

テクニカルノート

単純セルオートマトンルール110における 周期的背景と1/fゆらぎ

蛭川 繁^{1,a)}

受付日 2012年5月11日, 採録日 2012年7月2日

概要: 1次元2状態3近傍セルオートマトンのルール110は計算万能性を備えている一方, パワースペクトルが1/fゆらぎを示す. しかし, ルール110の時空間パターンには周期的背景とよばれるルール110特有のパターンが存在することから, パワースペクトルがべき乗則からずれることがある. 周期的背景は計算万能性に寄与しないことから, ルール110の時空間パターンから周期的背景を取り除いてもルール110において計算機能を実現するために必要は振舞いは失われないと考えられる. 本研究では, ルール110の時空間パターンから周期的背景を除去したところ, パワースペクトルがべき乗則に従う周波数域が広がり, 1/fゆらぎの特徴がより明確になった. この結果はセルオートマトンにおいて計算万能性と1/fゆらぎの関連をより強く示唆する.

キーワード: セルオートマトン, ルール110, 1/fゆらぎ, 計算万能性, 周期的背景

Periodic Background and 1/f Noise in Elementary Cellular Automaton Rule 110

SHIGERU NINAGAWA^{1,a)}

Received: May 11, 2012, Accepted: July 2, 2012

Abstract: Elementary (one-dimensional two-state three-neighbor) cellular automaton rule 110 is capable of supporting universal computation and exhibits 1/f noise. However, the power spectra of rule 110 do not always exhibit 1/f-type spectrum because of periodic background particular to rule 110. Since periodic background in rule 110 does not play a role in supporting universal computation, we can expect that the removal of periodic background from the space-time pattern does not change the behavior essential to supporting universal computation. As a result of removing periodic background from the space-time pattern of rule 110, we found that the range of frequencies that fits the power law broadens. This result suggests a relationship between 1/f noise and computational universality in cellular automata.

Keywords: cellular automata, rule 110, 1/f noise, computational universality, periodic background

1. はじめに

2次元セルオートマトン (cellular automaton, CA) の1つであるライフゲームはセル平面上に論理回路を構成することから, 計算万能性を持つことが知られているが, その一方で, ランダムな初期様相から開始した場合のセルの状

態遷移のパワースペクトルが1/fゆらぎを示す [1]. また, 単純セルオートマトンのルール110は cyclic tag system を模擬できることから, 計算万能であることが証明されている [2] が, ライフゲームと同様に1/fゆらぎを示す [3]. これらの結果から, CAにおける計算万能性と1/fゆらぎの間には何らかの関連性があるのではないかと予想される. しかし, ルール110のパワースペクトルはライフゲームにくらべ, スペクトルがべき乗則に従う周波数域が狭いため, 1/f型のスペクトルとはいい難い. その原因としてルール110に固有の周期的背景とよばれるパターンの存在があげ

¹ 金沢工業大学
Kanazawa Institute of Technology, Nonoichi, Ishikawa 921-8501, Japan

^{a)} ninagawa@infor.kanazawa-it.ac.jp

られる。本研究ではルール 110 の時空間パターンから周期的背景を除去した場合のパワースペクトルの変化を調べる。

2. ルール 110 における 1/f ゆらぎ

N 個のセルからなる 1 次元 CA において、 i 番目のセルの t ステップ目の状態を $x_i(t)$ とする。 $t = 0, 1, \dots, T-1$ の T 個の時系列データに対して次式で定義されるフーリエ変換を施す。

$$\hat{x}_i(f) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x_i(t) \exp\left(-i \frac{2\pi t f}{T}\right).$$

