Vol.2012-AL-142 No.2
2012/11/2

無理数遷移確率ランダムウォークの脱乱択化

白髪 丈晴[1]　山内 由紀子[1]　来嶋 秀治[1]　山下 雅史[1]

概要：ランダムウォークの脱乱択化とは, 決定的な過程によってランダムウォークを模倣する試みであり, ロータールーターモデルと呼ばれるモデルが提案されている. グラフ上の頂点をトークンがランダムに隣接点へ移動するランダムウォークに対して, ロータールーターモデルでは, グラフの各頂点上にあらかじめ隣接点の順番を決め, その順番に従ってトークンを移動させる. 従来のロータールーターモデルは有理数の遷移確率しか模倣することが出来なかったが, 本稿では無理数の遷移確率をもつランダムウォークも模倣出来る新しいロータールーターモデルを提案する. さらに, ランダムウォークにおけるトークンの期待配置と提案モデルにおけるトークンの配置の誤差の上下界の解析を与える.

Deterministic Random Walks for Irrational Transition Probabilities

TAKEHARU SHIRAGA[1]　YUKIKO YAMAUCHI[1]　SHUJI KIJIMA[1]　MASAFUMI YAMASHITA[1]

Abstract: The rotor-router model, a.k.a. the deterministic random walk, is a deterministic process possibly emulating a random walk. In a random walk, tokens move to adjacent vertices at random. In the classical rotor-router model, every vertex launches tokens into adjacent vertices according do a prescribed order defined for each vertex, thus the rotor-router model cannot handle irrational transition probabilities. In this paper, we devise a new model, which can handle irrational transition probabilities. Then, we analyze the difference between the number of tokens in our rotor-router model and the expected number of tokens in a random walk.

1. はじめに

ランダムウォークの脱乱択化とは, 決定的過程によって, ランダムウォークを模倣する試みである.

Cooper と Spencer[1] は, James Propp によって 2000 年ごろ提案された複数トークン型のロータールーターモデルについて研究し, 各頂点におけるロータールーターモデルとランダムウォークのトークン数の誤差の期待値（単一頂点誤差）の解析を行った. 彼らは d 次元の整数格子点 Z^d に対して, 偶奇性条件を満たす任意の初期トークン配置, 任意のロータールーター, 任意の頂点, 任意の時間について, 単一頂点誤差は次元 d のみに依存し, 総トークン数には依存しない定数 c_d で押さえられることを示した.

来嶋, 古賀, 牧野 [3] は, 頂点数 n, 枝数 m の強連結な有向多重グラフについて, 対応するマルコフ連鎖の遷移確率行列が非負の固有値のみを持つ場合に, 任意の初期トークン配置とロータールーターに対して, 単一頂点誤差が $O(mn)$ で押さえられることを示した. 梶野, 来嶋, 牧野は一般の既約な有限グラフに対して解析を与えている. [2]

従来モデルでは単一頂点誤差が総トークン数に関わらない値で上から押さえることが出来ることを示したが, 多重辺の本数 m に依存しており, 多重辺を用いて遷移比率を定めるため無理数の遷移確率は模倣できないという性質があった.

本稿では, 従来のモデルに対し二進小数を用いた無理数の遷移確率を模倣できる新たなモデルを提案する. このモデルに対して, 頂点数 n のグラフ上で, 遷移確率行列 P が既約で非周期的な場合, 総トークン数 M に対し単一頂点誤差が $O(n^3 \log M)$ で押さえられることを示す. すなわち単一頂点誤差が総トークン数に依存するが, 単純辺の本数で押さえることが出来る. また, ある時刻, トークン数, P において, 単一頂点誤差が $\Omega(\log M)$ であることを示す.

[1] 九州大学
Kyushu University

2. モデル

いま, 有限の状態空間 V をもち, 遷移確率行列 P で定義されるランダムウォークを考える. 以下, P は既約で非周期的と仮定する. 有向グラフ $G=(V,E)$ の枝集合を $E=\{(u,v) \mid P(u,v) \neq 0\}$ と定め, $N(v) \subseteq V$ を v から出る枝の終端点の集合とし, $\delta(v)=|N(v)|, n=|V|$ とする.

ここで, $\boldsymbol{\mu}^{(t)}=(\mu_{v_1}^{(t)}, \mu_{v_2}^{(t)}, ..., \mu_{v_n}^{(t)})$ を時刻 t でのトークンの期待配置を表すベクトルとする. すなわち $\boldsymbol{\mu}^{(0)}=(\mu_{v_1}^{(0)}, \mu_{v_2}^{(0)}, ..., \mu_{v_n}^{(0)})$ はグラフ G 上の M 個のトークンの初期配置であり, $\boldsymbol{\mu}^{(t+1)}=\boldsymbol{\mu}^{(t)}P$, 再帰的に, $\boldsymbol{\mu}^{(t)}=\boldsymbol{\mu}^{(0)}P^t$ である. 本研究の目標は $\boldsymbol{\mu}^{(t)}$ を決定的な過程で模倣することである.

