チェビシェフ補間多項式による函数の逐次近似*

鳥居達生**　牧之内三郎**

We now consider to expand a "well-behaved" function over a finite range in a series of Chebyshev polynomials.

Doubling the number of interpolating points, Clenshaw has determined mechanically the degree 2^k and coefficients of a truncated Chebyshev series for the preassigned accuracy, without previous computed values of the function being wasted.

We refine the Clenshaw's method, and reduce the number of multiplications. If the degree N of that series is 2^k, calculation of all the coefficients requires about $N^2/12$ multiplications by combining the trapezoidal rule and the midpoint rule.

1. はじめに

区間 $[-1, 1]$ において有界変分で連続な函数 $f(x)$ のチェビシェフ級数は $f(x)$ に一様収束する．展開係数の計算には積分が必要であるが，ここでは極限操作は用いない．補間多項式によって $f(x)$ を近似する．$f(x)$ が上の条件をみたすならば，チェビシェフ多項式の選点直交性を利用した補間多項式も $f(x)$ に収束する．

さて $f(x)$ をチェビシェフ展開して

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0T_0(x)+a_1T_1(x)+a_2T_2(x)+\cdots \tag{1a}$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\cos\theta)\cos k\theta d\theta \tag{1b}$$

$$T_k(x)=\cos(k\cos^{-1}x)$$

とする．チェビシェフ多項式の選点直交式は二つあるので，それぞれに応じて補間多項式をつくることができる．

第一に，選点直交式

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}T_r(x_k)T_s(x_k)$$
$$=\begin{cases}0,\ s=2mn\pm r,\ r=n,\ \text{および}\ s\neq 2mn\pm r\\(-1)^m,\ s=2mn\pm r,\ r\neq 0,\ n\\(-1)^m\times 2,\ s=2mn\pm r,\ r=0\end{cases}$$

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$$

$$r=0,1,\cdots,n;\ m=0,1,2,\cdots$$

より，$n-1$ 次の補間多項式

$$\sum_{r=0}^{n-1}{}' b_rT_r(x) \tag{2a}$$

$$b_r=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}T_r(x_k)f(x_k) \tag{2b}$$

が得られる．ここで $\sum'$ は，第一項だけ 1/2 倍して和をとることを意味する．

第二に，選点直交式

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' T_r(x_k)T_s(x_k)$$
$$=\begin{cases}0,\ s\neq 2mn\pm r\\1,\ s=2mn\pm r,\ r\neq 0,\ n\\2,\ s=2mn\pm r,\ r=0,\ n\end{cases}$$

$$x_k=\cos\frac{k}{n}\pi$$

$$r=0,1,2,\cdots,n;\ m=0,1,2,\cdots$$

より n 次の補間多項式

$$\sum_{r=0}^{n}{}'' c_rT_r(x) \tag{3a}$$

$$c_r=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' T_r(x_k)f(x_k) \tag{3b}$$

が得られる．ここで $\sum''$ は，第一項と最後の項だけ 1/2 倍して和をとることを意味する．

定積分 (1b) と係数 b_r, c_r の計算式 (2b), (3b) の関係に注目する．角 $\theta=\cos^{-1}x$ に関し，(2b), (3b) は (1b) を，それぞれ中点則，梯形則によって求めたものに外ならないから，補間多項式 (2a) は中点則によるチェビシェフ補間多項式，(3a) は梯形則によるチェビシェフ補間多項式とよぶことができる．ここでは，それらを簡単に中点式，梯形式ということにする．

係数 b_r, c_r の近似度は，上に述べた二つの選点直交式より簡単に計算できて

* Successive Approximation for Functions by Chebyshev Expansion Making Double the Interpolation Points, by Tatsuo Torii and Saburo Makinouchi (Faculty of Engineering, Osaka University).