これを次の式のように全セルにわたって総和をとり、パワー $S(f)$ とする。

$$S(f) = \sum_{i=1}^N |\hat{x}_i(f)|^2.$$

こうして得られたパワースペクトルに対して、最小自乗法を用いて $\log S_f = \alpha + \beta \log f$ と近似し、次式に示す残差平方和 σ^2 を求める。

$$\sigma^2 = \sum_{f=1}^N \frac{(S_f - S(f))^2}{N}$$

1 次元 2 状態 3 近傍 CA は単純 CA (elementary CA, ECA) とよばれ、独立な ECA は全部で 88 個あるが、このなかでルール 110 が最も長いステップにわたって 1/f ゆらぎを示す [3]。セル数 500 のランダム初期様相のルール 110 のパワースペクトルを図 1 に示す。 $f = 1 \sim 100$ の周波数域におけるパワースペクトルの傾きは $\beta = -0.62$ 、残差平方和は $\sigma^2 = 0.077$ ($N = 100$) である。このパワースペク

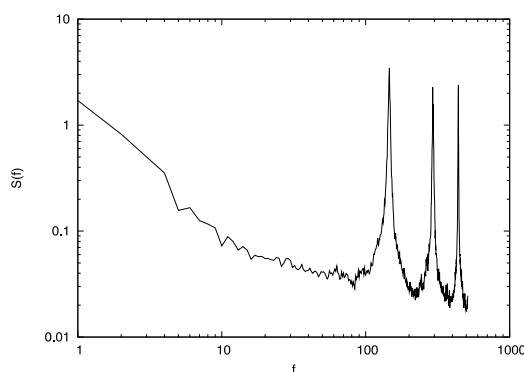


図 1 セル数 500 のランダム初期様相のルール 110 のパワースペクトル。 $f = 146$ (周期 7) およびその高調波のピークが見られる。点線は $f = 1 \sim 100$ の範囲で最小自乗法で求めた直線。 $\beta = -0.62$, $\sigma^2 = 0.077$

Fig. 1 Power spectra of rule 110 starting from a random initial configuration of array size equal to 500. There are peaks at $f = 146$ (period: 7) and its harmonics in the spectrum. The broken line represents the least-square fitting of the power spectrum in the range of $f = 1 \sim 100$. The exponent of power spectrum $\beta = -0.62$, the residual sum of squares $\sigma^2 = 0.077$.

トルにおいては周期 7 を表す $f = 146$ に鋭いピークが見られ、その高調波として $f = 292$ と $f = 440$ にもピークが見られる。そのためパワースペクトルがべき乗則に従う周波数域はおおよそ $f = 1 \sim 100$ と狭い範囲に限られる。この例に見られるように、初期様相によっては、パワースペクトルが、1/f 型のスペクトルから逸脱することがある。

なお、本論文では特に断らない限り、初期様相として 0 と 1 が等確率でランダムに出現するような様相を用い、境界条件としてセル空間がリング状になる周期境界条件を用いる。

3. 周期的背景の除去

ルール 110 には周期的背景とよばれる空間的周期が 14、時間的周期が 7 のパターンが存在する。周期的背景だけからなる時空間パターンを図 2 に示す。周期的背景だけからなる時空間パターン (セル数: 504, ステップ数: 1,024) から求めたパワースペクトルを図 3 に示す。この場合、周期 7 を表す $f = 146$ およびその高調波に鋭いピークが見られ、それ以外の成分はきわめて小さな値にとどまっている。このことから、図 1 のパワースペクトルに見られる周期 7 およびその高調波成分は周期的背景によって発生することが分かる。

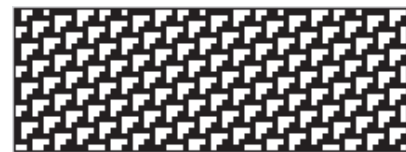


図 2 ルール 110 における周期的背景のみからなる時空間パターン。白いマス目は状態 0、黒いマス目は状態 1 のセルを表す

Fig. 2 Space-time pattern composed entirely of periodic background of rule 110. White and black squares represent cells with state zero and state one respectively.