提案モデルを以下に定義する. 非負の整数 i を $i=\sum_{j=0}^{N}\beta_j^i 2^j$ で表すとする. ただし $\beta_j^i \in \{0,1\}$ は i の二進数表記 $\beta_N^i\beta_{N-1}^i...\beta_1^i\beta_0^i$ の各位の値であり, N は $N=\lfloor \lg i \rfloor$ である.

非負の整数 $i \in \{0,1,2,...\}$ が $i=\sum_{j=0}^{N}\beta_j^i 2^j$ で表されるとき, 関数 ψ を

$$\psi(i)=\sum_{j=0}^{N}\beta_j^i 2^{-(j+1)} \tag{1}$$

と定義する. $\psi(i) \in [0,1)$ であることに注意されたい.

グラフ上の各頂点 $v \in V$ の各隣接点 $u \in N(v)$ に対し, 対応する区間 $\zeta(v,u)$ を定義する. 頂点 v の $\delta(v)$ 個の隣接点を $N(v)=\{u_1,u_2,...,u_{\delta(v)}\}$ に対し, 各 u_k に対応する区間 $\zeta(v,u_k)$ は $\zeta(v,u_k)=\left[\sum_{j=0}^{k-1}P(v,u_j), \sum_{j=0}^{k}P(v,u_j)\right)$ である. ただし, $P(v,u_0)=0$ とする. ここで, $\phi_v(i)$ を, $\psi(i) \in \zeta(v,u_k)$ のとき $\phi_v(i)=u_k$ と定義する. つまり $\phi_v(i)$ は v に i 番目に到達したトークンの発射先の頂点を表す. 自然数 x,y に対し,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \{\psi(i) \mid i=x,x+1,...,y-1\} \\ \Psi_{v,u}(x,y) &= \{c \mid c \in F(x,y), c \in \zeta(v,u)\} \\ I_{v,u}(x,y) &= |\Psi_{v,u}(x,y)| \end{aligned}$$

と定義する. $I_{v,u}(x,y)$ は頂点 v を訪れた x から $y-1$ 番目のトークンのうち, 頂点 u へ移動したトークンの個数を表す. 時刻 t における提案モデルのトークン配置を表すベクトルを, $\boldsymbol{\chi}^{(t)}=(\chi_{v_1}^{(t)}, \chi_{v_2}^{(t)}, ..., \chi_{v_n}^{(t)})$ で表す.

具体的なトークンの遷移について述べる. 時刻 $t=0$ において, 頂点 $v \in V$ 上にある $\chi_v^{(0)}$ 個のトークンについて, $1,...,\chi_v^{(0)}$ 番目のトークンは, それぞれ隣接頂点 $\phi_v(0),...,\phi_v(\chi_v^{(0)}-1)$ へ移動する. 再帰的に, 時刻 t において, $v \in V$ 上の $j(j \in \{1,...,\chi_v^{(t)}\})$ 番目のトークンは, 隣接頂点 $\phi_v(\sum_{s=0}^{t-1}\chi_v^{(s)}+j-1)$ へ移動し, 時間 $(t,t+1)$ の間に $\chi_v^{(t)}$ 個のトークン全てを隣接点へ移動させ, 時刻 $t+1$ を迎える.

本稿では提案モデルの単一頂点誤差 $\left|\chi_w^{(T)}-\mu_w^{(T)}\right|$ に対して, 以下の定理を示す.

定理 2.1. 既約で非周期な P に対し,

$$\begin{aligned} \left|\chi_w^{(T)}-\mu_w^{(T)}\right| &< \frac{2\max_j \left|a_j^{(w)}\right|(n-1)n^2(\lg M+1)}{1-\lambda^*} \\ &= \mathrm{O}(n^3 \log M) \end{aligned}$$

が任意の $w \in V$ と $T \geq 0$ で成り立つ. ただし, $\lambda^*=\max\{|\lambda_i| \mid \lambda_i$ は P の固有値かつ $|\lambda_i| \neq 1\}$, $a_j^{(w)}$ は P の正規化された右固有ベクトル $\boldsymbol{b}_j$ に対し $\sum_{j=0}^{n-1}a_j^{(w)}\boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{e}_w$ を満たす値である.

定理 2.2. $\left|\chi_w^{(T)}-\mu_w^{(T)}\right|=\Omega(\log M)$ となる遷移確率行列 P, 時刻 $T>0, w \in V$, 総トークン数 M が存在する.

3. 頂点まわりの推移確率の近似について

この章では提案モデルが対応するランダムウォークを模倣する根拠の一つとして, 頂点まわりの推移確率の近似に関する以下の定理を示す.

定理 3.1. 任意の頂点 $v,u \in V$, 任意の P, 任意の自然数 z に対し,

$$\left|\frac{I_{v,u}(0,z)}{z}-P(v,u)\right|<\frac{2\lg z+2}{z}=\mathrm{O}\left(\frac{\log z}{z}\right)$$

が成り立つ.

定理 3.1 では, 遷移比率の誤差が, 発射したトークン数 z に対し $\mathrm{O}\left(\frac{\log z}{z}\right)$ で収束することを示している.