** 大阪大学工学部

$$b_r=a_r-(a_{2n-r}+a_{2n+r})+(a_{4n-r}+a_{4n+r})-\cdots \tag{4}$$

$$c_r=a_r+(a_{2n-r}+a_{2n+r})+(a_{4n-r}+a_{4n+r})+\cdots \tag{5}$$

となる．明らかに $\frac{1}{2}(b_r+c_r)$ は，チェビシェフ展開係数 a_r のより精確な近似値として使える[1]．$2n$ 次の梯形式の係数を c_r' とすれば，(5) より

$$c_r'=a_r+(a_{4n-r}+a_{4n+r})+(a_{8n-r}+a_{8n+r})+\cdots$$

r の代りに $2n-r$ とおけば

$$c'_{2n-r}=a_{2n-r}+a_{2n+r}+a_{6n-r}+a_{6n+r}+\cdots$$

となる．ところで上の二式の右辺は，それぞれ $\frac{1}{2}(c_r+b_r)$, $\frac{1}{2}(c_r-b_r)$ と一致するので

$$\left.\begin{aligned} c_r'&=(c_r+b_r)/2\\ c'_{2n-r}&=(c_r-b_r)/2,\ r=0,1,\cdots,n-1\\ c_n'&=c_n/2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

が成り立つ．この関係式を用いれば，次数が2のベキの梯形式は，中点式の計算を繰り返すことにより求められる．したがって中点式の計算法を改良することはとくに意味がある．

n が4の倍数ならば，$n-1$ 次の中点式を約 $n^2/4$ 回の乗算で計算できることを後に示す．この結果として $n=2^m$（m は任意の自然数）ならば，n 次の梯形式を約 $n^2/12$ 回の乗算で求めることができる．同時に次数が $2^1, 2^2, \cdots, 2^m$ の梯形式の列が得られるので，収束の状況がわかる．したがって，必要な精度に応じて近似式の次数を 2^m のきざみではあるが，機械的に決定できる．また $f(x)$ に関する数値的情報（補間点における函数値）は，梯形式の列をつくるのに，無駄なく使用される．

最近，n（偶数）次の梯形式を約 $n^2/4$ 回の乗算で求める方法が発表されている[1]．

2. 漸化式によるある種の級数の計算法

チェビシェフ補間多項式の係数 b_r あるいは c_r を"簡単に"求めるための準備として，ある種の級数の計算法について述べる．

数列あるいは函数列 $\{u_k\}$ は三項漸化式

$$\left.\begin{aligned} &a_ku_{k-1}+b_ku_k+c_ku_{k+1}=0\\ &a_kc_k\neq 0,\ k=2,3,\cdots,n-1 \end{aligned}\right\} \tag{7 a}$$

にしたがうものとする．さらに $\{u_k\}$ の初期条件を

$$\left.\begin{aligned} &c_0u_1=\eta_0\\ &b_1u_1+c_1u_2=\eta_1 \end{aligned}\right\} \tag{7 b}$$

の形で与えることにする．

さて n 項の級数

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\gamma_ku_k \tag{8}$$

を漸化式を用いて計算しよう．

(7 a), (7 b), (8) を一つにまとめると

$$\begin{bmatrix} c_0 & & & & & \eta_0\\ b_1 & c_1 & & 0 & & \eta_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & & & 0\\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & 0\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n & S_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ \vdots\\ \vdots\\ u_n\\ -1 \end{bmatrix}=0$$

となる．この式は，係数行列の列ベクトルが一次従属と読める．したがって係数行列の行ベクトルも，また一次従属，すなわち適当に数列 $\{v_k\}$ をとると

$$\begin{bmatrix} c_0 & b_1 & a_2 & & 0 & \gamma_1\\ & c_1 & b_2 & \ddots & & \gamma_2\\ & & c_2 & \ddots & a_{n-1} & \vdots\\ & 0 & & \ddots & b_{n-1} & \gamma_{n-1}\\ & & & & c_{n-1} & \gamma_n\\ \eta_0 & \eta_1 & 0 & \cdots & 0 & S_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0\\ v_1\\ \vdots\\ \vdots\\ v_{n-1}\\ -1 \end{bmatrix}=0$$

と表わすことができる．これを漸化式の形にもどす．

最初の n 行から

$$\left.\begin{aligned} &c_{k-1}v_{k-1}+b_kv_k+a_{k+1}v_{k+1}-\gamma_k=0\\ &v_{n+1}=v_n=0,\ k=n,n-1,\cdots,1 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

