

確率的閾値ルールの下でのカスケード現象

小松 孝紀^{1,a)} 生天目 章^{1,b)}

受付日 2012年1月18日, 採録日 2012年7月2日

概要: 一部の人によって採用されたイノベーションや新商品などが, 人々のつながりを介して連鎖的に拡散・普及していくことを, カスケード現象という. 本稿では, 従来の決定論的な閾値ルールに基づくモデルを拡張し, 確率的な閾値ルールの下, 様々なネットワーク上でカスケード現象が起こるための条件や拡散の様相について論じる. 各エージェントの合理的な選択が確率的に決まるとき, 決定論的な閾値ルールに基づくときに存在するカスケードウィンドウ (カスケードが生じるネットワークの平均次数と閾値の範囲) は存在せず, ネットワーク構造に依存することなくカスケード現象が起こることを示す.

キーワード: カスケード現象, 閾値ルール, 協調ゲーム, イノベーションの伝播, マルチエージェントシミュレーション

Cascade Phenomena on Probabilistic Threshold Rule

TAKANORI KOMATSU^{1,a)} AKIRA NAMATAME^{1,b)}

Received: January 18, 2012, Accepted: July 2, 2012

Abstract: The cascade phenomena, which are sequence of adoption by agents, are the important dynamics to explain the diffusion of innovation or new products in our real-world. In this paper, we extend the existing deterministic threshold rule for cascade phenomena and study the cascade on the probabilistic threshold rule. We show when all agents make decisions by using the probabilistic threshold rule there is no cascade window, which restricts the condition for the cascade on the deterministic threshold rule, and the cascade phenomena easily occur.

Keywords: cascade phenomena, threshold model, coordination game, diffusion of innovation, multi agent simulation

1. はじめに

イノベーションや新商品などが社会に浸透していく際, 人々の間のつながり方に着目し, そのネットワーク構造の影響を明らかにする研究が注目されている [1], [2], [3]. その中で, 各人が合理的な選択をするという条件の下, ごく少数の先駆的な人が採用することでイノベーションが社会全体に広まるための条件を, ネットワークの平均次数と各人の閾値の関係から求める研究がある. このような研究は, 故障の連鎖であるカスケード故障の研究とも関連があ

る [4].

各エージェントが, つながりのある他エージェントの選択結果を考慮しながら合理的な選択をするモデルは, 決定論的な閾値ルールに基づく選択行為として定式化できる. 各エージェントは, イノベーションを採用する周辺エージェント数 (または割合) が, ある一定値 (閾値) 以上になると, イノベーションを採用する. 一部のエージェントの状態変化が他エージェントの状態変化を連鎖的に引き起こすことで, 社会浸透が進んでいくことをカスケード現象という.

各エージェントの選択が決定論的閾値ルールに基づくとき, エージェントの状態変化が連鎖的に生じてカスケード現象が起こるかどうかは, 個々のエージェントの閾値とネットワークの平均次数に依存して決まる. そして, Watts

¹ 防衛大学校情報工学科
Department of Computer Science, National Defense Academy, Yokosuka, Kanagawa 239-8686, Japan

a) ed10004@nda.ac.jp

b) nama@nda.ac.jp

らはネットワークの平均次数が低くなく、また高くもなく、ある一定の範囲内にあるときカスケード現象が起こり、その範囲をカスケードウィンドウと名付けた [5], [6]. 決定論的閾値ルールの下でのカスケード現象は、ネットワーク上での協調ゲームとも関係があり、このときの閾値ルールは、各エージェントの利得行列から定めることができる [7].

決定論的閾値ルールの下、カスケード現象が起こりにくいのは、以下のようなネットワークである。1つ目は、ネットワークの一部が断絶し、少なくとも数のエージェントが孤立している場合である。2つ目は、エージェントの閾値が高く（エージェントが現状に満足しているなど）、かつ、そのような外部の変化に対して影響されないエージェントが多い場合である。3つ目は、各エージェントが密につながっている場合である。エージェント間で多くのリンクが形成されているとき、各エージェントの状態は周辺エージェントの状態と連動するため、当初の状態が維持されて変化は起きない。このようなとき、ネットワーク全体として安定した状態にあるため、一部のエージェントの状態変化が残りの大半のエージェントの状態変化に影響を及ぼすことなく、カスケード現象は起こりにくい。

本稿では、決定論的な閾値ルールを拡張した確率的閾値ルール [8], [9] の下、エージェント間におけるカスケード現象を扱う。確率的な閾値ルールとは、各エージェントの合理的な選択において、ある小さい確率で誤りをともなうものである。確率的閾値ルールに基づくとき、カスケードウィンドウは存在せず、一部のエージェントによる先駆的な選択が連鎖的に拡大し、カスケード現象が起こることを示す。

以下、2章では、カスケードモデルについて述べ、3章では、ネットワーク上での協調ゲームと決定論的閾値ルールとの関係を与える。4章では、確率的閾値ルールのダイナミクスを平均場近似により解析し、5章ではシミュレーション実験を行う。6章で、まとめと今後の課題を述べる。

2. カスケードモデル

本章では、決定論的閾値ルールによるカスケードモデルの下で、カスケード現象が起こるための条件（平均次数と閾値の関係）について述べる。

2.1 決定論的閾値ルール

決定論的閾値ルールは、局所依存性や正の外部性の下、エージェントの合理的な選択を定める [5]. 局所依存性とは、各エージェントの合理的な行為は、つながりのある他エージェントの選択に依存して決定されることである。また正の外部性とは、他エージェントと同じ選択をするとき、個々のエージェントの便益が増すことである。

ネットワークのノードにあたる各エージェントは、 $s = 1$ （イノベーションの採用）または $s = 0$ （非採用）のどちら

か1つを選択する。各エージェントは、同じ閾値 ϕ を持つとする。1ステップごとに、つながりのある他エージェントがイノベーションを採用している割合（採用率）と閾値 ϕ を比較し、式 (1) に基づき選択を決定する。

$$s_i = \begin{cases} 1 & \frac{\sum_{j \in N_i} s_j}{d_i} \geq \phi \\ 0 & \frac{\sum_{j \in N_i} s_j}{d_i} < \phi \end{cases} \quad (1)$$