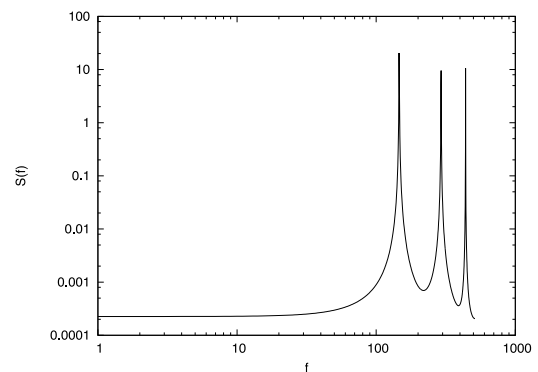


図 3 ルール 110 における周期的背景のみからなる時空間パターンから求めたパワースペクトル。 $f = 146$ (周期 7) およびその高調波のピークが見られる

Fig. 3 Power spectrum calculated from the evolution composed entirely of periodic background of rule 110. There are peaks at $f = 146$ (period: 7) and its harmonics in the spectrum.

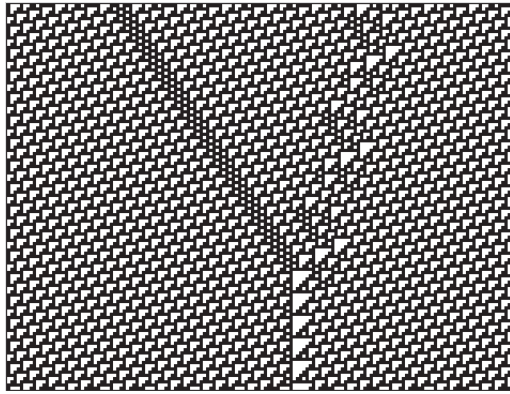


図 4 左から来たグライダー A^4 と右から来たグライダー \bar{E} の衝突により周期的なパターン C_2 が生成される時空間パターン

Fig. 4 Space-time pattern of the creation of periodic pattern C_2 by the collision between glider A^4 from the left and \bar{E} from the right.

文献 [2] では、ルール 110 が cyclic tag system とよばれる計算万能システムを模擬できることを示すことによって、ルール 110 の計算万能性を証明している。その際、ルール 110 における種々の伝播パターン（グライダー）や周期パターンおよび、それらの間の相互作用を利用することによって cyclic tag system を実現している。その例として、図 4 に、左から来た A^4 とよばれるグライダーと右から来た \bar{E} とよばれるグライダーの衝突によって C_2 とよばれる周期パターンが生成される様子を示す。この例から分かるように、cyclic tag system の実現に際して、情報の伝達や記憶、演算といった計算機能における本質的な役割を果たしているのは、グライダーなどの種々のパターンおよびそれらの相互作用であることが分かる。このことは、ルール 110 の時空間パターンから周期的背景を除去しても、グライダーどうしの衝突のように計算機能を実現するために必要な振舞いは、時空間パターンから失われないということを意味している。したがって、ルール 110 の時空間パターンから周期的背景を除去して得られるパワースペクトルは、グライダーなどのルール 110 の特徴的な振舞いをより強く反映していると考えられる。

図 2 を見ると、周期的背景は図 6 に示すテンプレートが連なったものであることが分かる。そこで、除去の方法としては生成された時空間パターンを左上から右下へと調べてゆき、図 6 に示すテンプレートと合致するパターンがあった場合、そのパターン内の状態が 0 のセルを状態 1 にする。セル数が 200 のランダムな初期様相から開始した場合のルール 110 の時空間パターンを図 5 (上) に、そこから周期的背景を除去して得られた時空間パターンを図 5 (下) にそれぞれ示す。周期的背景を除去することによって、種々のグライダーやそれらの間の衝突など、ルール 110 の特徴的な振舞いが目視でも識別しやすくなることが分かる。