最後の行から

$$S_n=\eta_0v_0+\eta_1v_1 \tag{10}$$

が得られる．

3. 中点則によるチェビシェフ補間多項式

中点式の係数 b_r の計算式 (2 b) において，補間点 x_k の対称性 $x_k=-x_{n-k+1}$ と $T_r(x_{n-k+1})=(-1)^rT_r(x_k)$ に注目すれば，項数を半分に減らすことができて

$$b_r=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n/2}T_r(x_k)\{f(x_k)+(-1)^rf(-x_k)\}$$

$$n\text{；偶数.} \tag{11}$$

$n-1$ 次の中点式の補間点は $2n$ 次の梯形式の補間点 x_k' $(k=0,1,\cdots,2n)$ に含まれるので，(11) を $\{x_k'\}$ を用いて書きあらためる．すなわち

$$\left.\begin{aligned} \frac{n}{2}b_r=&T_r(x_1')F_2+T_r(x_3')F_4+\cdots\\ &+T_r(x'_{n-1})F_n\\ &r=0,2,4,\cdots,n-2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{n}{2}b_r=T_r(x_1')F_1+T_r(x_3')F_3+\cdots\\&\qquad+T_r(x'_{n-1})F_{n-1}\\&r=1,3,\cdots,n-1\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

ただし　$F_{2k}\equiv f(x'_{2k-1})+f(-x'_{2k-1})$

$F_{2k-1}\equiv f(x'_{2k-1})-f(-x'_{2k-1})$

nを4の倍数とすれば，偶数次の係数の計算式(12)の項数を半分に減らすことができる．rが偶数のとき

$$T_r(x'_{n-2k+1})=(-1)^{\frac{r}{2}}T_r(x'_{2k-1})$$

が成り立つことから，(12) の右辺は，次のように分けて書ける．

$$\left.\begin{aligned}&\frac{n}{2}b_r=T_r(x_1')F_4^*+T_r(x_3')F_8^*+\cdots\\&\qquad+T_r(x'_{\frac{n}{2}-1})F_n^*\\&r=0,4,8,\cdots,n-4\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{n}{2}b_r=T_r(x_1')F_2^*+T_r(x_3')F_6^*+\cdots\\&\qquad+T_r(x'_{\frac{n}{2}-1})F^*_{n-2}\\&r=2,6,10,\cdots,n-2\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

ただし　$F^*_{4k}\equiv F_{2k}+F_{n-2k+2}$

$F^*_{4k-2}\equiv F_{2k}-F_{n-2k+2}$

つぎに奇数次の係数の計算式 (13) について述べる．rを偶数として

$$\bar{b}_r=\frac{1}{2}(b_{r-1}+b_{r+1})\quad(16)$$

とおく．漸化式 $T_{r+1}(x)+T_{r-1}(x)=2xT_r(x)$ と(13)より

$$\frac{n}{2}\bar{b}_r=T_r(x_1')(x_1'F_1)+T_r(x_3')(x_3'F_3)+\cdots+T_r(x'_{n-1})(x'_{n-1}F_{n-1})$$

が得られる．したがって，$x_1'F_1$ を F_2, $x_3'F_3$ を F_4, … と考えるならば，前述した偶数次の係数の計算法が，そのまま使える．すなわち

$$\left.\begin{aligned}&\frac{n}{2}\bar{b}_r=T_r(x_1')F_3^*+T_r(x_3')F_7^*+\cdots\\&\qquad+T_r(x'_{\frac{n}{2}-1})F^*_{n-1}\\&r=0,4,8,\cdots,n-4\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{n}{2}\bar{b}_r=T_r(x_1')F_1^*+T_r(x_3')F_5^*+\cdots\\&\qquad+T_r(x'_{\frac{n}{2}-1})F^*_{n-3}\\&r=2,6,10,\cdots,n-2\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

ただし　$F^*_{4k-1}\equiv x'_{2k-1}F_{2k-1}+x'_{n-2k+1}F_{n-2k+1}$

$F^*_{4k-3}\equiv x'_{2k-1}F_{2k-1}-x'_{n-2k+1}F_{n-2k+1}$

一方，明らかに $b_{-1}=b_1$ であるから (16) より

$$\left.\begin{aligned}&b_{r+1}=2\bar{b}_r-b_{r-1}\\&b_1=\bar{b}_0,\ r=2,4,\cdots,n-2\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

すなわち，求める奇数次の係数が得られた．

$n/4$ 項の係数 (14), (15), (17), (18) をまとめて

$$S_{\frac{n}{4}}=\gamma_1T_r(x_1')+\gamma_2T_r(x_3')+\cdots+\gamma_{\frac{n}{4}}T_r(x'_{\frac{n}{2}-1})$$