式 (1) で、 s_i はエージェント i の状態、 d_i はエージェント i とつながりのあるエージェント数（次数）、 N_i はつながりのあるエージェントの集合を表す。

式 (1) の閾値ルールは、イノベーションの普及のほか、うわさの伝播、労働者によるストライキ、選挙における投票行動など、様々な場面に応用できる [10]. 式 (1) のルールを定める閾値 ϕ は、期待便益がコストを上回る分岐点である。具体的には、未知のイノベーションの採用を選択するとき、すでに採用している人の数（割合）であつたり、聞いたうわさを信じるのに必要な情報源の数、ストライキに参加する条件としての現時点での参加人数（参加率）、あるいは自分の票を無駄にしないために勝ちそうな人に投票をしようとするとき、同じく投票をしようとする周りの人の様相などを表す。さらに、式 (1) はより複雑な問題にも適用できる [5]. たとえば、国際条約などは、国家間での非常に複雑多岐にわたるプロセスを経て締結されるものであるが、1度決議に因る議案ができれば、その案に賛成か反対かの二者択一の問題に帰着できる。

2.2 カスケードの定義と生起条件

エージェントの状態変化が、つながりのある他エージェントの状態を変化させ、次々と連鎖的に状態変化をもたらすとき、カスケード現象という。初期状態として、すべてのエージェントは 0（非採用）の状態にあり、ごく少数のエージェントが状態 1 に変化したとき、この小さな状態変化がエージェントネットワーク全体に浸透する条件（カスケード現象が起こる条件）を、ネットワーク構造とエージェントの閾値との関係から求める。

マーケティングの研究では、カスケード現象の端緒として状態が 1 になるエージェントをイノベータ（先駆者）とし、周囲にあるエージェントの状態変化に対して強い感受性を持つエージェントを、アーリーアダプタと名付けている。各エージェント（ノード）の次数 k と閾値 ϕ が式 (2) の関係を満たすとき、そのエージェントは 1 人のイノベータにつながることで状態が 0 から 1 に変化するの、感受性が高いアーリーアダプタと呼ぶことができる。

$$k \leq \lceil 1/\phi \rceil \quad (2)$$

$\lceil x \rceil$ は、 x に関する床関数を表す。

アーリーアダプタが相互に孤立してある場合、イノベータの状態変化は、それらの周辺にとどまる。一方で、それ

らが結び付き大きなクラスタを形成するとき、イノベータによる状態変化はアーリーアダプタを介してネットワーク全体に広がる。アーリーアダプタのクラスタが十分に大きくなる（カスケード現象が起こる）条件を、パーコレーションの解析などで用いられる母関数による手法 [5] により求める。

エージェントの次数分布を確率密度分布 $P(k)$ で与えるとき、次数 k を持つエージェントがアーリーアダプタになる確率は、式 (3) の ξ_k で与えられる。

$$\xi_k = \begin{cases} 1 & k \leq [1/\phi] \\ 0 & k > [1/\phi] \end{cases} \quad (3)$$

このとき、アーリーアダプタの確率密度分布は、 $\xi_k P(k)$ と求まる。アーリーアダプタの次数分布に関する母関数を、式 (4) で与える。

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k P(k) x^k \quad (4)$$

これより、アーリーアダプタのクラスタサイズ $\langle n \rangle$ (平均値) は、式 (5) で求まる (導出は付録 A.1 を参照)。

$$\langle n \rangle = 1 + \frac{\langle k \rangle \langle k_{\text{early}} \rangle}{\langle k \rangle - G_0''(1)} \quad (5)$$

$\langle k \rangle$ は、ネットワークの平均次数、 $\langle k_{\text{early}} \rangle$ はアーリーアダプタの平均次数である。

式 (5) は、式 (6) が成り立つとき発散し、平均クラスタサイズ $\langle n \rangle$ は無限大になるので、カスケードがネットワーク全体に広がる。

$$G_0''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\xi_k P(k) = \langle k \rangle \quad (6)$$

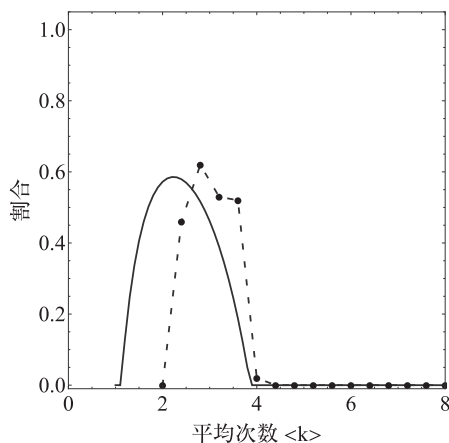


図 1 ネットワーク全体に対してアーリーアダプタによるクラスタサイズ (ノード数) が占める割合 (理論値, 実線) とカスケードがネットワーク全体に広がる割合 (シミュレーション結果, 破線)

Fig. 1 The cluster size of early adopters (theoretical value, solid line) and the frequency of cascade (simulation results, broken line) is plotted as a function of average degree of random networks $\langle k \rangle$.