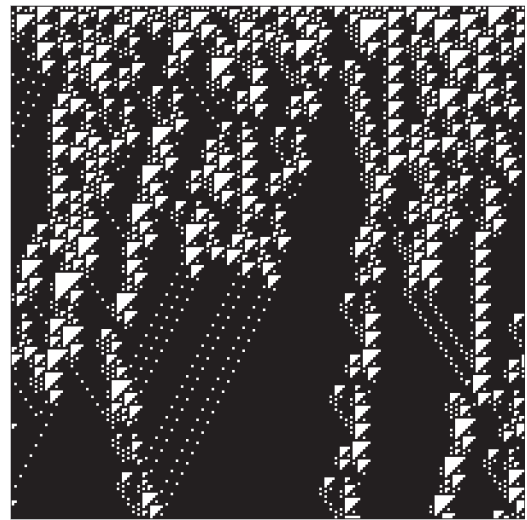
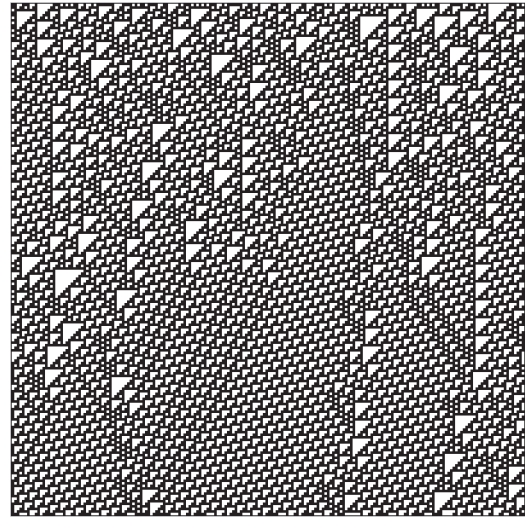


図 5 セル数 200 のランダム初期様相のルール 110 の時空間パターン (上) と周期的背景除去後のパターン (下)

Fig. 5 Space-time pattern of rule 110 starting from a random initial configuration with array size 200 (top) and the one obtained from the above by eliminating periodic background (bottom).

1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	
1	1	1		

図 6 ルール 110 の周期的背景の除去に用いるテンプレート

Fig. 6 Template used to remove the periodic background of rule 110.

図 1 のパワースペクトルを求めた時空間パターンに対して、周期的背景を除去した時空間パターンから求めたパワースペクトルを図 7 に示す。このスペクトルを見ると、周期 7 およびその高調波によるピークが消滅している。それにともない、パワースペクトルがべき乗則に従う周波数域はおおよそ、 $f = 1 \sim 300$ となり、図 1 の場合に比べ、

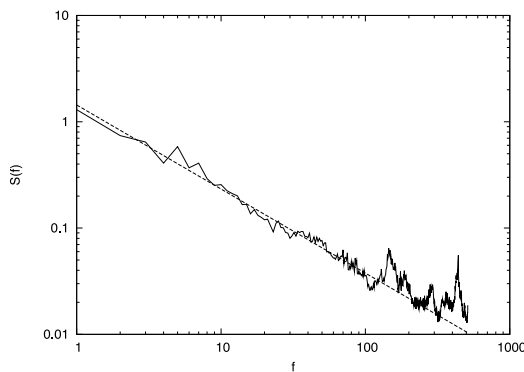


図 7 セル数 500 のランダム初期様相のルール 110 の周期的背景除去後のパワースペクトル. 点線は $f = 1 \sim 100$ の範囲で最小自乗法で求めた直線. $\beta = -0.79$, $\sigma^2 = 0.012$

Fig. 7 Power spectra of rule 110 starting from a random initial configuration of array size equal to 500. The broken line represents the least-square fitting of the power spectrum in the range of $f = 1 \sim 100$. The exponent of power spectrum is $\beta = -0.79$, the residual sum of squares is $\sigma^2 = 0.012$.