定理 3.1 を示すため, いくつかの補題を示す. これらの補題は, 4, 5 章の解析にも用いられる.

補題 3.1. 任意の自然数 i,k に対して,

$$\psi(i)=\psi\left(i \pmod{2^k}\right)+\psi\left(\left\lfloor\frac{i}{2^k}\right\rfloor\right)\cdot\frac{1}{2^k}$$

が成り立つ.

証明. 自然数 i,k が $i<2^k$ のときは, $\psi(i \pmod{2^k})=\psi(i), \psi\left(\left\lfloor\frac{i}{2^k}\right\rfloor\right)=\psi(0)=0$ より成り立つ. 以下, $i \geq 2^k$ のときを考える.

いま $i=\sum_{j=0}^{N}a_j 2^j$ とすると, $\left\lfloor\frac{\sum_{j=0}^{N}a_j 2^j}{2^k}\right\rfloor=\sum_{j=k}^{N}a_j 2^{j-k}$, および $\sum_{j=0}^{N}a_j 2^j \pmod{2^k}=\sum_{j=0}^{k-1}a_j 2^j$ が成り立つ. $l=j-k, b_l=a_{l+k}(l=0,1,...,N-k)$ とすると,

$$
\begin{aligned}
&\psi\left(i \bmod 2^k\right)+\psi\left(\left\lfloor\frac{i}{2^k}\right\rfloor\right)\cdot\frac{1}{2^k}\\
&=\psi\left(\sum_{j=0}^{k-1}a_j2^j\right)+\psi\left(\sum_{j=k}^{N}a_j2^{j-k}\right)\cdot\frac{1}{2^k}\\
&=\sum_{j=0}^{k-1}a_j2^{-(j+1)}+\psi\left(\sum_{l=0}^{N-k}b_l2^l\right)\cdot\frac{1}{2^k}\\
&=\sum_{j=0}^{k-1}a_j2^{-(j+1)}+\sum_{l=0}^{N-k}b_l2^{-(l+1)}\cdot\frac{1}{2^k}\\
&=\sum_{j=0}^{k-1}a_j2^{-(j+1)}+\sum_{j=k}^{N}a_j2^{-(j-k+1)}\cdot\frac{1}{2^k}\\
&=\sum_{j=0}^{k-1}a_j2^{-(j+1)}+\sum_{j=k}^{N}a_j2^{-(j+1)}\\
&=\sum_{j=0}^{N}a_j2^{-(j+1)}=\psi(i)
\end{aligned}
$$

より題意を得る. □

補題 3.2. 任意の自然数 k と $\alpha(0\le\alpha<2^k)$ に対して

$$\psi(2^k+\alpha)=\frac{1}{2^{k+1}}+\psi(\alpha)$$

が成り立つ.

証明. 補題 3.1 より,

$$
\begin{aligned}
\psi(2^k+\alpha)&=\psi\left((2^k+\alpha)\bmod 2^k\right)+\psi\left(\left\lfloor\frac{2^k+\alpha}{2^k}\right\rfloor\right)\cdot\frac{1}{2^k}\\
&=\psi(\alpha)+\frac{\psi(1)}{2^k}\\
&=\frac{1}{2^{k+1}}+\psi(\alpha)
\end{aligned}
$$

となり, 題意を得る. □

この時, F の定義より以下の観察が成り立つ.

観察 3.1. 任意の自然数 k について

$$F(0,2^k)=\left\{\frac{i}{2^k}\mid i=0,1,...,2^k-1\right\}$$

が成り立つ.

証明. 自然数 k に関する帰納法で示す. まず $k=0$ のとき, $F(0,1)=\{\psi(0)\}=\{0\}$ で条件を満たす.

次に $k=l$ のとき, $F(0,2^l)=\{\frac{0}{2^l},\frac{1}{2^l},...,\frac{2^l-1}{2^l}\}$ であると仮定する. 集合 $F(2^l,2^{l+1})=\{\psi(i)\mid i=2^l,2^l+1,...,2^{l+1}-1\}$ を考えると, 補題 3.2 より, $F(2^l,2^{l+1})=\{\frac{1}{2^{l+1}}+\psi(i)\mid i=0,1,...,2^l-1\}$ となる. 集合 $F(0,2^{l+1})$ は $F(0,2^l)$ と $F(2^l,2^{l+1})$ の和集合である. よって, $F(0,2^{l+1})=\{\frac{0}{2^{l+1}},\frac{1}{2^{l+1}},...,\frac{2^{l+1}-1}{2^{l+1}}\}$ が成り立ち, 任意の自然数 k に対し観察 3.1 が成り立つことが示された. □

集合 F の定義と補題 3.1, 観察 3.1 より以下の補題が成り立つ.

補題 3.3. 任意の自然数 x,k に対して,

$$\left|F(x,x+2^k)\cap\left[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}\right)\right|=1$$

が任意の $i\in\{0,1,...,2^k-1\}$ について成り立つ.

証明. 自然数 l を $(x+l)\bmod 2^k=0(0\le l<2^k)$ を満たすものとする.