一方で $G_0''(1) < \langle k \rangle$ のとき、カスケードは起こらない。

図 1 は、ノード数が 1,000 のランダムネットワークにおいて、各エージェントの閾値が $\phi = 0.25$ のとき、アーリーアダプタのクラスタサイズ (理論値, 実線) および、カスケードシミュレーション実験の結果 (破線, 各平均次数 $\langle k \rangle$ のとき、 $s = 1$ を選択するエージェントがネットワーク全体に広がる割合) を示したものである。イノベータは毎回ランダムに 1 人選択し、試行回数は 1,000 回とした。この結果から、カスケード現象が生じるのは平均次数が $2 \leq \langle k \rangle \leq 4$ の範囲に限られることが分かる。Watts らは、カスケード現象が起こる平均次数 $\langle k \rangle$ の範囲をカスケードウィンドウと名付けた [5]。

3. ネットワーク上での協調ゲーム

ネットワーク上のノードにあたる各エージェントは、あるイノベーションの採用について、2つの選択肢 $s \in \{1(\text{採用}), 0(\text{非採用})\}$ を持ち、エージェント i の選択を s_i で表す。各エージェントは、表 1 に示す利得行列を持ち、ネットワークによって結合された他エージェントとの相互作用を協調ゲームとして、次のように定式化する。各時刻において、エージェント i は隣接する d_i 人と協調ゲームをする。 d_i はエージェント i が持つ隣接エージェントの数 (次数) である。各ゲームにおけるエージェント i の利得が表 1 の利得行列より、 $u(s_i, s_j)$ で求まるとき、ゲーム全体におけるエージェント i の利得を、式 (7) で与える。

$$U(s_i, s_{j \in N_i}) = \sum_{j \in N_i} u(s_i, s_j) \quad (7)$$

N_i は、エージェント i の隣接エージェントの集合である。

エージェント i とつながりのあるエージェントで、「採用」を選択しているエージェントの割合を p (「非採用」の割合を $1-p$) で表す。周囲の採用割合 p が式 (8) に示す閾値 ϕ よりも大きければ、 $s_i = 1$ (採用) を選択し、閾値 ϕ よりも小さければ、 $s_i = 0$ (非採用) を選択することが、それぞれの場合において自分の利得を最大にする合理的な選択である。

$$s_i = \begin{cases} 1 & p > \phi \quad (\phi = b/(a+b)) \\ 0 & p < \phi \end{cases} \quad (8)$$

このことから、式 (1) で与えた決定論的閾値ルールは、

表 1 利得行列

Table 1 Payoff matrix.

相手	採用	非採用
自分		
採用	a, a	0, 0
非採用	0, 0	b, b

協調ゲームにおける各エージェントの合理的な選択ルール（最適反応戦略）と一致する。

4. 確率的閾値ルールとカスケード現象

本節では、決定論的なエージェントの合理的な選択を、確率的な選択ルールに拡張し、カスケード現象が起こるための条件を求める。

4.1 確率的閾値ルール

各エージェントが $s = 1$ を選択する確率を式 (9) で与える。

$$f(p) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta(p - \phi))} \quad (9)$$

p は、つながりのあるエージェントが採用 ($s = 1$) を選択している割合、 ϕ は各エージェントの閾値である。 p が ϕ 以下であれば、エージェントが採用する可能性は小さく、 ϕ 以上であればほぼ確実に採用する。 β は、エージェントの合理性を表すパラメータである。図 2 に示すように、 β が大きいほど合理的で $p = \phi$ を境に採用確率 $f(p)$ は大きく変化する。 β が小さい場合、 $f(p)$ の変化は緩やかになり、たとえば、 p が ϕ 以下でも採用する可能性が高まる。このように、パラメータ β を変更することで、決定論的な閾値ルール ($\beta \simeq \infty$) やランダムな選択 ($\beta = 0$) など、幅広く表すことができる [11]。

4.2 平均場近似によるカスケードの解析

各エージェントの選択が確率的閾値ルールに基づくとき、カスケードウィンドウは存在しないことを示す。はじめに、決定論的閾値ルールの下でカスケード現象が起きる条件を平均場近似解析により求め、次に確率的閾値ルールの下で調べる。

平均場近似解析は、厳密にはノード数が十分に大きく、

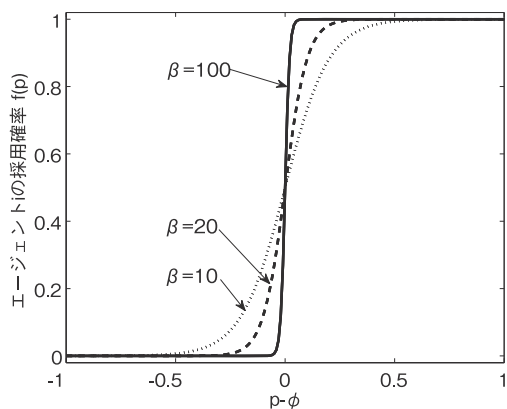


図 2 エージェント i の採用確率 $f(p)$ (p : 周囲の採用率, ϕ : 閾値)
Fig. 2 The probability that agent i adopts innovation is plotted as a function of $p - \phi$, where p represents the adoption rate of adjacent agents and ϕ represents the threshold of agent.

次数相関やクラスタ構造を無視できるネットワークに対して有効であるが、有限なネットワークに対しても、カスケード現象のおおまかな特徴を知ることができる [12]. $\rho_k(t)$ を、時刻 t で k 本のリンクを持つエージェント (ノード) がイノベーションを採用している割合とする。ネットワークからランダムにリンクを選んだとき、そのリンクの先にあるエージェントがイノベーションを採用している割合 $\theta(t)$ は、式 (10) によって計算できる。

$$\theta(t) = \frac{1}{2L} \sum_k NkP(k)\rho_k(t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k)\rho_k(t) \quad (10)$$

L はリンク数、 N はノード数、 $P(k)$ は次数 k の確率密度分布である。

k 本のリンクを持つエージェントが s 、 k_1 人のイノベーションを採用したエージェントを周囲に持つ確率 $g(\theta, k, k_1)$ は、式 (11) で与えられる。

$$g(\theta, k, k_1) = {}_k C_{k_1} \theta^{k_1} (1 - \theta)^{k - k_1} \quad (11)$$

k 本のリンクを持つエージェント i について、 k_1 人のエージェントがイノベーションを採用しているとき、エージェント i の選択確率は、式 (12) で与えられる ($P_\phi(s = 1 | k_1, k) + P_\phi(s = 0 | k_1, k) = 1$ である)。 $s = 1$ はイノベーションを採用している状態、 $s = 0$ は採用していない状態を表す。

$$P_\phi(s = 1 | k_1, k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k_1/k \geq \phi \\ 0 & \text{if } k_1/k < \phi \end{cases} \quad (12)$$