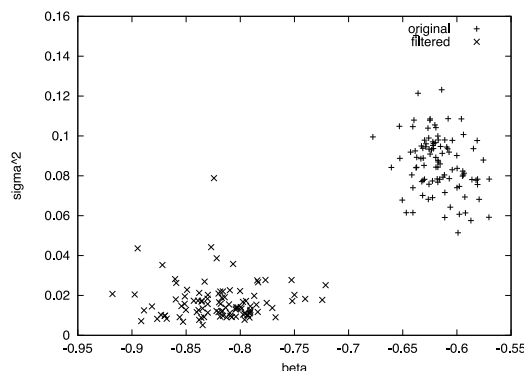


図 8 100 通りの初期様相に対するパワースペクトルの傾き β と残差平方和 σ^2 の分布. + は周期背景除去前, x は除去後のものを表す

Fig. 8 Scattergram of exponents β and the residual sum of squares σ^2 of power spectra estimated from the original space-time patterns (+) and from the ones obtained by eliminating periodic background (x).

より広い帯域でべき乗則に適合する. $f = 1 \sim 100$ の周波数域におけるパワースペクトルの傾きは $\beta = -0.79$, 残差平方和は $\sigma^2 = 0.012$ となり, 図 1 にくらべ, パワースペクトルが $1/f$ ゆらぎに近づいているといえる.

次に, 周期的背景の除去によるパワースペクトルの統計的な変化を調べる. 100 通りのランダム初期様相を準備して, 図 1 や図 7 のパワースペクトルを求めたのと同じ条件で, $f = 1 \sim 100$ の周波数域で求めたパワースペクトル傾き β と残差平方和 σ^2 の散布図を図 8 に示す. 周期的背景除去前の β と σ^2 について, 信頼度 95%での母平均の推定値はそれぞれ, $\langle \beta \rangle = -0.617 \pm 0.004$, $\langle \sigma^2 \rangle = 0.087 \pm 0.003$ だが, 除去後は $\langle \beta \rangle = -0.819 \pm 0.007$, $\langle \sigma^2 \rangle = 0.017 \pm 0.002$ となる. 周期的背景の除去により, パワースペクトルの傾

き β は -1 に近くなるとともにべき乗則に適合することが分かる.

4. おわりに

本研究では, ルール 110 に特有の周期 7 の周期的背景とよばれるパターンを除去することにより, 時空間パターンの特徴的な振舞いが分かりやすくなるだけでなく, パワースペクトルにおいて, 周期 7 およびその高調波に起因するピークが消滅し, より広い周波数域において, パワースペクトルがべき乗則に適合することが分かった. その結果, ルール 110 のパワースペクトルが $1/f$ ゆらぎとしての振舞いをするのがより明確になった. ルール 110 における周期的背景は計算機能には寄与していないと考えられることから, この結果は, セルオートマトンにおける計算万能性と $1/f$ ゆらぎの関係をより強く示唆するといえる. 今後は, パワースペクトルがべき乗則を示すルール 54 およびルール 62 [3] に対して同様の方法を適用してみることに, および周期的背景を除去する別のアルゴリズムを使った場合について調べる予定である.

参考文献

- [1] Ninagawa, S., Yoneda, M. and Hirose, S.: $1/f$ Fluctuation in the "Game of Life," *Physica D*, Vol.118, pp.49-52 (1998).
- [2] Cook, M.: Universality in Elementary Cellular Automata, *Complex Systems*, Vol.15, pp.1-40 (2004).
- [3] Ninagawa, S.: Power Spectral Analysis of Elementary Cellular Automata, *Complex Systems*, Vol.17, pp.399-411 (2008).



蜷川 繁 (正会員)

昭和 39 年生. 昭和 63 年富山大学大学院理学研究科修士課程修了. 民間企業を経て, 平成 10 年富山大学大学院工学研究科博士後期課程を修了. 博士(工学). 同年明星大学情報学部助手. 平成 11 年より金沢工業大学講師. 平成 22 年同教授. 複雑系の研究に従事. 電子情報通信学会, 人工知能学会各会員.