情報処理学会論文誌　Vol.53　No.10　2313–2327 (Oct. 2012)

弱単項TRSのE重なり性について

三橋 一郎[1,a)]　大山口 通夫[2,b)]　松浦 邦博[3,c)]

受付日 2011年12月5日, 採録日 2012年7月2日

概要：Unique Normal Form（UN）性および Church-Rosser（CR）性は，項書き換えシステム（TRS）における重要な性質である．非 E 重なり性は UN 性を保証する十分条件であり，TRS のいくつかの部分クラスにおいては CR 性を保証する十分条件であることも知られている．しかしながら，非 E 重なり性は一般に決定不能である．非 ω 重なり性は決定可能であり，一般の TRS において非 E 重なり性を保証する十分条件であるか否かは未解決問題として残されているが，深さ保存的 TRS や重み保存的 TRS といったいくつかの部分クラスにおいて非 E 重なり性を保証する十分条件であることが知られている．本論文ではこれらのクラスとは比較不能な弱単項 TRS のクラスを導入し，このクラスにおいて非 ω 重なり性が非 E 重なり性を保証する十分条件であることを示す．ここで，弱単項 TRS とはすべての書き換え規則の右辺において，定義記号が出現するならば，根，または定項である部分項にのみ出現する TRS をいう．この結果は，定項 TRS の合同閉包（congruence closure）アルゴリズムを利用した新しい証明手法によって得られたものである．本論文ではさらにこの結果を拡張して，弱単項 TRS のクラスを拡張した多層 TRS のクラスにおいてもこの証明手法が適用可能であることを示す．

キーワード：項書き換えシステム，弱単項 TRS，E 重なり性，ω 重なり性

On the E-overlapping Property of Weak Monadic TRSs

Ichiro Mitsuhashi[1,a)]　Michio Oyamaguchi[2,b)]　Kunihiro Matsuura[3,c)]

Received: December 5, 2011, Accepted: July 2, 2012

Abstract: Unique normalization (UN) and Church-Rosser (CR) properties are important properties of term rewriting systems (TRSs). Non-E-overlapping property is a sufficient condition to ensure UN of TRSs, and also a sufficient condition to ensure CR for some subclasses of TRSs. However, the non-E-overlapping property is undecidable in general. It is known that non-ω-overlapping property is decidable. It remains open whether the non-ω-overlapping property is a sufficient condition to ensure the non-E-overlapping property for general TRSs, but for some subclasses of TRSs such as depth preserving TRSs and weight preserving TRSs, the non-ω-overlapping property ensures the non-E-overlapping one. In this paper, we introduce the subclass of TRSs named weak monadic TRSs which is incomparable with these subclasses of TRSs, and show that the non-ω-overlapping property is a sufficient condition to ensure the non-E-overlapping property for this class. Here, a weak monadic TRS is such a TRS that for each rewrite rule $\alpha \to \beta$, every defined symbol occuring in β occurs only either at the root position or in a ground subterm of β. This result is obtained by a new proof technique using a congruence closure algorithm for ground TRSs. Moreover, we extend this result by showing that this technique is applicable to multi-layered TRSs which properly include the class of weak monadic TRSs.

Keywords: term rewriting system, weak monadic TRS, E-overlapping, ω-overlapping

[1] 三重大学総合情報処理センター
Center for Information Technologies and Networks, Mie University, Tsu, Mie 514–8507, Japan
[2] 名古屋大学
Nagoya University, Nagoya, Aichi 464–8601, Japan
[3] 三重大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Mie University, Tsu, Mie 514–8507, Japan
[a)] mitsuhashi@cc.mie-u.ac.jp
[b)] oyamaguchi@za.ztv.ne.jp
[c)] matsuura@cs.info.mie-u.ac.jp

1. まえがき

項書き換えシステム（以下，TRS とよぶ）は方向付けされた等式の集合と定義される．TRS は等式上での推論や項の簡単化などを行うための計算モデルであり，これまでさかんに研究されてきた [5], [13]．その中でも，TRS の UN（unique normal form）性と CR（Church-Rosser）性は重要な性質であり，これまで多くの研究成果が報告された [3], [4], [5], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]．ここで，TRS の UN 性とは，すべての項に対して正規形を持つならば，ただ 1 つであることを保証する性質であり，TRS の CR 性とは，項を複数の方法で書き換え可能な場合にどの方法で書き換えても同じ項に書き換えられるという性質である．

UN 性に関しては非 E 重なり性がその性質を保証する十分条件として報告された [10]．この結果より，非 E 重なり性は WN（weakly normalizing）性（すべての項が正規形を持つ）を満たす TRS の CR 性を保証する十分条件でもある．また，WN 性を満たさない場合でも，右定項 TRS [16]，単純右線形 TRS [14] などの部分クラスにおいても，非 E 重なり性が CR 性を保証する十分条件であることが報告された．ここで，非 E 重なり性とは書き換え規則の左辺に対して，その真部分項の書き換えを許しても他の規則の左辺（または，その非変数部分）と重ならない性質をいう．非 E 重なり性は一般に判定不能である．

非 ω 重なり性（循環的な無限項の代入を許して重なりがない）は判定可能であり [7]，非 E 重なり性と密接な関係がある．Ogawa ら [10] は非 ω 重なりならば非 E 重なりであると予想した（RTA open problem ♯79 [2]）．本予想に対して証明を与える研究がこれまでいくつかなされてきたが，筆者の知る限り正しい証明が与えられた論文は見受けられない．一方で，深さ保存的 TRS やそれを拡張した重み保存的 TRS などのいくつかの TRS の部分クラスにおいて，その予想が正しいことが報告されている [3], [4], [15], [17]．

本論文では，これらのクラスとは比較不能な新しい部分クラスである弱単項 TRS のクラスを導入する．ここで，弱単項 TRS とはすべての書き換え規則の右辺において，定義記号が出現するならば，根または，定項である部分項にのみ出現する TRS をいう．このクラスはチューリング機械を直接模倣できるという点で計算能力の面では十分広いクラスであり，ほとんどの判定問題は決定不能である（6 章参照）．たとえば，非 E 重なり性は弱単項 TRS のクラスにおいて決定不能である．

本論文では弱単項 TRS のクラスにおいて非 ω 重なりならば非 E 重なりであることを示す．この結果を示すために書き換えによって得られる到達可能性（または等価性）の関係を通常の書き換えステップ数とは異なる新しい順序（または重み）を導入して分類し，また，その順序を定項 TRS の合同閉包（congruence closure）アルゴリズム [1], [9], [11] を用いて定義している．すなわち，このアルゴリズムでは，ある項の対の到達可能性（または等価性）をその真部分項の対の到達可能性（または等価性）から得るものであり，この項の対の到達可能性（または等価性）の順序をベースにした新しい順序を導入している．このような順序を導入した証明手法は他に見受けられない新しい手法である．さらに，本論文では弱単項 TRS のクラスを真に包含する，2 層 TRS のクラスを導入し，このクラスにおいても非 ω 重なりならば非 E 重なりであることを示す．