k 本のリンクを持つエージェントが $s = 1$ を選択する割合 $r_{s=1}$ は、式 (11) と式 (12) より、式 (13) で表される。

$$r_{s=1} = \sum_{k_1=0}^k P_\phi(s = 1 | k_1, k) g(\theta, k, k_1) \quad (13)$$

k 本のリンクを持つエージェントが $s = 0$ を選択する割合 $r_{s=0}$ は、式 (14) で表される。

$$r_{s=0} = \sum_{k_1=0}^k P_\phi(s = 0 | k_1, k) g(\theta, k, k_1) \quad (14)$$

そして、 $\rho_k(t)$ の時間変化は、式 (15) で与えられる。

$$\frac{d\rho_k(t)}{dt} = (1 - \rho_k(t))r_{s=1} - \rho_k(t)r_{s=0} \quad (15)$$

定常状態では、 $d\rho_k(t)/dt$ は 0 になるので、 $\rho_k(t)$ は式 (16) のように求まる。

$$\rho_k(t) = \sum_{k_1=0}^k P_\phi(s = 1 | k_1, k) g(\theta, k, k_1) \quad (16)$$

式 (10) と式 (16) から、 θ の関係式として式 (17) を得る。

$$\theta(t) = H_\phi(\theta_{t-1}) \quad (17)$$

ただし、 $H_\phi(\theta_{t-1}) \equiv \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k)r_{s=1}$

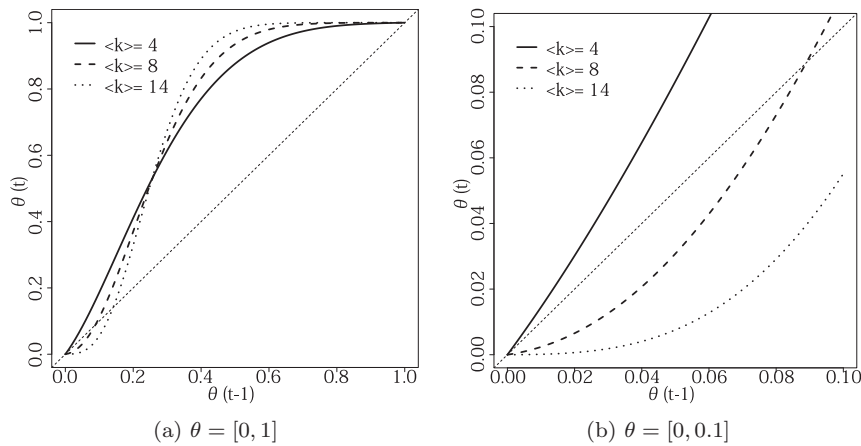


図 3 平均次数 $\langle k \rangle$ と $\theta(t)$ の変化の関係：(ランダムネットワーク, $\langle k \rangle = 4, 8, 14$, $\phi = 0.25$)

Fig. 3 The relationship between $\langle k \rangle$ and θ : (random network, $\langle k \rangle = 4, 8, 14$, $\phi = 0.25$).

式 (17) を使って、ネットワークの次数分布 $P(k)$ と平均次数 $\langle k \rangle$ の関係から、イノベーションが社会に浸透する様相を知ることができる。図 3 は、平均次数 $\langle k \rangle = 4, 8, 14$ を持つランダムネットワークにおいて、閾値 $\phi = 0.25$ としたとき、式 (17) より θ の変化を描いたものである。

図 3(a) 上の曲線が傾き 1 の直線より上にあれば、カスケード現象は拡大していく ($\theta \rightarrow 1$)、一方で、それよりも下にあれば、カスケード現象は起こらず、イノベーションを採用するエージェント数は時間とともに減少していく ($\theta \rightarrow 0$)。図 3(b) から、ネットワークの平均次数 $\langle k \rangle$ の増加によって、 θ が小さいときに曲線が直線の下を描くことが分かる。カスケード現象は、ごく少数 ($\theta \simeq 0$ 付近) のイノベータの採用によって始まるとする場合は、平均次数 $\langle k \rangle$ が大きいネットワークでカスケードが起きるためには、この直線とのギャップを越える必要がある。

4.3 確率的な選択がもたらす効果

本節では、各エージェントの選択が確率的閾値ルールに基づくとき、カスケードが起こるための条件を求める。そして、エージェントの合理性を表すパラメータ β を適切に設定すると、図 3 の θ の変化曲線は傾き 1 の直線より上を描くことにより、カスケードウィンドウは存在しないことを示す。

初期条件として、 $\theta \simeq 0$ のとき、エージェントがイノベーションを採用する確率 $f(\theta \simeq 0)$ を ϵ とする。 $\theta = 0$ 付近では、式 (17) は式 (18) として求まる。 ϵ は式 (19) で表され、エージェントが合理的な選択を誤る確率と見なせる。

$$\theta(t) = \frac{1}{2L} \sum_k NkP(k) (\rho_k(t-1) + \epsilon) = H_\phi(\theta_{t-1}) + \epsilon \tag{18}$$

$$\epsilon = \frac{1}{1 + \exp(\beta\phi)} \tag{19}$$

$\theta = 0$ 付近において、 $\epsilon = 0.025$ としたとき、 θ の変化曲

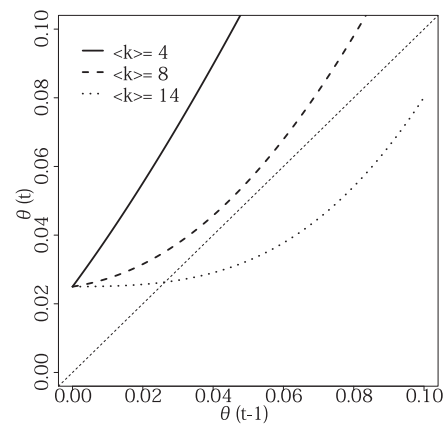


図 4 ϵ の効果：(ランダムネットワーク, $\epsilon = 0.025$, $\phi = 0.25$ の場合)

Fig. 4 The effect of error rate ϵ (random network, $\epsilon = 0.025$, $\phi = 0.25$).

