigma_{(t3)i} = \frac{1-\varepsilon}{M-1} (M-i) + \varepsilon, \quad (52)$$

$$\sigma_{(t4)i} = \varepsilon^{\frac{i-1}{M-1}}, \quad (53)$$

$$\sigma_{(t5)i} = \frac{1}{M-1} \left(\frac{M(1-\varepsilon)}{i} + M\varepsilon - 1 \right), \quad (54)$$

である．ここで, ε は, マシンイプシロンのことである．なお, 行列 B_{t3} , B_{t4} および B_{t5} は, Jacobi 回転を用いた行列作成法 [19] を多倍長計算で行うことによって得られる． B_{t1} 以外のテスト行列は, 10 個ずつ作成する．なお, 同じ分布の特異値を持つ行列は複数存在することに注意する．

図 2 は, 各テスト行列に対する反復回数, 計算時間, および特異値に対する相対誤差の平均を表したものである．ここで, 正確な特異値を σ_i , 計算された特異値を $\hat{\sigma}_i$ と置くと, 特異値に対する相対誤差の平均は,

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{|\hat{\sigma}_i - \sigma_i|}{\sigma_i} \quad (55)$$

で得られる．なお, B_{t3} , B_{t4} および B_{t5} については, 10 個ずつテスト行列を作成するため, さらに上記の式で得られる 10 個の値の平均をとる．横軸は, 行列の次元数を表している．行列 B_{t1} および B_{t2} の作成は容易である．一方, 他の行列の作成では, Jacobi 回転を用いているため, 作成時間が長い．そこで, 行列 B_{t1} の次元数は 10000, 30000, 50000, 100000, 300000, 500000 とし, B_{t2} の次元数は 1000, 3000, 5000, 10000, 30000, 50000 とし, 他の行列は 1000, 3000, 5000, 10000, 30000, 50000 とする．行列 B_{t2} に関しては, 次元数に関係なく, 同じ傾向を示しているため, 500000 次元の実験は省略する．行列 B_{t2} に関しては, ランダム行列を用いているため, 正確な特異値を得ることが非常に困難である．そのため, 相対誤差は示していない．

新しい dqds 法 (code2) と新しい m2dLVs 法 (code4) に関して, 反復回数は, ほぼ等しい．従来の m2dLVs 法 (code3) と新しい m2dLVs 法 (code4) の行列 B_{t2} に対する計算時間は, code4 の方が短い．すなわち, それほど大きい差ではないため, 図 2 のグラフ上では, 重なって描画されている．

すべてのテスト行列において, 従来の m2dLVs 法 (code3) の反復回数が最も大きい．これは, 計算されたシフト量が, $\lambda_{\min} \left((Z^{(n)})^T Z^{(n)} \right)$ に非常に近い値でないためである．また, すべてのテスト行列に対する計算時間が長い．これは, Johnson シフトにおける多数の平方根の計算が影響しているものと思われる．

aggressive シフトを用いた dqds 法 (code1) では, すべ

でのテスト行列に対して, 次元数が大きくなればなるほど, 相対誤差が悪くなる．これは, シフト計算で得られる値が最小特異値と比較して, 大きくなりやすい aggressive シフトの性質によるものだと考えられる．

dqds 法に関して, code1 と code2 では, 行列 B_{t1} を除いて, code2 の方が速い．しかしながら, 500000 次元の行列 B_{t1} において, code2 の計算時間は 1.22 倍で, 相対誤差は 2 倍以上の差がある．ゆえに, 高速かつ高精度な特異値計算を行うという目的のためには, Algebraic シフトを用いた code2 の方が適しているものと考えられる．

m2dLVs 法に関して, code3 と code4 では, 行列 B_{t4} を除いて, code4 の方が反復回数が少なく, 計算時間が速く, 相対誤差が良好である．行列 B_{t4} の計算時間と相対誤差に関して, code3 と code4 の差はわずかである．行列 B_{t1} の相対誤差に関して, code3 の相対誤差は行列の次元数によって 20 倍程度の開きがあり最小でも $1.0E-15$ であるのに対して, code4 の相対誤差は, 常に $1.0E-16$ 前後である．よって, テスト行列の性質によらず, 安定した精度で計算でき, かつ, 計算時間が短い code4 の方が有効であるものと考えられる．

以上より, 原点シフトの導入を必要とする dqds 法および m2dLVs 法において, 高速かつ高精度に特異値計算を行うためには, Algebraic シフトを適用すべきである．