以下，本論文では 2 章で定理の証明に必要な項書き換えシステムに関する定義，および記法について述べ，3 章で ω 単一化アルゴリズムについて述べる．4 章では，弱単項 TRS のクラスにおいて非 ω 重なりならば非 E 重なりであることを証明し，5 章では弱単項 TRS のクラスを真に包含する 2 層 TRS のクラスにおいても同様の結果が得られることを示す．6 章では，弱単項 TRS における諸判定問題が決定不能であることを示す．

2. 準備

本章では，本論文で使用する定義と記法を述べる．項書き換えシステムの詳細は文献 [1], [13] に準ずる．

記号 ε は**空列**を表し，X を**変数**の集合，F は項関数 $\mathsf{ar} : F \to \{0, 1, 2, \dots\}$ を持つ**関数記号**の集合とし，特に，$f \in F$ が $\mathsf{ar}(f) = 0$ のとき，f を**定数**とよぶ．$T(F, X)$ は X と F から構成される**項**の集合とし，変数を含まない項を**定項**とよぶ．x，y，z を変数，f，g，h を関数記号，s，t，p，q を項，b，c を定数として用いる．項の**出現**は正整数の列であり，u，v，w を出現として用いる．出現の間に半順序関係 $\leq$（すなわち，$uu' = v$ を満たす出現 u' が存在するとき $u \leq v$）が定義されている．出現 u と v が**並列**とは，$u \not\leq v$ かつ $v \not\leq u$ が成立するときである．このとき，$u|v$ と書く．出現の集合 P に対して $\mathsf{Min}(P)$ を，P の中の極小要素の集合とする．項 s の出現の集合を $\mathcal{O}(s)$，出現する変数の集合を $\mathsf{V}(s)$，s における変数の出現の集合をそれぞれ $\mathcal{O}_X(s)$ とし，$\mathcal{O}_F(s) = \mathcal{O}(s) \setminus \mathcal{O}_X(s)$ とする．変数 $x \in X$ の出現の集合を $\mathcal{O}_x(s)$ と書く．

例 2.1 $s = f(x, g(c))$ のとき，$\mathcal{O}(s) = \{\varepsilon, 1, 2, 21\}$，$\mathsf{V}(s) = \{x\}$，$\mathcal{O}_X(s) = \mathcal{O}_x(s) = \{1\}$．

出現 u における s の部分項を $s_{|u}$ と書く．項 s の部分項の集合を $\mathsf{Sub}(s)$ とする．また，項の集合 S に対して $\mathsf{Sub}(S) = \bigcup_{s \in S} \mathsf{Sub}(s)$ とする．$s[t]_u$ は部分項 $s_{|u}$ を項 t により置き換えることにより得られる項とする．この定義を拡張し，互いに並列な出現 $u_1, \dots, u_n$ について，すべての $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して s の部分項 $s_{|u_i}$ を項 t_i で置き換えることによって得られる項を $s[t_1, \dots, t_n]_{(u_1, \dots, u_n)}$ とする．出現 u の長さを $|u|$ と表し，項 s の**高さ**を $\mathsf{height}(s) = \max\{|u| \mid u \in \mathcal{O}(s)\}$ とする．項

t の根記号を与える関数 root は t が変数の場合は $\mathsf{root}(t) = t$ として，$t = f(t_1, \ldots, t_n)$ の場合は $\mathsf{root}(t)=f$ とする．

代入とは関数 $\sigma : X \to T(F, X)$ であり，$\mathsf{Dom}(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}$ と定義される集合が有限なものである．σ の定義域 X を $T(F, X)$ に次のように拡張する：$\sigma(f(s_1, \ldots, s_n)) = f(\sigma(s_1), \ldots, \sigma(s_n))$．$\sigma(s)$ のかわりに，$s\sigma$ と表記できる．

書き換え規則は項の対 $\langle\alpha, \beta\rangle$ であり，$\alpha \notin X$ かつ $\mathsf{V}(\beta) \subseteq \mathsf{V}(\alpha)$ を満たす．この対を $\alpha \to \beta$ と書く．**項書き換えシステム**（**TRS**）は書き換え規則の有限集合とする．代入 $\sigma : X \to X$ が単射であるとき，規則 $\alpha \to \beta$ に σ を適用して得られる規則 $\alpha\sigma \to \beta\sigma$ を $\alpha \to \beta$ の**変形**といい，これらは同じ規則と見なす．項 s について，$s_{|u} = \alpha\theta$ かつ，$t = s[\beta\theta]_u$ を満たす書き換え規則 $\alpha \to \beta \in R$ と出現 u と代入 θ が存在するとき $s \overset{u,\alpha\theta\to\beta\theta}{\longrightarrow}_R t$ と表し，これを**1 回の書き換え**という．$\alpha\theta$ を**リデックス**，$\alpha\theta \to \beta\theta$ を**リダクション**，u を**リデックス出現**という．記号 $u, \alpha\theta \to \beta\theta, R$ は省略することができる．また，$t \overset{u,\alpha\theta\to\beta\theta}{\longrightarrow} s$ のとき，$s \overset{u,\beta\theta\leftarrow\alpha\theta}{\longleftarrow} t$ と書くこともできる．$s \overset{u,\alpha\theta\to\beta\theta}{\longrightarrow} t$ のとき $s \overset{u,\alpha\theta\to\beta\theta}{\longleftrightarrow} t$，$s \overset{u,\beta\theta\leftarrow\alpha\theta}{\longleftarrow} t$ のとき $s \overset{u,\beta\theta\leftarrow\alpha\theta}{\longleftrightarrow} t$ と表せる．$\mathsf{red}(s \overset{u,\alpha\theta\to\beta\theta}{\longleftrightarrow} t) = \mathsf{red}(s \overset{u,\beta\theta\leftarrow\alpha\theta}{\longleftrightarrow} t) = \alpha\theta \to \beta\theta$ とする．$\to$ の反射閉包を $\to^=$，反射推移閉包を $\to^*$ で表す．それ以上書き換えられない項を**正規形**という．

$\gamma : s_1 \overset{u_1,\Delta_1}{\longleftrightarrow}_R \cdots \overset{u_{n-1},\Delta_{n-1}}{\longleftrightarrow}_R s_n$ を**書き換え系列**という．$\mathsf{Red}(\gamma) = \{\mathsf{red}(s_i \overset{u_i,\Delta_i}{\longleftrightarrow} s_{i+1} \mid 1 \leq i < n\}$ とする．$\mathsf{Rpos}(\gamma) = \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ とする．$\mathsf{Min}(\mathsf{Rpos}(\gamma))$ を $\mathsf{Minrpos}(\gamma)$ と表記し，その要素を**極小リデックス出現**とよぶ．また，任意の $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ について $u_i \neq \varepsilon$ のとき，$\gamma : s_1 \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\longleftrightarrow^*} s_n$ と書き，γ は **ε 不変**であるという．$u_1, \ldots, u_{n-1}$ がすべて互いに並列であるとき，γ は**1 回の並列書き換え**といい，$\gamma : s_1 \overset{U}{\longleftrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\!\!\!+} s_n$ と書く．ただし，$U = \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$．$U = \emptyset$ であっても，$s \overset{\emptyset}{\longleftrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\!\!\!+} s$ と書くことができる．すべての $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対してある $v \in V$ が存在して $u_i \geq v$ が成立するとき，$\gamma : s_1 \overset{\geq V}{\longleftrightarrow^*} s_n$ と書く．$v \in \mathcal{O}(s)$ がすべての $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して，$v \leq u_i$ または v と u_i が並列であるとき，系列 $s_{1|v} \leftrightarrow^= \ldots \leftrightarrow^= s_{n|v}$ を $\gamma_{|v}$ で表す．$\gamma_{|v}$ を γ の**カット系列**とよぶ．