と書き，前節で述べた級数の計算法を，これに適用する．三項漸化式

$$T_r(x'_{2k-3})-2x_{2r}'T_r(x'_{2k-1})+T_r(x'_{2k+1})=0$$

と初期条件に関して

$$T_r(x_1')=x_r'$$

$$-2x_{2r}'T_r(x_1')+T_r(x_3')=-x_r'$$

が成り立つことに注意し，(9), (10) を用いれば

$$\left.\begin{aligned}&v_{k-1}-2x_{2r}'v_k+v_{k+1}-\gamma_k=0\\&v_{\frac{n}{4}+1}=v_{\frac{n}{4}}=0\\&k=\frac{n}{4},\ \frac{n}{4}-1,\cdots,1\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

これより

$$S_{\frac{n}{4}}=x_r'(v_0-v_1)\quad(21)$$

が得られる．

n個の係数 $\{b_r\}$ を求めるに必要な演算回数の主要部分は (20) で費やされるので，乗算回数は約 $n^2/4$ である．

4. 逐次近似

n次の梯形式から出発して $2n$ 次の梯形式をつくる．仮定として前者の補間点 $\{x_k\}$ と係数 $\{c_k\}$ は既知とする．

補間点は $x=0$ を中心にx軸上対称に分布しているので片側だけ記憶すればよい．$2n$ 次の梯形式の補間点 $\{x_k'\}$ は次によって求まる．

$$\left.\begin{aligned}&x'_{2k}=x_k,\ k=0,1,\cdots,\frac{n}{2}\\&x_1'=\sqrt{\frac{1}{2}(1+x_2')}\\&x'_{2k-1}=\frac{1}{2x_1'}(x'_{2k}+x'_{2k-2}),\ k=2,3,\cdots,\frac{n}{2}\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

$\{x_k'\}$ と $\{f(x'_{2k-1})\}$ より $n-1$ 次の中点式をつくる方法は前節で述べた．これにより中点式の係数 $\{b_r\}$ が得られる．$\{b_r\}$ と $\{c_r\}$ より $2n$ 次の梯形式の係数 c_r' ($r=0,1,\cdots,2n$) は，(6) によって簡単に求まる．したがって $2n$ を n, $\{c_r'\}$ を $\{c_r\}$, $\{x_k'\}$ を $\{x_k\}$ にそれぞれ置き換えて同様な操作を繰り返せば，次数が2のベキの梯形式の列が得られる．

初期値は $n=2$ で与えることにする．すなわち

$$x_0=1,\ x_1=0\quad(23\text{ a})$$

および

Table 1. Chebyshev expansion of the function $(1-xz)/(1-2\,xz+z^2)$

$z=0.2,\ \varepsilon=5\times10^{-9}$			$z=0.5,\ \varepsilon=5\times10^{-9}$			$z=0.8,\ \varepsilon=50\times10^{-9}$		
n	Coefficients	Error	n	Coefficients	Error	n	Coefficients	Error
0	2.00000 0000	0	0	2.00000 0000	0	0	2.00000 0021	21
1	20000 0000	0	1	50000 0002	2	1	80000 0025	25
2	4000 0000	0	2	25000 0001	1	2	64000 0030	30
3	800 0000	0	3	12500 0002	2	3	51200 0038	38
4	160 0000	0	4	6250 0001	1	4	40960 0044	44
5	32 0000	0	5	3125 0000	0	5	32768 0014	14
6	6 4000	0	6	1562 5000	0	⋮	⋮	⋮
7	1 2800	0	7	781 2500	0	⋮	⋮	⋮
8	2560	0	8	390 6250	0	40	13 2922	1
9	512	0	9	195 3124	1	41	10 6331	7
10	102	0	10	97 6562	1	42	8 5070	1
11	21	1	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12	4	0	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
13	1	0	25	29	1	80	17	1
14	0	0	26	14	1	81	11	3
15	0	0	27	8	1	82	10	1
16	0	0	28	3	1	⋮	⋮	⋮
			29	1	1	⋮	⋮	⋮
			30	1	0	125	17	17
			31	1	1	126	11	11
			32	0	0	127	6	6
						128	4	4

$$\left.\begin{aligned} c_0&=\frac{1}{2}f(1)+f(0)+\frac{1}{2}f(-1)\\ c_1&=\frac{1}{2}f(1)\qquad\quad -\frac{1}{2}f(-1)\\ c_2&=\frac{1}{2}f(1)-f(0)+\frac{1}{2}f(-1)\end{aligned}\right\}\tag{23 b}$$