5. まとめ

本論文では, 原点シフトを必要とする特異値計算アルゴリズム dqds 法と m2dLVs 法において, 高速化および高精度化を実現するために, 新たなシフト戦略として Algebraic シフトを提案した．このシフト戦略では, SIGMA と $q_M^{(n)}$ の関係によって, シフト計算そのものを省略できる．また, SIGMA とシフト量およびシフト量と $q_M^{(n)}$ の関係によって, シフト量を採用しないことにより, 情報落ちと桁落ちを回避できる．シフト量が必要な場合に, シフト量の計算において利用できる下界として, Laguerre 下界, 一般化 Newton シフト, Kato-Temple の不等式による下界, Gerschgorin 下界を示した．原点シフト付き特異値計算では, 最小特異値により近い下界をシフト量とすると効果的である．ただし, 計算機上では有効桁数の制約があるため, 収束の終盤において, Gerschgorin 下界を用いた方が, 安定して特異値に収束させることができる．反復計算がシフト戦略を切り替えるための条件を満たすまでは, Laguerre 下界, 一般化 Newton シフト, Kato-Temple の不等式による下界のうち, 最も大きな値をシフト量として用いる．Algebraic シフトの有効性を確認するために, 従来の dqds 法および m2dLVs 法に対して, Algebraic シフトを実装し, 5 種類の性質が異なるテスト行列を用いて, 比較実験を行った．その結果, 全体的に, dqds 法および m2dLVs 法の計算時

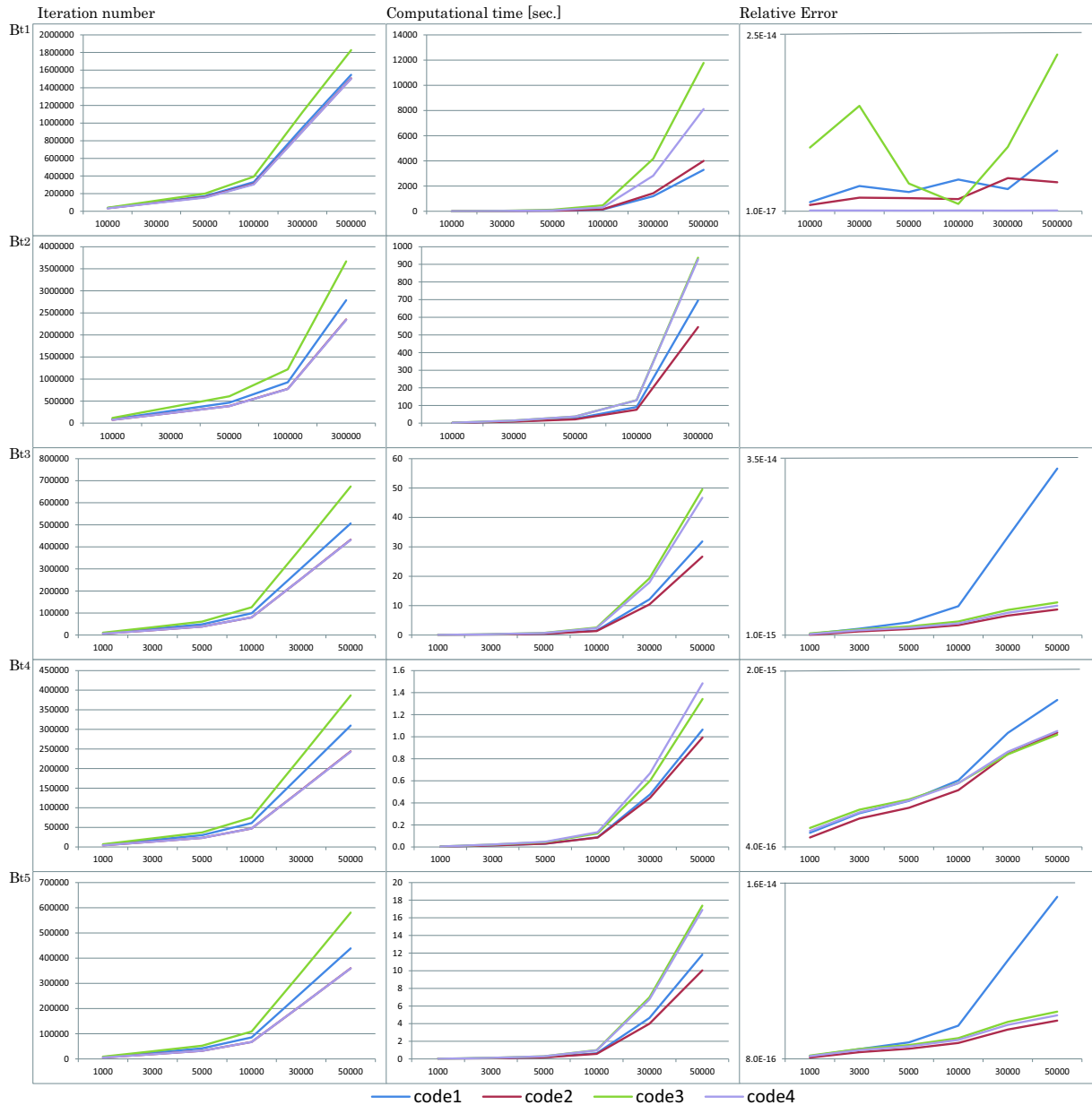


図 2 各テスト行列に対する反復回数，計算時間，および特異値に対する相対誤差。
Fig. 2 Iteration number, computational time and relative error in each test matrices.