線を図 4 に示す (他の条件は、図 3 と同じである)。図 3 では、 $\langle k \rangle = 8$ のとき、直線の下を描いた θ の曲線が、確率的な選択の影響によって、傾き 1 の直線より上を描くようになる。

次に、エージェントの合理性を示すパラメータ β について考える。図 3 から定まる直線と曲線のギャップを越えるのに必要な β の上限は、式 (20) で与えられる。 $H_\phi(\theta_{t-1})$ は、ネットワークの平均次数 $\langle k \rangle$ 、閾値 ϕ 、そして θ_t によって決まる。 β は、これらの変数の関数として以下のように求まる。

$$\beta = \operatorname{argmax}_{\beta \in [0, \infty)} \tag{20}$$

$$\text{s.t. } \frac{1}{1 + \exp(-\beta(\theta_{t-1} - \phi))} > \theta_{t-1} - H_\phi(\theta_{t-1}) \quad \forall \theta_{t-1}$$

β が小さすぎると、多くのエージェントがイノベーションを採用する定常状態には収束しない。たとえば、 $\beta \simeq 0$ のときは、各エージェントの選択はランダムに近い状態になる。ここで、カスケードが十分に広がったとき、許容す

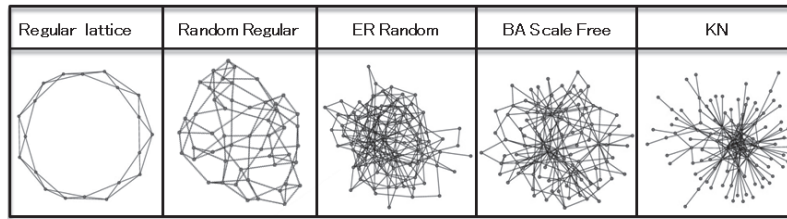


図 5 各ネットワークの例
Fig. 5 The example of networks.

表 2 各ネットワークの特徴量
Table 2 The statistical properties of networks.

ネットワーク	Regular Lattice	Random Regular	ER	Scale Free(BA)	KN
エージェント数(ノード数)	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000
平均次数	4	4	4	4	4
直径	750	10	13	8	9
平均ホップ数	375.4	6.6	6.0	4.5	3.8
次数相関	NA	NA	0.00	0.21	0.26
クラスタ係数	0.50	0.00	0.00	0.01	0.10

る θ の振動の幅 (エージェントの割合) を W_{error} とすると、カスケードが起きるための β の下限は、式 (21) で与えられる。

$$\beta = \operatorname{argmin}_{\beta \in [0, \infty)} \beta \quad (21)$$

s.t. $\frac{1}{1 + \exp(-\beta(1 - \phi))} < W_{\text{error}}$

β が式 (20) と式 (21) の範囲であれば、許容範囲内の振動をとまなうが、ほぼ全員がイノベーションを採用する状態に収束する。

5. シミュレーション実験

前章では、決定論的閾値ルールと確率的閾値ルールの下、カスケードが起きる条件を平均場近似により求めた。平均場近似は、適用するネットワーク構造が平均的で、次数相関やクラスタ構造がないなどの制約があるため、本章ではシミュレーション実験により、カスケードが起こる条件をネットワーク構造と閾値の関係から求める。

5.1 ネットワーク構造

シミュレーション実験で扱うネットワークは、以下の5つである。

(1) 正規格子ネットワーク (Regular lattice)

正規格子ネットワークは、すべてのノードが同じ次数 (k) を持つ格子ネットワークである。各ノードは、左右にある $\langle k \rangle / 2$ 個のノードと結ばれている。

(2) ランダムレギュラーネットワーク (Random Regular)

ランダムレギュラーネットワークは、すべてのノードは同じ次数を持つが、リンクの張り方は正規格子ネットワー

クのように規則的ではなく、ランダムに張られる。

(3) ランダムネットワーク (ER)

ノード間に接続確率 p でリンクを張ることでランダムネットワークは生成される。

(4) スケールフリーネットワーク (BA)

次数分布 $P(k)$ が式 (22) に示す、べき分布に従うネットワークを用いる [13]。

$$P(k) \propto k^{-3} \quad (22)$$

(5) KN ネットワーク (KN)

KN ネットワークは、ネットワークの隣接行列の最大固有値を最大にするネットワークである。スケールフリーネットワークより感染などが広まり易いという性質を持つ [14], [15]。KN ネットワークの次数分布 $P(k)$ は、式 (23) に示すべき分布に従う。

$$P(k) \propto k^{-(2 + \frac{1}{\langle k \rangle - 1})} \quad (23)$$

$\langle k \rangle$ は平均次数。

各ネットワークを図 5 に描写し、ネットワークの特徴量を表 2 に示す。

5.2 シミュレーション設定

初期条件として、ほぼすべてのエージェントの状態 s を 0 とし、ごく一部のエージェントを先駆的にイノベーションを採用する ($s = 1$) イノベータとする。これらのイノベータは、ネットワーク全体からランダムに選択し、その割合は全エージェント (3,000 人) の 0.1% (= 3 人) とする。全エージェントは、同じ閾値 $\phi = 0.25$ を持つ。そして、決定論的な閾値ルール ($\beta \simeq \infty$) と確率的閾値ルー

表 3 シミュレーション設定
Table 3 Simulation settings.