集合 F の定義と, 補題 3.1 より,

$$
\begin{aligned}
&F(x,x+2^k)\\
&=\left\{\psi\left(x\bmod 2^k\right)+\frac{\psi\left(\left\lfloor\frac{x}{2^k}\right\rfloor\right)}{2^k}\right.\\
&\quad,...,\psi\left((x+l)\bmod 2^k\right)+\frac{\psi\left(\left\lfloor\frac{x+l}{2^k}\right\rfloor\right)}{2^k}\\
&\quad\left.,...,\psi\left((x+2^k-1)\bmod 2^k\right)+\frac{\psi\left(\left\lfloor\frac{x+2^k-1}{2^k}\right\rfloor\right)}{2^k}\right\}\\
&=\left\{\psi\left(2^k-l\right)+\frac{\psi\left(\left\lfloor\frac{x}{2^k}\right\rfloor\right)}{2^k},\psi(2^k-l+1)+\frac{\psi\left(\left\lfloor\frac{x+1}{2^k}\right\rfloor\right)}{2^k}\right.\\
&\quad,...,\psi(2^k-1)+\frac{\psi\left(\left\lfloor\frac{x+l-1}{2^k}\right\rfloor\right)}{2^k},\psi(0)+\frac{\psi\left(\left\lfloor\frac{x+l}{2^k}\right\rfloor\right)}{2^k}\\
&\quad\left.,\psi(1)+\frac{\psi\left(\left\lfloor\frac{x+l+1}{2^k}\right\rfloor\right)}{2^k},...,\psi\left(2^k-l-1\right)+\frac{\psi\left(\left\lfloor\frac{x+2^k-1}{2^k}\right\rfloor\right)}{2^k}\right\}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

と表される. 簡便のため

$$
a(i)=\begin{cases}
\psi\left(\left\lfloor\frac{i+x+l}{2^k}\right\rfloor\right) & (i=0,1,...,2^k-l-1)\\
\psi\left(\left\lfloor\frac{i+x+l-2^k}{2^k}\right\rfloor\right) & (i=2^k-l,2^k-l+1\\
 & ,...,2^k-1)
\end{cases}
$$

とおく. この時, 任意の自然数 i に対し $0\le\psi(i)<1$ なので, $0\le a(i)<1$ を満たすことに注意されたい. この $a(i)$ を用いると,

$$(2)=\left\{\psi(i)+\frac{a(i)}{2^k}\mid i=0,1,...,2^k-1\right\}$$

と表すことが出来る. ここで $b(j)=a(i)\left(\psi(i)=\frac{j}{2^k},0\le i,j<2^k-1\right)$ と置くと, 観察 3.1 と併せて,

$$F(x,x+2^k)=\left\{\frac{i}{2^k}+\frac{b(i)}{2^k}\mid i=0,1,...,2^k-1\right\}\tag{3}$$

となり, 題意を得る. □

補題 3.4. 任意の自然数 x,k, 任意の頂点 $u,v\in V$ に対して,

$$2^kP(v,u)-2<I_{v,u}(x,x+2^k)<2^kP(v,u)+2$$

が成り立つ.

証明. 頂点 v が u に定める区間 $\zeta(v,u)$ を $[p,q)$ とおく. 補題 3.3 の証明の (3) 式より,

$$\frac{s}{2^k}+\frac{b(s)}{2^k}<p\le\frac{s+1}{2^k}+\frac{b(s+1)}{2^k} \quad (4)$$
$$\frac{t}{2^k}+\frac{b(t)}{2^k}<q\le\frac{t+1}{2^k}+\frac{b(t+1)}{2^k} \quad (5)$$

となるような s,t が存在する．このとき，ψ の定義より $\Psi_{v,u}(x,x+2^k)=\left\{\frac{i}{2^k}+\frac{b(i)}{2^k}\mid i=s+1,s+2,...,t\right\}$ である．

(4), (5) 式を変形すると, $2^kp-b(s+1)-1\le s<2^kp-b(s)$, $2^kq-b(t+1)-1\le t<2^kq-b(t)$ となり，

$$\begin{aligned}&2^k(q-p)-b(t+1)-1+b(s)+1\\<\ &t-s<2^k(q-p)-b(t)+b(s+1)+1\end{aligned}$$

が成り立つ. $I_{v,u}(x,x+2^k)=t-s$, $P(v,u)=q-p$, 任意の i に対し $0\le b(i)<1$ なので,

$$2^kP(v,u)-2<I_{v,u}(x,x+2^k)<2^kP(v,u)+2$$

が成り立つ. □

補題 3.5. 任意の自然数 x,y と任意の $u,v\in V$ に対して,

$$|I_{v,u}(x,x+y)|<yP(v,u)+2\lg y+2$$

が成り立つ.