多重集合を $\{\ldots\}_m$ と書き，自然数上の順序関係 $>$ を多重集合順序に拡張したものを $\gg$ と書く．

(1) 項 s，t について，$s \to^* t$ のとき s は t に**到達可能**という．

(2) 項 s，t について，$s \to^* \leftarrow^* t$ のとき s と t は**項合流可能**という．

(3) 項 s，t について，$s \leftrightarrow^* t$ のとき s と t は**等価**という．

(4) すべての項 s について，s から開始する TRS R による無限の書き換え系列が存在しないとき，R は **SN**（**Strongly Normalizing**）性を満たすという．

(5) すべての項 s について，s が TRS R において少なくとも 1 つの正規形を持つ（すなわち，$s \to^* t$ を満たす正規形 t が存在する）とき，R は **WN**（**Weakly Normalizing**）性を満たすという．

(6) すべての項 s について，s が TRS R においてたかだか 1 つの正規形を持つ（すなわち，$s \leftrightarrow^* t, s \leftrightarrow^* t'$ かつ t と t' が正規形ならば $t = t'$）とき，R は **UN**（**Unique Normal form**）性を満たすという．

(7) $\leftrightarrow^*_R \subseteq \to^*_R\leftarrow^*_R$ を満たすとき，R は **CR**（**Church-Rosser**）性を満たすという．

定義 2.2 TRS R に対して**定義記号**の集合 D_R を $D_R = \{\mathsf{root}(\alpha) | \alpha \to \beta \in R\}$ とする．項 s に出現するすべての定義記号が，根または，定項である部分項にのみ出現するとき，s は**弱単項**（weak monadic）であるという．また，すべての規則の右辺が弱単項である TRS を**弱単項 TRS** という．項 s は s に出現するすべての定義記号が s の定項の部分項にのみ出現するとき**準構成子項** [8] であるという．

定義より，準構成子項は弱単項でもある．また，項 s が弱単項である必要十分条件は，$s \in X$ または任意の $k \in \{1, \ldots, \mathsf{ar}(\mathsf{root}(s))\}$ に対して $s_{|k}$ が準構成子項であることである．

例 2.3 $R_1 = \{+(s(x), 0) \to s(x), +(s(x), s(y)) \to +(x, s(s(y))), +(0, y) \to y\}$ は弱単項 TRS である．

規則対 $\alpha_1 \to \beta_1, \alpha_2 \to \beta_2$（ただし，$\mathsf{V}(\alpha_1) \cap \mathsf{V}(\alpha_2) = \emptyset$ となるように規則を変形する）は，$\alpha_{1|u}\sigma = \alpha_2\sigma$ となる代入 σ と出現 $u \in \mathcal{O}_F(\alpha_1)$ が存在するとき，**重なり規則対**という．ただし，$u = \varepsilon$ のときは $\alpha_1 \to \beta_1$ と $\alpha_2 \to \beta_2$ は同じ規則ではないものとする．重なり規則対を持つ TRS を**重なり TRS** という．

ボトム記号 $\perp$ を新しい定数として導入した項を考え，項上の二項関係 $\sqsubseteq$，二項演算子 $\sqcup$ を次のように帰納的に定義する：任意の $t \in T(F \cup \{\perp\}, X)$ について，$\perp \sqsubseteq t$，かつ $t = t \sqcup \perp = \perp \sqcup t$．また，$x \in X$ について $x \sqsubseteq x$，かつ $x = x \sqcup x$ とする．項 $f(s_1 \ldots, s_n)$ と $f(t_1, \ldots, t_n)$ に対して，任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ について $s_i \sqsubseteq t_i$ のとき $f(s_1 \ldots, s_n) \sqsubseteq f(t_1, \ldots, t_n)$，$s_i \sqcup t_i$ が定義されているとき $f(s_1, \ldots, s_n) \sqcup f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1 \sqcup t_1, \ldots, s_n \sqcup t_n)$ とする（ただし，これらの演算は根記号が異なる項間には定義されない）．

項の無限列 $s_1, s_2, \ldots$ を考える．ただし，すべての $i \geq 1$ について $s_i \sqsubseteq s_{i+1}$ とする．このとき，$\mathcal{O}(s_1) \subseteq \mathcal{O}(s_2) \subseteq \ldots$ が成立し，$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}(s_i)$ とすると，任意の $u \in U$ に対して，ある $j \geq 1$ が存在し $\mathsf{root}(s_{j|u}) = \mathsf{root}(s_{j+1|u}) = \ldots$ が成立する．この関数記号を f_u とする．出現 $u \in U$ の記号が f_u である項または無限項をこの項の**無限列の極限**とよび，$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} s_i$ と書く．たとえば，$s_i = f^i(\perp)$ のとき，$U = \{\varepsilon, 1^i \mid i \geq 1\}$，$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} f^i(\perp) = f(f(\ldots))$ である．

$\theta(x) = y$ ならば $\theta(y) = y$ または $\theta(y) \notin X$ となるような

代入 θ に対して，代入 ϕ_θ を次のとおり定義する：$x \in X$ に対して，$\theta(x) = x$ のとき $\phi_\theta(x) = x$，$\theta(x) \neq x$ のとき $\phi_\theta(x) = \bot$ とする．θ から得られる ω **代入** θ_ω は次のように定義される：各 $x \in X$ について $\theta^n(x) = \theta^{n+1}(x)$ を満たす $n \geq 1$ が存在するならば $\theta_\omega(x) = \theta^n(x)$，そうでなければ $\theta_\omega(x) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \phi_\theta(\theta^n(x))$．

変数 x に対して $\theta(x) = f(y, x)$ のような循環的な参照（すなわち，ある $x \in \mathsf{Dom}(\theta)$ が存在して $x \in \mathsf{V}(x\theta)$）を許す代入である場合，$\theta_\omega(x)$ は一般に無限項 $f(y,\bot) \sqcup f(y, f(y,\bot)) \sqcup f(y, f(y, f(y,\bot))) \sqcup \ldots$ となる．ここで，$\mathsf{Dom}(\theta) = \{x\}$ である．θ_ω の定義域 X を $T(F,X)$ に次のように拡張する：$\theta_\omega(f(s_1,\ldots,s_n)) = f(\theta_\omega(s_1),\ldots,\theta_\omega(s_n))$．2 つの無限項 s_ω，t_ω が等しい（$s_\omega = t_\omega$ と書く）とは，$\mathcal{O}(s_\omega) = \mathcal{O}(t_\omega)$ かつ，すべての $u \in \mathcal{O}(s_\omega)$ について $\mathsf{root}(s_{\omega|u}) = \mathsf{root}(t_{\omega|u})$ のときである．