収束の判定法について述べる．近似式の許される誤差限界を ε とする．$[-1,\ 1]$ で $f(x)$ が十分滑らかならば n 次の梯形式の誤差は $|c_{n-1}|+\frac{1}{2}|c_n|$ で評価すれば十分であろう．したがって，その梯形式が

$$|c_{n-1}|+\frac{1}{2}|c_n|<\varepsilon \tag{24}$$

を満たすならば，所要の精度に達したことになる．上式を単に計算を停止させるための規則と解釈するならば $f(x)$ に関する条件はゆるめられる．

演算の種類および必要な演算回数について述べる．

まず梯形式の次数を $2^1, 2^2, \cdots, 2^m$ と増したとき，全体として必要な乗算回数をしらべる．次数が 2^k から 2^{k+1} に移行したときの乗算回数は約 $(2^k)^2/4$ であったから，$N=2^m$ とおけば

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2^{2k}}{4}\simeq\frac{N^2}{12}$$

となる．その外，平方根の計算回数が $\log_2 N-1$ と $f(x)$ の函数値の計算回数が $N+1$ である．

丸め誤差の“不安定現象”は起こらない．計算例を以下に示す．

例題．チェビシェフ多項式の母函数

$$f(x)=\frac{1-xz}{1-2\,xz+z^2}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}{}' z^n T_n(x),\ |z|<1$$

を補間法によってチェビシェフ展開した（**Table 1.**）．演算桁数は指数部 2 桁，仮数部 10 桁，ε は収束を判定するための定数．

$z=0.8$ の場合だけは誤差が大きいので説明を加える．例題の函数 $f(x)$ は，$z>0$ のとき $[-1,\ 1]$ で単調増加，また $f(x)=(1-xz)/(1-2\,xz+z^2)$ において，$x=1$, $z=0.8$ とすれば分母は 0.04 である．したがって x が 1 の近傍のとき，分子 $1-xz$ の計算誤差の 25 (1/0.04) 倍が $f(x)$ の計算誤差となる．これが他の二つの場合と違って展開係数 $\{c_n\}$ の誤差を大きくする原因となっている．なお c_{125} の近似値は 0.769×10^{-12} であるから見掛け上得られた末尾の係数 c_n ($n=125, \cdots, 128$) は完全に計算誤差だけである．係数 c_{80}, c_{81} が，すでに $\varepsilon=50\times10^{-9}$ 以下であるから，80 項までとれば，所要の精度にほぼ達したことになるが，n は 2 のベキ乗の値しかとれないから c_n ($n=0, 1, \cdots, 128$) まで機械的に計算した．

5. おわりに

函数 $f(x)$ を一旦チェビシェフ展開すると $f(x)$ の

微分，積分は容易である．Clenshaw は補間点を倍加しながら $f(x)$ をチェビシェフ展開し，$f(x)$ の不定積分を所要の精度で求める方法を発表している[2]．この際，補間点における $f(x)$ の函数値を無駄なく利用することを強調している．乗算回数の節約についてはふれていない．他方，次数 n が 2^m の複素フーリエ展開係数を乗算（複素数の）回数 $n\log_2 n$ で求める方法が発表されている[3]．

われわれは $n=2^m$ 次のチェビシェフ展開係数を約 $n^2/12$ 回の乗算で求めたが，計算法の“簡潔さ”を犠牲にせずに，乗算回数をさらに減らすことは残された課題である．

参考文献

1) Cooper, G.J.: The Evaluation of the Coefficients in a Chebyshev Expansion. The Computer Journal **10**, pp. 94～100, 1967.
2) Clenshaw, C.W. and Curtis, A.R.: A Method for Numerical Integration on an Automatic Computer. Numerische Mathematik **2**, pp. 197～205, 1960.
3) Cooley, J.W. and Tukey, J.W.: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. Mathematics of Computation **19**, pp. 297～301, 1965.
4) 鳥居達生，牧之内三郎：チェビシェフ補間多項式による函数の逐次近似，情報処理学会講演予稿集，昭和 42.

（昭和42年12月27日受付）