証明. ここで, $y=\sum_{j=0}^{N}a_j2^j$ と置く. $I_{v,u}(x,x+a+b)=I_{v,u}(x,x+a)+I_{v.u}(x+a,x+a+b)$ が成り立つことに注意する. この時,

$$\begin{aligned}&I_{v,u}(x,x+y)=I_{v,u}(x,x+\sum_{j=0}^{N}a_j2^j)\\
=\ &I_{v,u}(x,x+a_02^0)+I_{v,u}\left(x+a_02^0,x+a_02^0+a_12^1\right)\\
&+...+I_{v,u}\left(x+\sum_{j=0}^{N-1}a_j2^j,x+\sum_{j=0}^{N}a_j2^j\right)\\
=\ &I_{v,u}\left(x,x+a_02^0\right)\\
&+\sum_{k=0}^{N-1}I_{v,u}\left(x+\sum_{j=0}^{k}a_j2^j,x+\sum_{j=0}^{k+1}a_j2^j\right)\\
<\ &a_02^0P(v,u)+2+\sum_{k=1}^{N}\left(a_k2^kP(v,u)+2\right)\\
=\ &\sum_{k=0}^{N}\left(a_k2^kP(v,u)+2\right)=2N+P(v,u)\sum_{k=0}^{N}a_k2^k\\
<\ &yP(v,u)+2(\lg y+1)=yP(v,u)+2\lg y+2\end{aligned}$$

を得る. 同様に $yP(v,u)-2\lg y-2<I_{v,u}(x,x+y)$ も示すことが出来る. □

補題 3.5 において $x=0,y=z$ とすると, 定理 3.1 が示される.

4. 単一頂点誤差の上界の解析

この節では, 定理 2.1 を証明する．いま, $\lambda_i\in\mathbb{C}(i=0,1,..,n-1)$ を遷移確率行列 P の固有値, $\boldsymbol{b}_i\in\mathbb{C}^n(i=0,1,...,n-1)$ を λ_i に対応する正規化された右固有ベクトルとする. 遷移確率行列 P を既約で非周期的とすると, 一般性を失うことなく, $|\lambda_0|=1, 1>|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge...\ge|\lambda_{n-1}|$, $|\boldsymbol{b}_i|\left(=\sqrt{\langle\boldsymbol{b}\mid\boldsymbol{b}\rangle}\right)=1\ (i=1,\ldots,n)$ とできる. 頂点 $u\in V$ に対し, $\boldsymbol{e}_u\in\{0,1\}^V$ を u 番目の単位ベクトルとする. $\boldsymbol{e}_u$ は $a_j^{(u)}\in\mathbb{C}(j=1,\ldots,n)$ を使って $\boldsymbol{e}_u=\sum_{j=1}^{n}a_j^{(u)}\boldsymbol{b}_j$ と書くことが出来る. すなわち,

$$B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_0 & \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_{n-1}\end{bmatrix}\quad\text{and}\quad\boldsymbol{a}^{(u)}=\begin{bmatrix}a_0^{(u)}\\a_1^{(u)}\\\vdots\\a_{n-1}^{(u)}\end{bmatrix}$$

としたとき, $\boldsymbol{e}_u=B\boldsymbol{a}^{(u)}$ である. B は正則行列であり, $\boldsymbol{a}^{(u)}=B^{-1}\boldsymbol{e}_u$ が成り立つ.

このとき,

$$\begin{aligned}P^z(v,w)\ &=\ \boldsymbol{e}_v^\top P^z\boldsymbol{e}_w=\boldsymbol{e}_v^\top P^z\sum_{j=1}^{n}a_j^{(w)}\boldsymbol{b}_j\\
&=\ \boldsymbol{e}_v^\top\sum_{j=1}^{n}a_j^{(w)}P^z\boldsymbol{b}_j\\
&=\ \boldsymbol{e}_v^\top\sum_{j=1}^{n}a_j^{(w)}(\lambda_j)^z\boldsymbol{b}_j=\sum_{j=1}^{n}a_j^{(w)}(\lambda_j)^z\boldsymbol{e}_v^\top\boldsymbol{b}_j\end{aligned}$$

と書くことが出来る.

既存研究 [1], [2], [3] と同様に, $\chi_w^{(T)}$, $\mu_w^{(T)}$ について, 以下の補題を示すことが出来る.

補題 4.1. 任意の $w\in V, T\ge0$ に対し,

$$\begin{aligned}&\chi_w^{(T)}-\mu_w^{(T)}\\
=\ &\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{v\in V}\sum_{i=X_v^{(t-1)}}^{X_v^{(t)}-1}\left(P^{T-t-1}(\phi_v(i),w)-P^{T-t}(v,w)\right)\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $X_v^{(T)}=\sum_{s=0}^{T}\chi_v^{(s)}$ である.

補題 4.1 を使い, 以下の補題を示す.