項目	内容
ネットワークのノード数	3,000
ネットワークの平均次数	2~14
イノベータの選択	ランダム
イノベータの数	エージェント数の 0.1% (= 3 個)
各エージェントの閾値	$\phi = 0.25$
モデル	閾値モデル: $\beta \simeq \infty$, 確率的閾値モデル: $\beta = 18$
シミュレーション時間	0~200 ステップ
試行回数	1,000 回

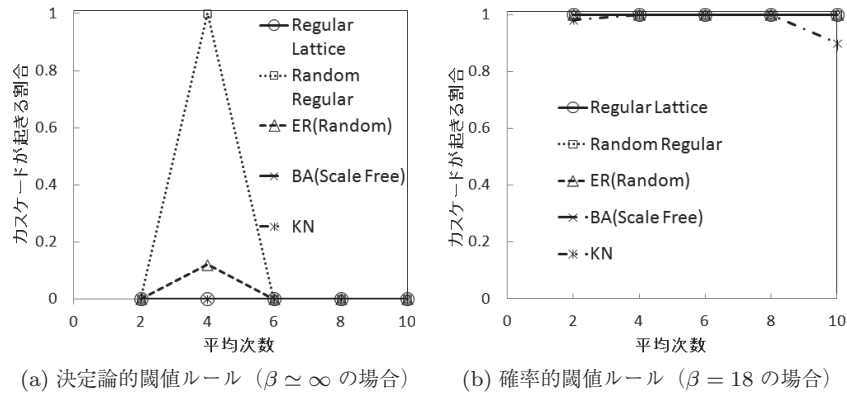


図 6 カスケード現象が起きる割合とネットワークの平均次数との関係：(試行回数：1,000 回)
Fig. 6 The incidence rate of cascade is plotted as a function of average degree of networks $\langle k \rangle$.

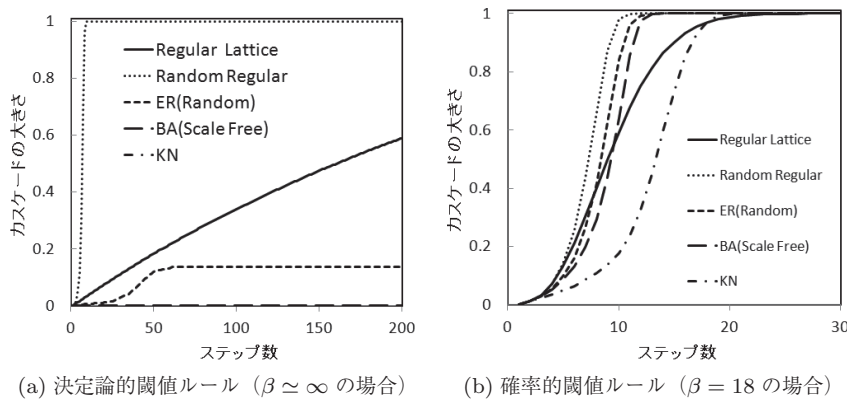


図 7 カスケードの大きさ (イノベーションの浸透率) の時間変化：(平均次数 $\langle k \rangle = 4$ の場合)
Fig. 7 The time evolution of cascade ($\langle k \rangle = 4$).

ル ($\beta = 18$) の下、イノベーションの浸透に関するシミュレーション実験を行う。シミュレーションは、0 から 200 ステップまで行い、1,000 回のシミュレーション実験の平均値を求める。シミュレーションの条件設定を、表 3 にまとめる。確率的閾値ルールの下では、 ϵ (誤り率) により定常状態での小さな振動が生じることを考慮し、99%以上のエージェントが $s = 0$ から $s = 1$ に変化したとき、カスケード現象が起きたと見なす。

5.3 シミュレーション結果

5.3.1 平均次数 $\langle k \rangle$ との関係

カスケード現象の起こりやすさを、全試行回数 1,000 回中にカスケード現象が起きた割合で定義する。カスケードが起きた割合を平均次数 $\langle k \rangle$ の関係として図 6 に示す。図 6(a) より決定論的閾値ルール ($\beta \simeq \infty$) の下では、カスケードウィンドウが存在することが分かる。正規格子およびランダムレギュラーネットワークで、平均次数 $\langle k \rangle$ が 2 または 4 のときカスケード現象が起きないのは、ステップ数 ($t = 200$) までに採用を選択するエージェントが広まらなかったためである。一方で、KN やスケールフリー

表 4 社会浸透までの平均ステップ数の比較

Table 4 The comparison of average time-steps for cascade.

	Regular Lattice	Random Regular	ER	Scale Free(BA)	KN
決定論的閾値ルール	414	8	浸透せず	浸透せず	浸透せず
確率的閾値ルール	21	11	12	13	17

表 5 社会浸透に要する平均所要ステップ数の検定結果 (有意水準 5%)

Table 5 The results of tests of the average time-steps for cascade.

ネットワークの組	F 検定の結果	t 検定の結果 (t 境界値 (両側), t)
Random Regular, ER	非等分散	有意差あり (1.96, 76.4)
ER, BA	非等分散	有意差あり (1.96, 17.7)
BA, KN	非等分散	有意差あり (1.96, 78.9)
KN, Regular Lattice	非等分散	有意差あり (1.96, 50.9)

ネットワークでは、 $s = 1$ となるエージェントが一部にとどまり、カスケード現象は起きていない。

一方で、図 6(b) 確率的閾値ルール ($\beta = 18$) の下では、平均次数 $\langle k \rangle$ やネットワーク構造に関係なく、カスケード現象が起きて、 $s = 1$ を選択するエージェントがネットワーク全体に広がる。

5.3.2 カスケードの速さ

カスケード現象が起きて、 $s = 1$ を選択するエージェントがネットワーク全体に広がるまでのステップ数を比較する。カスケードの大きさ (状態 $s = 1$ であるエージェントの割合) の時間変化を図 7、ネットワーク全体 (99%以上のエージェントが $s = 1$ となる状態) に広がるまでに要した平均ステップ数を表 4 に示す。図 7(b) から、決定論的閾値ルールの下での結果 (図 7(a)) とは異なり、確率的閾値ルールの下では、 $s = 1$ を選択するエージェントが増大することが分かる。カスケード現象の広がり方についても、一定の小さな変化の積み重ねによってネットワーク全体に広がるのではないことが分かる。カスケード現象の端緒が起きてから、はじめの変化率は小さいが、ある程度浸透が進むと急激に大きくなり、その後再び小さくなるといった、S 字カーブを描く。