定義 2.4 [10], [17] 規則対 $\alpha_1 \to \beta_1$，$\alpha_2 \to \beta_2$（ただし，$\mathsf{V}(\alpha_1) \cap \mathsf{V}(\alpha_2) = \emptyset$ となるように規則を変形する）は，$\theta_\omega(\alpha_{1|u}) = \theta_\omega(\alpha_2)$ となる ω 代入 θ_ω と出現 $u \in \mathcal{O}_F(\alpha_1)$ が存在するとき，**ω 重なり規則対**という．ただし，$u = \varepsilon$ のときは $\alpha_1 \to \beta_1$ と $\alpha_2 \to \beta_2$ は同じ規則ではないものとする．重なり規則対は ω 重なり規則対でもある．ω 重なり規則対を持つ TRS を **ω 重なり TRS** という．

例 2.5 $R_2 = \{f(x,x) \to a, f(x, g(x)) \to b\}$ は ω 重なり TRS である．$\theta(x) = \theta(y) = g(x)$ のとき，$\theta_\omega(f(x,x)) = \theta_\omega(f(y, g(y)))$ が成立するからである．

定義 2.6 [10], [17] 規則対 $\alpha_1 \to \beta_1$，$\alpha_2 \to \beta_2$（ただし，$\mathsf{V}(\alpha_1) \cap \mathsf{V}(\alpha_2) = \emptyset$ となるように規則を変形する）は，ある代入 σ と出現 $u \in \mathcal{O}_F(\alpha_1)$ が存在して系列 $\gamma : \alpha_{1|u}\sigma \overset{\varepsilon-inv}{\leftrightarrow^*} \alpha_2\sigma$ が存在するとき，**E 重なり規則対**という．また，この γ を **E 重なり系列**という．ただし，$u = \varepsilon$ のときは $\alpha_1 \to \beta_1$ と $\alpha_2 \to \beta_2$ は同じ規則ではないものとする．重なり規則対は E 重なり規則対でもある．E 重なり規則対を持つ TRS を **E 重なり TRS** という．

例 2.7 $R_3 = \{c \to g(c), f(x,x) \to a, f(x, g(x)) \to b\}$ は E 重なり TRS である．$\theta(x) = \theta(y) = c$ のとき，$f(x,x)\theta \overset{\varepsilon-inv}{\to} f(y, g(y))\theta$ が成立するからである．

3. ω 単一化アルゴリズム

本論文の結果を得るために必要な，TRS の ω 重なり性を判定する ω 単一化アルゴリズムについて述べる．非 ω 重なり性についてはほとんど線形時間（almost linear: α をアッカーマン関数の逆関数としたとき，$O(\alpha(n) \cdot n)$ [6]）で判定できるアルゴリズム [7] が知られているが，本論文では文献 [17] のアルゴリズムを用いるので，その説明をする．

定義 3.1 $\Gamma \subseteq X \times T(F,X)$ を**要素対集合**という．要素対集合 Γ に対してその部分集合 Γ_X，Γ_T を $\Gamma_X = \Gamma \cap X^2$，$\Gamma_T = \Gamma \setminus \Gamma_X$ とする．Γ_X の反射推移対称閉包を $\sim_{\Gamma_X}$ と記す．要素対集合 Γ，代入 θ に対して，$\Gamma\theta = \{(x\theta, s\theta) | (x,s) \in \Gamma\}$ とする．要素対集合 Γ はある ω 代入 σ が存在して，そのすべての要素 (x,s) に対して，$x\sigma = s\sigma$ を満たすとき **ω 単一化可能**であるという．

項 s，t の ω 単一化問題は要素対集合 $\{(x,s),(x,t)\}$（ただし，x は新しい変数）の ω 単一化問題へ帰着される．

2 つの項 s，t の非変数部の整合性をチェックする述語 $\mathsf{common}(s,t)$ を次のとおり定義する．

定義 3.2 $\mathsf{common}(s,t)$ が真であるのは，次の条件 (1) と (2) が成立するときであると定義する．

(1) $\mathsf{Min}(\mathcal{O}_X(s) \cup \mathcal{O}_X(t)) \subseteq \mathcal{O}(t) \cap \mathcal{O}(s)$

(2) $\mathsf{Min}(\mathcal{O}_X(s) \cup \mathcal{O}_X(t))$ が集合 $\{u_1,\ldots,u_n\}$ であるとき，$s[c,\ldots,c]_{(u_1,\ldots,u_n)} = t[c,\ldots,c]_{(u_1,\ldots,u_n)}$ が成立する．ただし，c はある適当な定数とする．

また，$\mathsf{common}(s,t)$ が真のとき，$\mathsf{Decompose}(s,t)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}&\mathsf{Decompose}(s,t) = \\ &\quad \{(s_{|u}, t_{|u}) | u \in \mathsf{Min}(\mathcal{O}_X(s) \cup \mathcal{O}_X(t)), s_{|u} \in X\} \\ &\quad \cup \{(t_{|u}, s_{|u}) | u \in \mathsf{Min}(\mathcal{O}_X(s) \cup \mathcal{O}_X(t)), s_{|u} \notin X\}\end{aligned}$$

s と t が ω 単一化可能ならば，$\mathsf{common}(s,t)$ は真である．また，$\mathsf{Decompose}(s,t)$ は要素対集合である．

次に要素対集合 Γ が ω 単一化可能であるかどうかを判定する ω 単一化アルゴリズムを示す．このアルゴリズムは文献 [17] で与えられたものであり，その正当性も証明されている．

アルゴリズム 3.3 [17]
入力：要素対集合 Γ
出力：Γ が ω 単一化可能であるとき成功，そうでないとき失敗で終了する．

while $\exists (x,p),(y,q) \in \Gamma_T.\ x \sim_{\Gamma_X} y \wedge p \neq q$ do
　begin
　　if $\mathsf{common}(p,q)$ then
　　　begin
$$(\overline{x}, \overline{p}) := \begin{cases} (x,p) & (\mathsf{height}(p) \geq \mathsf{height}(q) \text{ のとき}) \\ (y,q) & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$
$$\Gamma := (\Gamma \setminus \{(\overline{x}, \overline{p})\}) \cup \mathsf{Decompose}(p,q)$$
　　　end
　　else 失敗で終了
　end
成功で終了

本アルゴリズムは Decompose を実行するたびに $\{\mathsf{height}(s) | (x,s) \in \Gamma\}_m$ が多重集合順序で真に小さくなることから，停止性が保証されている．

4. 弱単項 TRS の E 重なり性と ω 重なり性

この章では弱単項 TRS R が E 重なりならば，R は ω 重なりであることを証明する．背理法で証明するため，

$$\text{TRS } R \text{ は E 重なりであるが } \omega \text{ 重なりでない} \tag{4.1}$$

と仮定する．ここで，重なり TRS は明らかに ω 重なりであるので，R が重なり TRS ならばただちに矛盾が生ずる．したがって，以後

$$R \text{ は重なり TRS ではない} \tag{4.2}$$

と仮定する．

まず，この証明に必要な定義を与える．

定義 4.1 ある規則 $\alpha \to \beta \in R$ と代入 θ，θ' が存在して $\gamma : \beta\theta \overset{\varepsilon}{\leftarrow} \alpha\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\leftrightarrow^*} \alpha\theta' \overset{\varepsilon}{\to} \beta\theta'$ のとき，系列 γ を**ピーク列**という．

ここで，ピーク列の部分列 $\alpha\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\leftrightarrow^*} \alpha\theta'$ は E 重なり系列ではないことを注意しておく．