補題 4.2. 任意の $w\in V, T\ge0$ に対し,

$$\begin{aligned}\chi_w^{(T)}-\mu_w^{(T)}&=\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{v\in V}\sum_{u\in N(v)}\\
&\left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)},X_v^{(t)})-\chi_v^{(t)}P(v,u)\right)P^{T-t-1}(u,w)\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. 定義より, $I_{v,u}(X_v^{(t-1)},X_v^{(t)})$ は時刻 t のとき頂点 v が u へ発射したトークンの総数を表していることに注意する. このとき,

$$
\begin{aligned}
&\chi_w^{(T)} - \mu_w^{(T)} \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{v \in V} \sum_{i=X_v^{(t-1)}}^{X_v^{(t)}-1} \left(P^{T-t-1}(\phi_v(i), w) - P^{T-t}(v.w) \right) \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{v \in V} \left(\sum_{u \in N(v)} I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) P^{T-t-1}(u,w) \right. \\
&\quad \left. -\chi_v^{(t)} P^{T-t}(v,w) \right) \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{v \in V} \left(\sum_{u \in N(v)} I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) P^{T-t-1}(u,w) \right. \\
&\quad \left. -\chi_v^{(t)} \sum_{u \in N(v)} P(v,u) P^{T-t-1}(u,w) \right) \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{v \in V} \sum_{u \in N(v)} \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) \right. \\
&\quad \left. -\chi_v^{(t)} P(v,u) \right) P^{T-t-1}(u,w)
\end{aligned}
$$

となり題意を得る. □

定理 2.1 を証明する前に, 以下の 2 つの補題を証明する.

補題 4.3. 任意の $u, v \in V$, $t \geq 0$ に対して,

$$
\sum_{u \in N(v)} \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \chi_v^{(t)} P(v,u) \right) = 0
$$

が成り立つ.

証明. 定義より, $\sum_{u \in N(v)} I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) = \chi_v^{(t)}$ が成り立つことから,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{u \in N(v)} \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \chi_v^{(t)} P(v,u) \right) \\
&= \sum_{u \in N(v)} I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \sum_{u \in N(v)} \chi_v^{(t)} P(v,u) \\
&= \chi_v^{(t)} - \chi_v^{(t)} = 0
\end{aligned}
$$

となり, 題意を得る. □

補題 4.4. 任意の $u, v \in V$, $t \geq 0$ に対して,

$$
\sum_{u \in N(v)} \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \chi_v^{(t)} P(v,u) \right) a_0^{(w)} \boldsymbol{e}_u^\top \boldsymbol{b}_0 = 0
$$

が成り立つ.

証明. ベクトル $\boldsymbol{b}_0$ は固有値 $\lambda_0 = 1$ に対する右固有ベクトルであり, $\boldsymbol{b}_0$ の i 番目の成分を $\boldsymbol{b}_0(i)$ とすると任意の $i, j (i, j = 0, 1, ..., n-1)$ について $\boldsymbol{b}_0(i) = \boldsymbol{b}_0(j) = 1$ が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{u \in N(v)} \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \chi_v^{(t)} P(v,u) \right) a_0^{(w)} \boldsymbol{e}_u^\top \boldsymbol{b}_0 \\
&= a_0^{(w)} \sum_{u \in N(v)} \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \chi_v^{(t)} P(v,u) \right)
\end{aligned}
$$

を得る. よって補題 4.3 より題意を得る. □

定理 2.1 の証明を行う.

証明.

$$
\begin{aligned}
&\chi_w^{(T)} - \mu_w^{(T)} \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{v \in V} \sum_{u \in N(v)} \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) \right. \\
&\quad \left. -\chi_v^{(t)} P(v,u) \right) P^{T-t-1}(u,w) \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{v \in V} \sum_{u \in N(v)} \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \chi_v^{(t)} P(v,u) \right) \\
&\quad \sum_{j=0}^{n-1} a_j^{(w)} (\lambda_j)^{T-t-1} \boldsymbol{e}_u^\top \boldsymbol{b}_j \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{v \in V} \sum_{u \in N(v)} \\
&\quad \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \chi_v^{(t)} P(v,u) \right) a_0^{(w)} \boldsymbol{e}_u^\top \boldsymbol{b}_0 \\
&+ \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{v \in V} \sum_{u \in N(v)} \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \chi_v^{(t)} P(v,u) \right) \\
&\quad \sum_{j=1}^{n-1} a_j^{(w)} (\lambda_j)^{T-t-1} \boldsymbol{e}_u^\top \boldsymbol{b}_j
\end{aligned}
$$

ここで, 補題 4.4 より

$$
\sum_{u \in N(v)} \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \chi_v^{(t)} P(v,u) \right) a_0^{(w)} \boldsymbol{e}_u^\top \boldsymbol{b}_0 = 0
$$

であり,

$$
\begin{aligned}
\chi_w^{(T)} - \mu_w^{(T)} &= \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{v \in V} \sum_{u \in N(v)} \sum_{j=1}^{n-1} \\
&\left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \chi_v^{(t)} P(v,u) \right) a_j^{(w)} (\lambda_j)^{T-t-1} \boldsymbol{e}_u^\top \boldsymbol{b}_j
\end{aligned}
$$