表 4 から、カスケードの広まる速さ (平均所要ステップ数 \bar{T}) は、ノード間の平均ホップ数が大きい正規格子ネットワークを除き、ランダムレギュラーネットワークやランダムネットワークのような同質的なネットワークは、スケールフリーネットワークや KN ネットワークのような異質的なネットワークと比較して、カスケードの広まりが速いことがいえる。

これについて検定を行う。母集団が正規分布に従うと仮定する。平均値の大小関係を考慮して選択した各組のネットワークについて、所要ステップ数の F 検定 (等分散の検定) および t 検定を行った結果を表 5 に示す (有意水準は 5%)。これから、各ネットワークの下での平均所要ステップ数 \bar{T} には有意差があり、式 (24) の関係にあることが分

かる。

$$\begin{aligned} \bar{T}_{Random\ Regular} < \bar{T}_{ER} < \bar{T}_{BA} < \bar{T}_{KN} \\ < \bar{T}_{Regular\ Lattice} \end{aligned} \quad (24)$$

平均次数 $\langle k \rangle = 4$ の結果を示したが、平均次数 $\langle k \rangle = 8$ のときも、同様な結果が得られている。

6. まとめ

本稿では、各エージェントの選択が確率的閾値ルールに基づくとき、カスケード現象の生起条件をネットワーク構造と閾値との関係から調べた。確率的閾値ルールは、個々のエージェントの合理的な選択に小さな確率で誤りを含む場合である。その結果、各エージェントの選択が決定論的な閾値ルールに基づくときに現れるカスケードウィンドウは存在せず、ネットワーク構造に関係なくカスケード現象が起こることを示した。このことから、各人の合理的な選択に誤りやあいまいさがともなうことで、イノベーションなどが社会に浸透しやすいことを明らかにした。また、イノベーションの浸透する速さを比較し、スケールフリーネットワークや KN ネットワークのようにハブノードが存在する異質性の高いネットワークより、ランダムレギュラーネットワークのような、同質なネットワークの方が、イノベーションなどは速く浸透することを示した。

優れたイノベーションであっても、なかなか普及しないケースが多いことが知られている。これは、多くの人が採用していない状態にあっては、採用しない方が個々にとって合理的であるからである。このような閉塞感のある状況にあって、イノベーションを普及させていくには、採用することが非合理的であってもあえて採用するような人を増加させることである。このことをイノベーションの普及は偶然が決定するという見方もある。本稿では、各エージェントの偶発的な選択をとともなう確率的な選択ルールとしてモデル化した。

今後の課題は、カスケード現象を引き起こすうえで欠か

せない“偶然の影響”が個人の選択というマイクロレベルで作用する以外に、社会ネットワークの形成にどのように作用するのか、さらには偶然性やゆらぎの影響を実社会におけるイノベーションの普及などに還元する方策について検討することである。

参考文献

- [1] Meade, N. and Islam, T.: Modelling and forecasting the diffusion of innovation – A 25-year review, *International Journal of Forecasting*, Vol.22, No.3, pp.519–545 (2006).
- [2] Hauser, J., Tellis, G.J. and Griffin, A.: Research on innovation: A review and agenda for marketing science, *Marketing Science*, Vol.25, No.6, pp.687–717 (2006).
- [3] Tellis, G.J.: A critical review of marketing research on diffusion of new products, *Review of Marketing Research*, Vol.3, pp.39–80 (2007).
- [4] Lorenz, J., Battiston, S. and Schweitzer, F.: Systemic risk in a unifying framework for cascading processes on networks, *The European Physical Journal B – Condensed Matter and Complex Systems*, Vol.71, pp.441–460 (2009).
- [5] Watts, D.J.: A simple model of global cascades on random networks, *Proc. National Academy of Sciences*, Vol.99, No.9, pp.5766–5771 (2002).
- [6] Watts, D.J. and Dodds, P.S.: Influentials, networks, and public opinion formation, *Journal of Consumer Research*, Vol.34, pp.441–458 (2007).
- [7] López-Pintado, D.: Contagion and coordination in random networks, *International Journal of Game Theory*, Vol.34, No.3, pp.371–381 (2006).
- [8] Young, H.P.: The evolution of conventions, *Econometrica*, Vol.61, pp.57–84 (1993).
- [9] Young, H.P.: The dynamics of social innovation, *Economic Theory Workshop*, Department of Economics, University of Warwick (May 2010).
- [10] Granovetter, M.: Threshold models of collective behavior, *American Journal of Sociology*, Vol.83, No.6, pp.1420–1443 (1978).
- [11] Blume, L.E.: The statistical mechanics of strategic interaction, *Games and Economic Behavior*, Vol.5, No.3, pp.387–424 (1993).
- [12] 増田直己, 今野紀雄: 複雑ネットワーク—基礎から応用まで, 近代科学社 (2010).
- [13] Barabasi, A.L. and Albert, R.: Emergence of scaling in random networks, *Science*, Vol.286, pp.509–512 (1999).
- [14] 小松孝紀, 生天目章: 伝搬の拡大に適したネットワークの構成法, 第7回ネットワーク生態学シンポジウム予稿集, pp.57–64 (2011).
- [15] Komatsu, T. and Namatame, A.: Dynamic diffusion process in evolutionary optimized networks, *International Journal of Bio-Inspired Computation*, Vol.3, No.6, pp.384–392 (2011).