定義 4.2 ピーク列 $\gamma : \beta\theta \overset{\varepsilon}{\leftarrow} \alpha\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\leftrightarrow^*} \alpha\theta' \overset{\varepsilon}{\to} \beta\theta'$ の部分列 $\gamma' : \alpha\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\leftrightarrow^*} \alpha\theta'$ において，$\mathsf{Rpos}(\gamma') \cap \mathcal{O}_F(\alpha) = \emptyset$ を満たすとき，任意の $x \in \mathsf{V}(\alpha)$ と $u_x \in \mathcal{O}_x(\alpha)$ に対して，γ' のカット系列

$$\gamma'_{|u_x} : x\theta \leftrightarrow^* x\theta'$$

が得られる．このカット系列 $\gamma'_{|u_x}$ のみを用いてリダクション $\alpha\theta \to \beta\theta$，$\alpha\theta' \to \beta\theta'$ を使用しない系列

$$\delta : \beta\theta \leftrightarrow^* \beta\theta'$$

を得ることができる．すなわち，任意の $x \in \mathsf{V}(\beta)$ と $v \in \mathcal{O}_x(\beta)$ に対して，$\delta_{|v} = \gamma'_{|u_x}$ が成立する．この δ を（ピーク列 γ から得られる）**ピーク除去列**とよぶ．

定義 4.3 $\alpha \to \beta, \alpha' \to \beta' \in R, u \in \mathcal{O}_F(\alpha), v \in \mathcal{O}_F(\alpha')$ とする．系列 $\gamma : \alpha_{|u}\sigma \leftrightarrow^* \alpha'_{|v}\sigma'$ が**共通部不変列**であるとは，$\gamma : \alpha_{|u}\sigma \overset{\geq U}{\leftrightarrow^*} \alpha'_{|v}\sigma'$（ただし，$U = \mathsf{Min}(\mathcal{O}_X(\alpha_{|u}) \cup \mathcal{O}_X(\alpha'_{|v}))$）が成立するときである．

$\gamma : \alpha_{|u}\sigma \leftrightarrow^* \alpha'_{|v}\sigma'$ が共通部不変列であれば，$\mathsf{common}(\alpha_{|u}, \alpha'_{|v})$ は真である．

ある E 重なり系列

$$\gamma : \alpha_{1|u}\sigma \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\leftrightarrow^*} \alpha_2\sigma \quad (\alpha_1 \to \beta_1, \alpha_2 \to \beta_2 \in R) \tag{4.3}$$

に対して，この規則 $\alpha_1 \to \beta_1$，$\alpha_2 \to \beta_2$ が ω 重なりであることを示すことにより矛盾を導く．そのためには 3 章で述べたように，$\mathsf{common}(\alpha_{1|u}, \alpha_2)$ が真であることと，アルゴリズム 3.3 が $\mathsf{Decompose}(\alpha_{1|u}, \alpha_2)$ を入力として受け取るとき，成功で終了することの 2 点を示せばよい．

$\mathsf{common}(\alpha_{1|u}, \alpha_2)$ が真であることを示すには，E 重なり系列

$$\gamma : \alpha_{1|u}\sigma \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\leftrightarrow^*} \alpha_2\sigma$$

に対して，共通部不変列

$$\delta : \alpha_{1|u}\sigma \overset{\geq U}{\leftrightarrow^*} \alpha_2\sigma$$

（ただし，$U = \mathsf{Min}(\mathcal{O}_X(\alpha_{1|u}) \cup \mathcal{O}_X(\alpha_2))$）が存在することを示せば十分である．そのような系列 δ の存在を示すには，γ のあるリデックス出現 v がある $u' \in U$ に対して $v < u'$ を満たすならば，そのようなリデックス出現 v は除去することができることを示せばよい．そのような v を除去するための基本的なアイデアは，そのような極小のリデックス出現 v に対して，カット系列 $\gamma_{|v} : \alpha_{1|uv}\sigma \leftrightarrow^* \alpha_{2|v}\sigma$ はあるピーク列（すなわち，ある規則 $\alpha \to \beta \in R$ と代入 θ，θ' が存在して $\beta\theta \overset{\varepsilon}{\leftarrow} \alpha\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\leftrightarrow^*} \alpha\theta' \overset{\varepsilon}{\to} \beta\theta'$）を部分系列として持つことを示すとともに，そのピーク列をピーク除去列に置き換えることである．この置き換えを繰り返すことによって，共通部不変列 δ が得られることを示す．この δ の存在により，$\mathsf{common}(\alpha_{1|u}, \alpha_2)$ は真であることが導かれる．

次に，アルゴリズム 3.3 が入力 Γ（$= \mathsf{Decompose}(\alpha_{1|u}, \alpha_2)$）に対して成功で終了することを以下の方針で示す．アルゴリズム 3.3 の主要なステップは 2 つの対 $(x', p'), (y', q') \in \Gamma_T$（ただし，$x' \sim_{\Gamma_X} y'$）に対して $\mathsf{common}(p', q')$ が真であることを示すことである．まず，Γ の定義より，任意の $(x, p) \in \Gamma$ に対して，ある $v \in U$ が存在して

$$\delta_{|v} : x\sigma \leftrightarrow^* p\sigma \quad (\text{または}, \delta_{|v} : p\sigma \leftrightarrow^* x\sigma)$$

が成立する．したがって，$x \sim_{\Gamma_X} y$ ならば，δ のカット系列をつなぎあわせて，系列 $x\sigma \leftrightarrow^* y\sigma$ が得られ，$(x, p), (y, q) \in \Gamma_T$ より，$x\sigma \leftrightarrow^* p\sigma$，$y\sigma \leftrightarrow^* q\sigma$ が成立することから，次の系列

$$\eta : p\sigma \leftrightarrow^* x\sigma \leftrightarrow^* y\sigma \leftrightarrow^* q\sigma$$

を得る．この系列 η から共通部不変列

$$\eta' : p\sigma \overset{\geq V}{\leftrightarrow^*} q\sigma$$

（ただし，$V = \mathsf{Min}(\mathcal{O}_X(p) \cup \mathcal{O}_X(q))$）を求めることができることを示すことによって，$\mathsf{common}(p, q)$ が真となる（すなわち，アルゴリズム 3.3 は失敗で終了することはない）．この系列 η から η' を得る方法は，先に説明した $\mathsf{common}(\alpha_{1|u}, \alpha_2)$ が真であることを示すのに用いる，系列 γ から共通部不変列 δ を得る方法と同様である．次に，$\mathsf{Decompose}(p, q)$ が Γ に追加されるが，任意の $(x', p') \in \mathsf{Decompose}(p, q)$ に対して，共通部不変列 η' のカット系列 $\eta'_{|v} : x'\sigma \leftrightarrow^* p'\sigma$（ただし，$v \in V$）が存在する．したがって，さきと同様の証明を繰り返すことにより，アルゴリズム 3.3 が入力 $\mathsf{Decompose}(\alpha_{1|u}, \alpha_2)$ に対して，成功で終了することを示すことができる．