が成り立つ. よって,

$$
\begin{aligned}
&\left| \chi_w^{(T)} - \mu_w^{(T)} \right| \leq \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{v \in V} \sum_{u \in N(v)} \sum_{j=1}^{n-1} \\
&\quad \left| \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \chi_v^{(t)} P(v,u) \right) a_j^{(w)} (\lambda_j)^{T-t-1} \boldsymbol{e}_u^\top \boldsymbol{b}_j \right| \\
&\leq \max_j \left| a_j^{(w)} \right| \sum_{t=0}^{T-1} |\lambda_1|^{T-t-1} \sum_{v \in V} \sum_{u \in N(v)} \sum_{j=1}^{n-1} \\
&\quad \left| \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \chi_v^{(t)} P(v,u) \right) \right| \left| \boldsymbol{e}_u^\top \boldsymbol{b}_j \right|
\end{aligned}
$$

補題 3.5 から, $\left| \left(I_{v,u}(X_v^{(t-1)}, X_v^{(t)}) - \chi_v^{(t)} P(v,u) \right) \right| < 2 \lg \chi_v^t + 2 < 2 \lg M + 2$ が成り立つので,

$$\left|\chi_w^{(T)} - \mu_w^{(T)}\right| < \frac{\max_j \left|a_j^{(w)}\right|}{1-|\lambda_1|} \sum_{v \in V} \sum_{u \in N(v)} \sum_{j=1}^{n-1} 2(\lg M + 1)$$
$$\leq \frac{2\max_j \left|a_j^{(w)}\right| (n-1)n^2(\lg M+1)}{1-|\lambda_1|}$$

以上により, 定理 2.1 が示された. □

5. 単一頂点誤差の下界の解析

ここでは, 定理 2.2 を示す.

証明. $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $P(v_i, v_j) = \frac{1}{3}(i, j = 1, 2, 3)$ となるグラフ上のランダムウォークを考える. トークンの初期配置を $\boldsymbol{\mu}^{(0)} = (M, 0, 0)$ とすると, 時刻 $t = 1$ での期待配置は $\boldsymbol{\mu}^{(1)} = \left(\frac{M}{3}, \frac{M}{3}, \frac{M}{3}\right)$ となる. v_1 に対する区間 $\zeta(v_1, v_1)$ を $[0, \frac{1}{3})$ とする.

ℓ を 1 以上の自然数とする. $M = \sum_{i=1}^{\ell} 16^i = \frac{16(16^\ell-1)}{15}$ のとき, $\chi_{v_1}^{(1)} - \mu_{v_1}^{(1)} = \frac{2}{3}\ell = \frac{1}{6}\lg\left(\frac{15}{16}M+1\right)$ であることを示す.

まず,

$$\chi_{v_1}^{(1)} = I_{v_1,v_1}\left(0, \sum_{i=1}^{\ell} 16^i\right)$$
$$= I_{v_1,v_1}(0, 16^\ell) + \sum_{k=2}^{\ell} I_{v_1,v_1}\left(\sum_{i=k}^{\ell} 16^i, \sum_{i=k}^{\ell} 16^i + 16^{k-1}\right)$$

となる. $I_{v_1,v_1}(0, 16^\ell) = \left|\Psi_{v_1,v_1}(0, 16^\ell)\right|$ であり, $\Psi_{v_1,v_1}(0, 16^\ell) = \{c \mid c \in F(0, 16^\ell), c \in \zeta(v_1, v_1)\}$ だから, $F(0, 16^\ell)$ について考えると, 観察 3.1 より,

$$F(0, 16^\ell) = \left\{\frac{i}{16^\ell} \mid i = 0, 1, ..., 16^\ell - 1\right\}$$

である. ここで, $\frac{16^\ell-1}{3} < \frac{16^\ell}{3} < \frac{16^\ell+2}{3}$ なので, $\Psi_{v_1,v_1}(0, 16^\ell) = \left\{\frac{i}{16^\ell} \mid 0 \leq i \leq \frac{16^\ell-1}{3}\right\}$, よって $I_{v_1,v_1}(0, 16^\ell) = \frac{16^\ell-1}{3} + 1 = \frac{16^\ell+2}{3}$ である.

補題 3.3 の証明の (2) 式より,

$$F\left(\sum_{i=k}^{\ell} 16^i, \sum_{i=k}^{\ell} 16^i + 16^{k-1}\right)$$
$$= \left\{\psi(j) + \frac{\psi\left(\left\lfloor \frac{\sum_{i=\ell}^{k} 16^i + j}{16^{k-1}} \right\rfloor\right)}{16^{k-1}} \mid j = 0, 1, ..., 16^{k-1} - 1\right\}$$
$$= \left\{\psi(j) + \frac{\psi(\sum_{i=1}^{\ell-k+1} 16^i)}{16^{k-1}} \mid j = 0, 1, ..., 16^{k-1} - 1\right\}$$
$$= \left\{\psi(j) + \frac{\sum_{i=1}^{\ell-k+1} 2^{-(4i+1)}}{16^{k-1}} \mid j = 0, 1, ..., 16^{k-1} - 1\right\}$$
$$= \left\{\frac{j}{16^{k-1}} + \frac{\sum_{i=1}^{\ell-k+1} 2^{-(4i+1)}}{16^{k-1}} \mid j = 0, 1, ..., 16^{k-1} - 1\right\}$$