付 録

A.1 母関数によるアーリーアダプタのクラスタサイズの導出

ネットワークの次数分布 $P(k)$ の母関数を、式 (A.1) で与える。

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k)x^k \tag{A.1}$$

このとき、次数分布 $P(k)$ の平均次数 (1次モーメント) $\langle k \rangle = \sum kP(k)$ は母関数を用いて $G'_0(1)$ で求めることができる。また n 次モーメントは式 (A.2) で求まる。

$$\langle k^n \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k^n P(k) = \left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^n G_0(x) \right]_{x=1} \tag{A.2}$$

ネットワークから、ランダムに選択したリンクについて、その先にあるノードの次数が k である確率密度分布は、 $kP(k)/\langle k \rangle$ であり、これを係数に持つ母関数を $G'_0(x)$ を用いて式 (A.3) で与える。

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{k=0}^{\infty} kP(k)x^k}{\langle k \rangle} \\ &= \frac{0P(k)x^0 + 1P(1)x^1 + 2P(2)x^2 + 3P(3)x^3 + \dots}{\langle k \rangle} \\ &= \frac{xG'_0(x)}{\langle k \rangle} \end{aligned} \tag{A.3}$$

また、たどってきたリンクを除く次数分布 (出次数分布) の母関数 $G_1(x)$ を式 (A.4) で与える。

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \frac{1P(1)x^0 + 2P(2)x^1 + 3P(3)x^2 + \dots}{\langle k \rangle} \\ &= \frac{G'_0(x)}{\langle k \rangle} \end{aligned} \tag{A.4}$$

ネットワークから m 個のノードをランダムに選択したとき、それらのノードの次数の総和の確率密度分布は、次数分布 $P(k)$ の母関数のべき乗 $G_0(x)^m$ で求めることができる。たとえば、 $m=2$ のときは、次のようになる。

$$\begin{aligned} [G_0(x)]^2 &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} P(k)x^k \right]^2 \\ &= P(0)P(0)x^0 + (P(0)P(1) + P(1)P(0))x^1 \\ &\quad + (P(0)P(2) + P(1)P(1) + P(2)P(0))x^2 \\ &\quad + \dots \end{aligned} \tag{A.5}$$

x^k の各係数は、選択した2つのノードの次数の和が k となる確率を表す。

上述した母関数の性質を用いて、ネットワークにあるクラスタ (リンクによって結ばれたノード) の平均サイズを求める。前提条件として、ノード数は無限大でかつネットワークの平均次数が十分に小さく、ネットワークが木構造と見せるとする。また、ネットワーク構造は平均的であると。つまり、リンクの結び付き方について、場所による偏りが無いとする。このとき、ランダムに選択したリンクの先にあるノード群 (クラスタ) と、リンクの端にあるノードから見たクラスタの差は無視できる (図 A.1 参照)。したがって、クラスタサイズ分布の母関数 $H_1(x)$ は、図 A.1 に示した構造の再帰性と式 (A.5) で示した母関数の

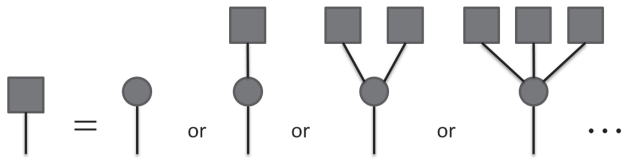


図 A.1 木構造の模式図：ネットワークについてノード数が無限大で木構造であるとき、あるリンクから見たネットワーク構造とその先にあるノードから見た構造には再帰的な関係が見られる

Fig. A.1 The schematic diagram of tree structure: When the number of nodes is infinity, and the network has tree structure, the network is formed by recursive patterns.

べき乗の性質を利用して、自身の関数 $f(H_1(x))$ として次のように表せる。

$$\begin{aligned}
 H_1(x) &= f(H_1(x)) \\
 &= xq_0 + xq_1H_1(x) + xq_2[H_1(x)]^2 \\
 &\quad + xq_3[H_1(x)]^3 + \dots \\
 &= xG_1(H_1(x)) \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

ここで、 q_k はたどったリンクの先にあるノードの次数の内、たどってきたリンクを含まない次数 k の確率密度分布を表す。

あるリンクではなく、あるノードから見たクラスタサイズ分布の母関数 $H_0(x)$ は式 (A.7) となる。

$$H_0(x) = xG_0(H_1(x)) \tag{A.7}$$

ランダムに選択したノードを含むクラスタの平均サイズ $\langle n \rangle$ を、次のようにして求める。

$$\begin{aligned}
 \langle n \rangle &= H'_0(1) = G_0(H_1(x)) + G'_0(H_1(x))H'_1(1) \\
 &= 1 + G'_0(1)H'_1(1) \tag{A.8}
 \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
 H'_1(1) &= G_1(H_1(1)) + G'_1(H_1(1))H'_1(1) \\
 &= 1 + G'_1(1)H'_1(1) \\
 &= \frac{1}{1 - G'_1(1)} \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

であるから、式 (A.8)、式 (A.9) から $\langle n \rangle$ の関係式として式 (A.10) を得る。

$$\langle n \rangle = 1 + \frac{G'_0(1)}{1 - G'_1(1)} = 1 + \frac{\langle k \rangle G'_0(1)}{\langle k \rangle - G''_0(1)} \tag{A.10}$$

次に、アーリーアダプタの平均クラスタサイズを求める。アーリーアダプタの次数分布は式 (3) より、 $\xi_k P(k)$ であるから、その母関数を式 (A.11) で与える。

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k P(k) x^k \tag{A.11}$$

式 (A.10)、式 (A.11) から、アーリーアダプタによるクラスタの平均サイズ $\langle n \rangle$ として式 (A.12) を得る。

$$\langle n \rangle = 1 + \frac{\langle k \rangle \langle k_{\text{early}} \rangle}{\langle k \rangle - G''_0(1)} \tag{A.12}$$

$\langle k_{\text{early}} \rangle$ はアーリーアダプタの平均次数である。



小松 孝紀

2001 年東京農工大学工学部卒業。2003 年航空自衛隊入隊。2008 年防衛大学校博士前期課程修了、2010 年より防衛大学校博士後期課程在籍。ネットワークセキュリティ、情報伝播、マルチエージェント等の研究に従事。



生天目 章 (正会員)

1973 年防衛大学校卒業。1977 年米国スタンフォード大学修士課程修了、1979 年同博士課程了、1986 年より防衛大学校情報工学科助教授。現在、防衛大学校情報工学科教授。専門分野は「エージェント」「複雑系」「計量的社会科学」。著書に『ゲーム理論と進化ダイナミクス』『マルチエージェントと複雑系』（森北出版）、『戦略的意思決定』（朝倉書店）等がある。