これまで述べた証明の方針で，最も重要な点はある書き換え系列中のカット系列がピーク列を部分列として持つな

らば，ピーク列はピーク除去列に置き換え可能であり，この置き換えを繰り返すことにより，共通部不変列が得られることを示すことである．このために，あるサイズが真に減少するように，書き換え列中のピーク列をピーク除去列で置き換えることがつねに可能であることを示す．

以下では，これらの性質を満たす式 (4.3) の E 重なり系列 γ をどのように選ぶか，また書き換え系列にどのようなサイズを割り当てるかについて述べる．

定義 4.4　$\gamma : t_0 \overset{U_0}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow} \cdots \overset{U_{n-1}}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow} t_n$ を並列書き換え列とする．このとき，γ の**並列ステップ数** $\#_P(\gamma)$ を以下のように定義する：$\#_P(\gamma) = |\{i \in \{0,\ldots,n-1\} \mid U_i \neq \emptyset\}|$．また，$u \in \mathsf{Min}(\bigcup_{i=0}^{n-1} U_i)$ としたとき，$\gamma_{|u}$ を以下のように定義する．

$$\gamma_{|u} : t_{0|u} \overset{V_1}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow} \cdots \overset{V_{n-1}}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow} t_{n|u}$$

ただし，$V_i = \{v \mid uv \in U_i\}, 1 \leq i < n$．

なお，$\gamma : t_0 \overset{U_0}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow} \cdots \overset{U_{n-1}}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow} t_n$ と $u \in \mathsf{Min}(\bigcup_{i=0}^{n-1} U_i)$ に対して $\#_P(\gamma_{|u}) \leq \#_P(\gamma)$ が成立し，また，γ の部分系列 γ' に対して $\#_P(\gamma') \leq \#_P(\gamma)$ が成立する．

まず，並列ステップ数最小の E 重なり系列

$$\gamma_{min} : \hat{\alpha}_{1|u}\hat{\theta}(= s_0) \overset{U_0}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow} \cdots \overset{U_{n-1}}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow} \hat{\alpha}_2\hat{\theta}(= s_n)$$
$$\text{（ただし，}\varepsilon \notin U_i, \hat{\alpha}_1 \to \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2 \to \hat{\beta}_2 \in R\text{）}$$

に対して $\mathsf{common}(\hat{\alpha}_{1|u}, \hat{\alpha}_2)$ が真であることを示す．そのために必要な補題として，削除補題 [10] を示す．

補題 4.5（削除補題 [10]）　ピーク列 $\gamma : t_0 = \beta\sigma \leftarrow t_1 = \alpha\sigma \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow}{}^{*} t_{k-1} = \alpha\sigma' \to t_k = \beta\sigma'$ に対して，$\#_P(\gamma) \leq \#_P(\gamma_{min})$ が成立するならば，あるピーク除去列 $\delta : t_0 \leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow^{*} t_k$ が存在して $\#_P(\delta) < \#_P(\gamma)$ が成立する．　□

証明は付録 A.1 で与える．この削除補題より，次の補題が成立する．

補題 4.6　$\#_P(\gamma_{min}) = \#_P(\delta_{min})$ を満たす共通部不変列 $\delta_{min} : \hat{\alpha}_{1|u}\hat{\theta} \overset{\geq V}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow}{}^{*} \hat{\alpha}_2\hat{\theta}$（ただし，$V = \mathsf{Min}(\mathcal{O}_X(\hat{\alpha}_{1|u}) \cup \mathcal{O}_X(\hat{\alpha}_2))$）が存在し，$\mathsf{common}(\hat{\alpha}_{1|u}, \hat{\alpha}_2)$ は真である．

証明　$\overline{\mathsf{size}}(\gamma_{min}) = \{(\#_P(\gamma_{min|v}) \mid v \in U \cap \mathcal{O}_F(\hat{\alpha}_{1|u}) \cap \mathcal{O}_F(\hat{\alpha}_2)\}_m$, ただし, $U = \mathsf{Min}(\bigcup_{i=0}^{n-1} U_i)$ とする．また, γ_{min} は並列ステップ数最小の E 重なり系列 $\hat{\alpha}_1|_u\hat{\theta} \overset{U_0}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow} \cdots \overset{U_{n-1}}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow} \hat{\alpha}_2\hat{\theta}$ のうちで, この $\overline{\mathsf{size}}$ において最小のものとする．そのとき，$\overline{\mathsf{size}}(\gamma_{min}) = \emptyset$ であることを示す．$\overline{\mathsf{size}}(\gamma_{min}) \neq \emptyset$ とすると，ある $v \in U$ が存在して $v \in \mathcal{O}_F(\hat{\alpha}_{1|u}) \cap \mathcal{O}_F(\hat{\alpha}_2)$ かつ $\gamma_{min|v}$ はピーク列を持つ[*1]．補題 4.5 より，そのピーク列をピーク除去列で置き換えて得られる系列 $\delta : s_{0|v} \leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow^{*} s_{n|v}$ に対して $\#_P(\delta) < \#_P(\gamma_{min|v})$ が成立する．γ_{min} 中の $\gamma_{min|v}$ を δ で置き換えることにより，γ_{min} より $\overline{\mathsf{size}}$ の値が真に小さい並列ステップ数最小の E 重なり系列が得られる．これは γ_{min} の最小性に矛盾する．よって $\overline{\mathsf{size}}(\gamma_{min}) = \emptyset$．したがって，$\gamma_{min} : \hat{\alpha}_{1|u}\hat{\theta} \overset{\geq V}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow} \hat{\alpha}_2\hat{\theta}$，ただし $V = \mathsf{Min}(\mathcal{O}_X(\hat{\alpha}_{1|u}) \cup \mathcal{O}_X(\hat{\alpha}_2))$．ゆえに，この補題が成立する．　□

補題 4.6 より，上記 γ_{min} を E 重なり系列の中で並列ステップ数最小のもの，かつ共通部不変とする．すなわち

$$\gamma_{min} : \hat{\alpha}_{1|u}\hat{\theta} \overset{\geq U}{\leftarrow\!\!+\!\!\!+\!\!\rightarrow}{}^{*} \hat{\alpha}_2\hat{\theta}$$
$$\text{（ただし，}U = \mathsf{Min}(\mathcal{O}_X(\hat{\alpha}_{1|u}) \cup \mathcal{O}_X(\hat{\alpha}_2))\text{）} \tag{4.4}$$

と仮定する．したがって，

$$\mathsf{common}(\hat{\alpha}_{1|u}, \hat{\alpha}_2) \text{ が真} \tag{4.5}$$

であり，

$$\text{任意の } (x,t) \in \mathsf{Decompose}(\hat{\alpha}_{1|u}, \hat{\alpha}_2) \text{ に対して } x\hat{\theta} \leftrightarrow^{*} t\hat{\theta} \tag{4.6}$$

が成立する．

γ_{min} で用いられたリダクションの集合を $G_{\gamma_{min}}$ とする．すなわち，

$$G_{\gamma_{min}} = \mathsf{Red}(\gamma_{min}) \tag{4.7}$$
$$T_{G_{\gamma_{min}}} = \{s_0, s_n\} \cup \{\alpha, \beta \mid \alpha \to \beta \in G_{\gamma_{min}}\} \tag{4.8}$$