間と，計算された特異値の相対誤差に対して，Algebraic シフト を用いた方が総じて良好であることが確認できている。

参考文献

- [1] Jiang, F., Kannon, R., Littman, M.L. and Vemphala, S.: *Efficient Department of Computer Science*, Duke University, Durham, NC, Tech. Rep. CS-99-5 (1999).
- [2] Fernando, K.V. and Parlett, B.N.: Accurate singular values and differential qd algorithms, *Numer. Math.*, Vol.67, pp.191–229 (1994).
- [3] Gerschgorin, S.: Über die Abgrenzung der Eigenwerteeiner Matrix, *Izv. Akad.Nauk. USSR otd. Fiz.-Mat. Nauk*, Vol.7, pp.749–754 (1931). (ドイツ語)
- [4] Iwasaki, M. and Nakamura, Y.: On the convergence of

- a solution of the discrete Lotka-Volterra system, *Inverse Problems*, Vol.18, pp.1569–1578 (2002).
- [5] Iwasaki, M. and Nakamura, Y.: Accurate computation of singular values in terms of shifted integrable schemes, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, Vol.23, pp.239–259 (2006).
- [6] Iwasaki, M. and Nakamura, Y.: Center manifold approach to discrete integrable systems related to eigenvalues and singular values, *Hokkaido Math. J.*, Vol.36, pp.759–775 (2007).
- [7] Johnson, C.R.: A Gersgorin-type lower bound for the smallest singular value, *Linear Algebra Appl.*, Vol.112, pp.1–7 (1989).
- [8] Kimura, K., Yamashita, T. and Nakamura, Y.: Conserved quantities of the discrete finite Toda equation and lower bounds of the minimal singular value of upper bidiagonal matrices, *J. Phys. A: Math. Theor.*, Vol.44,

- No.285207 (12pp) (2011).
- [9] LAPACK-Linear Algebra PACKage
available from <http://www.netlib.org/lapack/> (accessed 2012-09-30)
 - [10] von Matt, U.: The orthogonal qd-algorithm, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol.18, pp.1163–1186 (1997).
 - [11] Nagata, M., Iwasaki, M. and Nakamura, Y.: Error analysis of the mDLVs algorithm for computing bidiagonal singular values, *Numer. Algor.*, Vol.61, pp.261–274 (2012).
 - [12] 中村佳正：共立叢書 現代数学の潮流 可積分系の機能数理，共立出版株式会社 (2006).
 - [13] Parlett, B.N. and Marques, O.A.: An Implementation of the dqds Algorithm (Positive Case), *Linear Algebra Appl.*, Vol.309, No.1-3, pp.217–259 (2000).
 - [14] Pratt, W.K.: *Digital image processing*, New York, USA, Wiley-Interscience Publishing (1978).
 - [15] Rutishauser, H.: Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus, *Z. Angre. Math. Mech.*, Vol.5, pp.233–251 (1954). (ドイツ語)
 - [16] Rutishauser, H.: *Lectures on Numerical Mathematics*, Birkhäuser, Boston (1990).
 - [17] 高田雅美, 岩崎雅史, 木村欣司, 中村佳正：高精度特異値計算ルーチンの開発とその性能評価，情報処理学会論文誌コンピューティングシステム，Vol.46，No.SIG12 (ACS11)，pp.299–311 (2005).
 - [18] Takata, M., Konda, T., Kimura, K. and Nakamura, Y.: Verification of dLVv Transformation for Singular Vector Computation with High Accuracy, *In Proceedings of International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications*, Vol.II, pp.881–887 (2006).
 - [19] Takata, M., Kimura, K., Iwasaki, M. and Nakamura, Y.: Algorithms for Generating Bidiagonal Test Matrices, *In Proceedings of International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications*, Vol.II, pp.732–738 (2007).
 - [20] 寺本英：数理生態学，朝倉書店 (1997).
 - [21] 山本哲郎：数値解析入門 (増訂版)，サイエンス社 (2003).
 - [22] Yamashita, T., Kimura, K. and Nakamura, Y.: Subtraction-free recurrence relations for lower bounds of the minimal singular value of an upper bidiagonal matrix, *Journal of Math-for-Industry*, Vol.4, No.2012A-8, pp.55–71 (2012).