

## (1+1) EA のマルコフ連鎖モデルによる分析

安 永 和 馬<sup>†</sup> 古 賀 仁 信<sup>††</sup>  
坂 本 眞 人<sup>†</sup> 古 谷 博 史<sup>†</sup>

進化的アルゴリズム (EA) の計算過程について、これまで様々な手法を用いて分析がなされている。我々は、(1+1)EA について Markov 連鎖モデルを用いてその進化機構を研究した。本報告では (1+1)EA における OneMax 問題を取り上げ、Markov 遷移行列の明示的な形を与える。次にそれを用いて最適解出現時間などを計算した結果を示す。

### Analysis of (1+1) EA by Markov chain model

KAZUMA YASUNAGA,<sup>†</sup> KIMINOBU KOGA,<sup>††</sup>  
MAKOTO SAKAMOTO<sup>†</sup> and HIROSHI FURUTANI<sup>†</sup>

There have been performed analyses for computational processes of Evolutionary Computation (EA) by using various methods. We studied the evolutionary mechanism of (1+1) EA by Markov chain model. In this report, we treat OneMax problem in (1+1) EA, and give the explicit form of a Markov transition matrix. Next, we show the results of calculations for the average first appearing time of optimal solution, and others.

#### 1. はじめに

進化的アルゴリズム (EA) の計算性能を高めるには、計算時間の研究が重要である。本報告では (1+1)EA における OneMax 問題を取り上げ、Markov 連鎖理論を用いて研究した。そのため、(1+1)EA OneMax 問題における Markov 遷移行列の明示的な形を求めた。次に、時間  $t$  において初めて最適解が出現する確率と、時間  $t$  の平均値を計算した。

#### 2. 理 論

集団の親個体数が 1 つのみで、突然変異によってできた子と適応度の比較を行い、より適応度が高い方が次の世代の親として選択される (1+1)EA を進化のモデルとした。個体は長さ  $\ell$  の固定長 2 進ビット列とし、突然変異率を  $P_m$  と表す。個体の適応度は OneMax 関数の適応度 (ビット列中のビット 1 の数) とする。

(1+1)EA は  $(\ell+1)$  個の状態によって記述することができる。各状態はビット列中のビット 1 の数で定義する。時間  $t$  におけるビット 1 の数を  $i$ 、時間  $t+1$  におけるビット 1 の数を  $j$  とする。状態  $i$  から状態  $j$  へ遷移する確率  $p(i \rightarrow j)$  を次のように表す。

まず  $i > j$  の場合、時間  $t \rightarrow t+1$  において適応度が悪くなることはないので

$$p(i \rightarrow j) = 0 \quad i > j \quad (1)$$

となる。次に  $i < j$  の場合、時間  $t$  におけるビット 1 の個数  $i$  個のうち  $r$  個がビット 0 に変異するとする。時間  $t+1$  におけるビット 1 の数は  $j$  個であるから、時間  $t$  においてビット 0 の個数  $\ell-i$  個のうち  $j-i+r$  個がビット 1 に変異しなければならない。また、組み合わせの式から  $r$  の最大値  $k$  は  $\ell-j$  と  $i$  の最小値をとることがわかる。

$$p(i \rightarrow j) = \sum_{r=0}^k K P_m^{r+s} (1 - P_m)^{\ell-(r+s)} \quad (2)$$

$$i < j; \quad s = j - i + r; \quad k = \min(\ell - j, i);$$

$$K = \binom{i}{r} \binom{\ell - i}{s}$$

最後に状態が変化しない場合、全体の確率から  $i < j$  の時の  $p(i \rightarrow j)$  の確率を合計したものを引けばよい。

$$p(i \rightarrow i) = 1 - \sum_{j>i} p(i \rightarrow j) \quad (3)$$

遷移確率はこの (1) 式 (2) 式 (3) 式で定義される。

#### 2.1 最適解出現確率

ここで求めた (1+1)EA は吸収マルコフ連鎖である。吸収マルコフ連鎖では、遷移行列  $\mathbf{P}$  を用いることにより、初めて最適解が出現する時間を理論的に計算することが出来る。そのため遷移行列  $\mathbf{P}$  を次の式で定義する。

<sup>†</sup> 宮崎大学工学部  
Faculty of Engineering, University of Miyazaki

<sup>††</sup> 宮崎大学工学研究科  
Graduate School of Engineering, University of Miyazaki

$$\mathbf{P} = \left( \begin{array}{c|ccc} p(\ell \rightarrow \ell) & \cdots & p(\ell \rightarrow 0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(0 \rightarrow \ell) & \cdots & p(0 \rightarrow 0) \end{array} \right)$$

この遷移行列  $\mathbf{P}$  を次のように分割して考える.

$$\mathbf{P} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{array} \right)$$

時間  $t$  における遺伝子の分布確率を

$$\mathbf{q}(t) = (q_\ell(t), q_{\ell-1}(t), \dots, q_0(t))$$

と定義する.  $q_i(t)$  は時間  $t$  においてビット 1 の数が  $i$  である確率を表す. 規格化条件から  $\sum_{i=0}^{\ell} q_i = 1$ , および  $0 \leq q_i \leq 1$  を満たす. また,  $\mathbf{q}(t)$  は遷移行列  $\mathbf{P}$  を用いて次式により求めることができる.