とする．以後，$G_{\gamma_{min}}$ を定項 TRS と見なす[*2]．

次に，$\mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ 上の新しい 2 項関係 $\leftrightarrow_i, \Leftrightarrow_i$（$i = 0, 1, \ldots$）を導入するが，その導入のために必要な定義を次に与える．

定義 4.7　$\leftrightarrow_0, \leftrightarrow_1, \leftrightarrow_2, \ldots$ を $\mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ 上の 2 項関係として，$\Leftrightarrow_i = \bigcup_{j=0}^{i} \leftrightarrow_j$ と定義する．また，その反射推移閉包を $\Leftrightarrow_i^*$ と表す．$\Leftrightarrow_i \setminus \leftrightarrow_0$ を $\overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow_i}$ とする．2 項関係の系列 $\delta : s_0 \leftrightarrow_{j_0} s_1 \leftrightarrow_{j_1} \ldots \leftrightarrow_{j_{n-1}} s_n$ に対して $\mathsf{size}(\delta) = \{j_0, \ldots, j_{n-1}\}_m$ と定義する．また，$\mathsf{rank}(\delta) = \max(\mathsf{size}(\delta))$ とする．

系列 $\gamma : s \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow_i^*} t$（ただし，$\mathsf{root}(s) = \mathsf{root}(t)$）に対して，系列 $\gamma' : s_{|k} \Leftrightarrow_j^* t_{|k}$（ただし，$k \in \{1, \ldots, \mathsf{ar}(\mathsf{root}(s))\}$）が得られるとき，$\gamma'$ を γ の**カット系列**とよぶ．同様に，$\beta\sigma \leftrightarrow_0 \alpha\sigma \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow_i^*} \alpha\sigma' \leftrightarrow_0 \beta\sigma'$ を**ピーク列**とよぶ．

定義 4.8　$\alpha_{|u}\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow_i^*} \alpha'\theta$ を満たす R の規則 $\alpha \to \beta$, $\alpha' \to \beta'$（ただし，$\mathsf{V}(\alpha) \cap \mathsf{V}(\alpha') = \emptyset$ とする），代入 θ と出現 $u \in O_F(\alpha)$ が存在し，$\alpha_{|u}\theta, \alpha'\theta \in \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ を満たすとき，$\Leftrightarrow_i^*$ は **E 重なり系列を持つ**という．ただし，$u = \varepsilon$ のときは $\alpha \to \beta$ と $\alpha' \to \beta'$ は同じ規則ではないものとする．

定義 4.9　関係 $\leftrightarrow_i \subseteq \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})^2 (i \geq 0)$ を次のように帰納的に定義する．

[*1] $\gamma_{min|v}$ がピーク列を持つことの証明は補題 A.1.2 の証明の中で示したピーク列の存在を示す証明と同様である．

[*2] $G_{\gamma_{min}}$ の各書き換え規則中に出現する変数はすべて定数と見なす．

(1) $i=0$ のとき，$\leftrightarrow_0 := \{(\alpha,\beta),(\beta,\alpha) \mid \alpha \to \beta \in G_{\gamma_{min}}\}$ とする．

(2) $i>0$ のとき，$\leftrightarrow_{i-1}$ が定義されないかまたは $\Leftrightarrow^*_{i-1}$ が E 重なり系列を持つならば，$\leftrightarrow_i$ は定義されない．
$\leftrightarrow_{i-1}$ が定義され，$\Leftrightarrow^*_{i-1}$ が E 重なり系列を持たないならば，

(2.1) 次の条件 (i)–(iv) を満たす $s,t \in \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ が存在するとき，そのような組 (s,t) を 1 つ選び $\leftrightarrow_i = \{(s,t),(t,s)\}$ とする．

(i) $\mathsf{root}(s) = \mathsf{root}(t)$

(ii) すべての $j \in \{1,\ldots,\mathsf{ar}(\mathsf{root}(s))\}$ について $s_{|j} \Leftrightarrow^*_{i-1} t_{|j}$

(iii) $s \not\Leftrightarrow^*_{i-1} t$

(iv) $\alpha\theta(\overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow}_{i-1} \cup \{(s,t),(t,s)\})^*\alpha\theta'$ を満たすすべての $\alpha\theta \to \beta\theta$，$\alpha\theta' \to \beta\theta' \in G_{\gamma_{min}}$（ただし，$\alpha \to \beta \in R$）について $\beta\theta \Leftrightarrow^*_{i-1} \beta\theta'$

(2.2) 上記の条件 (i)–(iv) を満たす $s,t \in \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ が存在しないとき，条件 (i)–(iii) のみを満たす組 (s,t) が存在するならば，そのような組 (s,t) を 1 つ選び，$\leftrightarrow_i$ を次のアルゴリズム (2.2) によって求める．

アルゴリズム (2.2)

$\leftrightarrow_i := \{(s,t),(t,s)\}$

while ある $\alpha\theta \to \beta\theta, \alpha\theta' \to \beta\theta' \in G_{\gamma_{min}}$（ただし，$\alpha \to \beta \in R$）が存在して，$\alpha\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow^*_i} \alpha\theta'$，$\beta\theta \not\Leftrightarrow^*_{i-1} \beta\theta'$ かつ $\beta\theta \not\leftrightarrow_i \beta\theta'$ do

begin

$\leftrightarrow_i := \leftrightarrow_i \cup \{(\beta\theta,\beta\theta'),(\beta\theta',\beta\theta)\}$

end

条件 (i)–(iii) を満たす $s,t \in \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ が存在しないならば，$\leftrightarrow_i$ は定義されない．

$\mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ が有限集合であることから，$\leftrightarrow_i$ の定義が無限個の i に対して定義されることはない．したがって，$\leftrightarrow_i$ が定義された最大の i を $imax$ とする．定義より，$\Leftrightarrow^*_{imax-1}$ が E 重なり系列を持つことはありえない．

定義 4.9 は，合同閉包アルゴリズム [1], [9], [11] と比べ，$\mathsf{root}(s) = \mathsf{root}(t)$ およびすべての $j \in \{1,\ldots,\mathsf{ar}(\mathsf{root}(s))\}$ について $s_{|j} \Leftrightarrow^*_i t_{|j}$ を満たす (s,t)，(t,s) をそれ以上追加できなくなるまで順次 $\leftrightarrow_k$（ただし $k>i$）に追加していくという点において同等である．相違点としては，$\leftrightarrow_i$ は上述のいくつかの条件を満たすときだけ定義され，また条件 (i)–(iv) を満たす組が優先して定義されることである．したがって，次の補題が成立する．

補題 4.10 $\Leftrightarrow^*_{imax}$ が E 重なり系列を持たないならば，任意の $s,t \in \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ について $s \leftrightarrow^*_{G_{\gamma_{min}}} t$ と $s \Leftrightarrow^*_{imax} t$ は等価である． □

補題 4.11 [10] 任意の $(x,t) \in \mathsf{Decompose}(\hat{\alpha}_{1|u},\hat{\alpha}_2)$ について，$x\hat{\theta} \leftrightarrow^*_{G_{\gamma_{min}}} t\hat{\theta}$．