ここで,

$$\frac{16^{k-1}-1}{3} \cdot \frac{1}{16^{k-1}} + \frac{\sum_{i=1}^{\ell-k+1} 2^{-(4i+1)}}{16^{k-1}} - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{\ell-k+1} 2^{-(4i+1)}}{16^{k-1}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16^{k-1}}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{\ell-k+1} 2^{-(4i+1)}}{16^{k-1}} - \frac{\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-2i}}{16^{k-1}} < 0$$

より

$$\left|F\left(\sum_{i=k}^{\ell} 16^i, \sum_{i=k}^{\ell} 16^i + 16^{k-1}\right) \cap \left[0, \frac{1}{3}\right)\right| = \frac{16^k - 1}{3} + 1.$$

が成り立つ. 以上の議論から,

$$\chi_{v_1}^{(1)} - \mu_{v_1}^{(1)}$$
$$= \frac{16^\ell + 2}{3} + \sum_{k=2}^{\ell} \frac{16^{k-1}+2}{3} - \frac{\sum_{i=1}^{\ell} 16^i}{3}$$
$$= \sum_{k=1}^{\ell} \frac{16^k+2}{3} - \frac{\sum_{i=1}^{\ell} 16^i}{3}$$
$$= \frac{2}{3}\ell = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \lg\left(\frac{15}{16}M + 1\right)$$
$$= \frac{1}{6} \lg\left(\frac{15}{16}M + 1\right) = \Omega(\log M)$$

が成り立つ. ただし, $\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}}$ であることに注意する. □

6. 従来モデルの模倣

先行研究の来嶋, 古賀, 牧野 [3] や梶野, 来嶋, 牧野 [2] では, 有理数の遷移確率をもつランダムウォークに対し, 多重辺を用いて O(nm) の上界, すなわちトークンの個数に依らない上界を与えていた. 本章では, 提案モデルを少し変形することで従来モデルが模倣出来ることを示す.

以下の補題で, $\phi_v(i)$ の周期性について述べる.

補題 6.1. 任意の $v, u \in V$ に関して, 自然数 l, k, m を用いて区間 $\zeta(v, u) = [\frac{l}{2^k}, \frac{m}{2^k})$ と表すことが出来る場合, 任意の i について $\phi_v(i) = u$ ならば $\phi_v(i + 2^k) = u$ が成り立つ.

証明. 補題 3.1 より, $\psi(i) = \psi\left(i \bmod 2^k\right) + \psi\left(\left\lfloor \frac{i}{2^k} \right\rfloor\right) \cdot \frac{1}{2^k}$, $\psi(i + 2^k) = \psi\left(i \bmod 2^k\right) + \psi\left(\left\lfloor \frac{i+2^k}{2^k} \right\rfloor\right) \cdot \frac{1}{2^k}$ であり, 観察 3.1 よりある自然数 l を用いて $\psi\left(i \bmod 2^k\right) = \frac{l}{2^k}$ と書くことが出来る. よって, $\frac{l}{2^k} \leq \psi(i) < \frac{l+1}{2^k}$, $\frac{l}{2^k} \leq \psi(i+2^k) < \frac{l+1}{2^k}$ が成り立つ. よって $\phi_v(i) = u$ ならば $\phi_v(i + 2^k) = u$ が成り立つ. □

補題 6.1 より, 任意の $v, u \in V$ に関して, 自然数 l, k, m を用いて区間 $\zeta(v, u) = [\frac{l}{2^k}, \frac{m}{2^k})$ と表すことが出来る場合, 2^k 本の多重辺を使い従来モデルを用いて表すことが出来る.

また, 従来モデルの頂点 v から出る多重辺 $e_i(i = 0, 1, ..., \delta(v) - 1$ をそれぞれ区間 $[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k})$ $(\delta(v) \leq 2^k)$ に対応させ, 区間 $[\frac{\delta(v)}{2^k}, 1)$ を無視することによって, 任意の従来モデルを模倣することが出来る.

7. おわりに

本稿では, 無理数の遷移確率を持つランダムウォークに対する新しいロータールーターモデルを提案した. 提案モデルの単一頂点誤差がグラフの頂点数 n と, 総トークン数 M に対し $\mathrm{O}(n^3 \log M)$ で押さえられることを示した. また, ある時刻, 頂点, トークン数, P において, 単一頂点誤差が $\Omega(\log M)$ であることを示した. 今後の課題としては, 組み合わせ構造に起因するグラフに対し, 単一頂点誤差の頂点数の対数サイズの上界の導出や, 一般の場合の単一頂点誤差の上界と下界の一致などがある.

参考文献

[1] J. N. Cooper and J. Spencer, Simulating a random walk with constant error, Combinatorics, Probability and Computing, 15(2006), 815–822.
[2] H. Kajino, S. Kijima, and K. Makino, Discrepancy analysis of deterministic random walks on finite irreducible graphs, discussion paper.
[3] S. Kijima, K. Koga and K. Makino, Deterministic random walks on finite graphs, Proceedings of ANALCO 2012, 16–25.