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) \cdot \mathbf{P}^t \quad (4)$$

なお  $\mathbf{P}^t$  は次のように表すことができる.

$$\mathbf{P}^t = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ (\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^{t-1}) \cdot \mathbf{R} & \mathbf{Q}^t \end{array} \right)$$

時間  $t$  において初めて最適解が出現する確率  $T(t)$  は

$$T(t) = q_\ell(t) - q_\ell(t-1) \quad (5)$$

と表すことができる.  $\mathbf{q}(t)$  を

$$\mathbf{q}(t) = (q_\ell(t), \tilde{\mathbf{q}}(t))$$

と分割することで次式を得る.

$$T(t) = \tilde{\mathbf{q}}(0) \cdot \mathbf{Q}^{t-1} \cdot \mathbf{R}$$

## 2.2 最適解出現時間の平均

初めて最適解が出現する時間の平均  $\bar{T}$  を

$$\bar{T} = \sum_{t=0}^{\infty} T(t) \cdot t \quad (6)$$

と定義する. (6) 式を計算すると

$$\bar{T} = \tilde{\mathbf{q}}(0) \cdot \{ \mathbf{I} + 2\mathbf{Q} + 3\mathbf{Q}^2 + \cdots \} \cdot \mathbf{R}$$

となる.  $\{ \mathbf{I} + 2\mathbf{Q} + 3\mathbf{Q}^2 + \cdots \} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$  と表すことができる<sup>2)</sup>.  $\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$  とすると

$$\bar{T} = \tilde{\mathbf{q}}(0) \cdot \mathbf{N}^2 \cdot \mathbf{R}$$

となる. さらに  $\mathbf{R}$  は  $\mathbf{N}$  を用いて次のように表すことができる.

$$\mathbf{R} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \boldsymbol{\zeta}$$

$\boldsymbol{\zeta}$  は長さ  $\ell$  の全ての値が 1 である縦ベクトルである. これにより, 初めて最適解が出現する時間の平均  $\bar{T}$  は

$$\bar{T} = \tilde{\mathbf{q}}(0) \cdot \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\zeta}$$

と求めることができる.

## 3. 数値計算

OneMax 問題を例に取り上げ, 数値的に初めて最適解が出現する時間を検討する. ビット長を  $\ell = 20$  とし突然変異率  $P_m$  を変化させていき, 初めて最適解が出現する時間を求めた. 乱数を変えながら同じ計算を 10000 回繰り返し, 得られた結果の平均を求めた. 初期状態はビット 1 の出る確率を  $1/2$  とした. なお Markov 連鎖理論を用いた計算では, 初期状態  $\mathbf{q}(0)$  を確率  $1/2$  の 2 項分布で作成した.

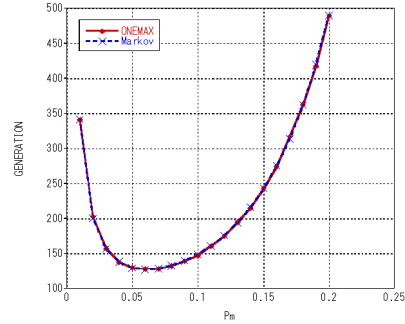


図 1 The average time that the optimal solution appears for the first time, with  $\ell = 20$ .

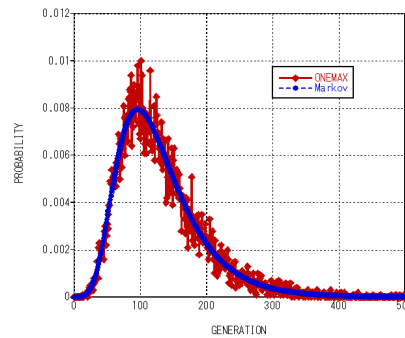


図 2 The probability that the optimal solution appears for the first time at time  $t$ , with  $\ell = 20$  and  $P_m = 1/\ell$ .

図 1 はビット長  $\ell = 20$  の場合の初めて最適解が出現する時間の平均  $\bar{T}$  を示した.

図 2 はビット長  $\ell = 20$ , 突然変異率  $P_m = 1/\ell$  の場合の時間  $t$  で初めて最適解が出現する確率  $T(t)$  を示した. いずれの図も, Markov 連鎖により導いた理論値と数値実験の結果はよく一致しており, Markov 連鎖がよいモデルであることが分かる.

## 4. まとめ

(1+1)EA について OneMax 問題を例として取り上げ, Markov 連鎖と見た場合の性質をいくつか導いた. 吸収 Markov 連鎖であるとき, 初めて最適解が出現する時間の平均は理論的に計算でき, 計算速度を上げるには突然変異率を  $1/\ell$  にすると良いことが分かった.

## 参考文献

- 1) S. Droste, T. Jansen and I. Wegener: "On the analysis of the (1+1) evolutionary algorithm", Theoretical Computer Science, **276**, pp.51-81, 2002
- 2) J. G. Kemeny and J. L. Snell: "Finite Markov chains", Springer-Verlag, 1976