証明 式 (4.6) より，$x\hat{\theta} \leftrightarrow^*_R t\hat{\theta}$．定項 TRS $G_{\gamma_{min}}$ の定義（すなわち，$G_{\gamma_{min}}$ は $x\hat{\theta} \leftrightarrow^*_R t\hat{\theta}$ 中のすべてのリダクションを含むこと）より $x\hat{\theta} \leftrightarrow^*_{G_{\gamma_{min}}} t\hat{\theta}$ が成立する． □

補題 4.12 次の (a) または (b) が成立する．

(a) $\Leftrightarrow^*_{imax}$ は E 重なり系列を持つ．

(b) 任意の $(x,t) \in \mathsf{Decompose}(\hat{\alpha}_{1|u},\hat{\alpha}_2)$ について，$x\hat{\theta} \Leftrightarrow^*_{imax} t\hat{\theta}$．

証明 $\Leftrightarrow^*_{imax}$ が E 重なり系列を持つことで定義 4.9 の帰納的定義が終了した場合，明らかに (a) が成立する．次に，$\Leftrightarrow^*_{imax}$ が E 重なり系列を持たずに定義 4.9 の帰納的定義が終了した場合を考える．$(x,t) \in \mathsf{Decompose}(\hat{\alpha}_{1|u},\hat{\alpha}_2)$ とすると，補題 4.11 より $x\hat{\theta} \leftrightarrow^*_{G_{\gamma_{min}}} t\hat{\theta}$．このとき，$\Leftrightarrow^*_{imax}$ が E 重なり系列を持たないことから，補題 4.10 より，$x\hat{\theta} \Leftrightarrow^*_{imax} t\hat{\theta}$．よって，(b) が成立する． □

次に，$\Leftrightarrow^*_{imax}$ が E 重なり系列を持つとき，その E 重なり系列を $\delta : \overline{\alpha}_{|v}\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow^*_{imax}} \overline{\alpha'}\theta$ とすると，$\mathsf{common}(\overline{\alpha}_{|v},\overline{\alpha'})$ は真かつ，任意の $(x,t) \in \mathsf{Decompose}(\overline{\alpha}_{|v},\overline{\alpha'})$ について $x\theta \Leftrightarrow^*_{imax-1} t\theta$ が成立することを証明するが，それを導くために必要ないくつかの補題を証明する．次の補題 4.13 は補題 4.15 以降の証明に必要なものである．

補題 4.13 $\Leftrightarrow^*_i$（$i>0$）は E 重なり系列を持たないとする．$\alpha_{|uk}\theta \Leftrightarrow^*_i \alpha'_{|vk}\theta'$ とする．ただし，$\alpha \to \beta$，$\alpha' \to \beta' \in R$，$u \in \mathcal{O}_F(\alpha)$，$v \in \mathcal{O}_F(\alpha')$，$k \in \mathcal{O}_F(\alpha_{|u}) \cap \mathcal{O}_F(\alpha'_{|v})$，$uk \neq \varepsilon$，$vk \neq \varepsilon$，$\alpha_{|uk}\theta, \alpha'_{|vk}\theta' \in \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$．そのとき，$\delta : \alpha_{|uk}\theta \Leftrightarrow^*_i \alpha'_{|vk}\theta'$ を $\mathsf{size}(\delta)$ の値が最小のものとするとき，$0 \notin \mathsf{size}(\delta)$ が成立する．

証明 逆に $0 \in \mathsf{size}(\delta)$ と仮定して矛盾を導く．$\Leftrightarrow^*_i$ は E 重なり系列を持たないことより，δ はある系列 $\delta' : \overline{\beta}\sigma \leftrightarrow_0 \overline{\alpha}\sigma \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow^*_i} \overline{\alpha}\sigma' \leftrightarrow_0 \overline{\beta}\sigma'$ を部分列として含む（ただし，$\overline{\alpha} \to \overline{\beta} \in R$）[*3]．$\delta'$ の部分列 $\eta : \overline{\alpha}\sigma \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow^*_i} \overline{\alpha}\sigma'$ に対して $\mathsf{rank}(\eta) = m$（$\leq i$）とする．$m=0$ となる場合．このとき，ε-inv の定義より，$\overline{\alpha}\sigma = \overline{\alpha}\sigma'$ となり，よって，$\overline{\beta}\sigma = \overline{\beta}\sigma'$ となるので δ' を空系列に置き換えた系列が得られ，このとき系列の size の値が小さくなるので最小性に矛盾する．η 中の $\leftrightarrow_m$ が定義 4.9 の (2.1) で定義されるならば，(2.1) の (iv) が成立することより，ある系列 $\xi : \overline{\beta}\sigma \Leftrightarrow^*_{m-1} \overline{\beta}\sigma'$ が存在する．$\mathsf{size}(\delta') \gg \mathsf{size}(\xi)$ より，δ 中の部分列 δ' を ξ に置き換えた系列の size の値は $\mathsf{size}(\delta)$ より真に小さくなる．これは δ の最小性に矛盾する．証明で残っている場合は η 中の $\leftrightarrow_m$ が定義 4.9 の (2.2) で定義される場合である．ある系列 $\xi : \overline{\beta}\sigma \Leftrightarrow^*_{m-1} \overline{\beta}\sigma'$ が存在するならば，(2.1) の場合と同様に矛盾が生ずるので，$\overline{\beta}\sigma \not\Leftrightarrow^*_{m-1} \overline{\beta}\sigma'$ と仮定する．そのとき，$\overline{\alpha}\sigma \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow^*_m} \overline{\alpha}\sigma'$ かつ $\overline{\beta}\sigma \not\Leftrightarrow^*_{m-1} \overline{\beta}\sigma'$ が成立す

[*3] δ が δ' を部分列として持つことの証明は補題 A.1.2 の証明の中で示したピーク列の存在を示す証明と同様である．

るので，$\overline{\beta}\sigma \leftrightarrow_m \overline{\beta}\sigma'$ またはアルゴリズム (2.2) の while 文の条件が成立し，したがって $(\overline{\beta}\sigma, \overline{\beta}\sigma') \in \leftrightarrow_m$（すなわち，$\overline{\beta}\sigma \leftrightarrow_m \overline{\beta}\sigma'$）が成立する．$\xi : \overline{\beta}\sigma \leftrightarrow_m \overline{\beta}\sigma'$ とすると，明らかに $\mathsf{size}(\delta') \gg \mathsf{size}(\xi)$．$\delta$ 中の部分列 δ' を ξ に置き換えることにより，size の値は真に小さくなる．これは δ の最小性に矛盾する． □

補題 4.13 において，$k = \varepsilon$, $(\alpha \to \beta) = (\alpha' \to \beta')$, $u = v$ とすることにより，次の系が得られる．

系 4.14 $\Leftrightarrow_i^*$（$i > 0$）は E 重なり系列を持たないとする．$\alpha_{|u}\theta \Leftrightarrow_i^* \alpha_{|u}\theta'$ とする．ただし，$\alpha \to \beta \in R$, $u \in \mathcal{O}_F(\alpha) \setminus \{\varepsilon\}$，$\alpha_{|u}\theta, \alpha_{|u}\theta' \in \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$．そのとき，$\delta : \alpha_{|u}\theta \Leftrightarrow_i^* \alpha_{|u}\theta'$ を $\mathsf{size}(\delta)$ の値が最小のものとするとき，$0 \notin \mathsf{size}(\delta)$ が成立する． □

次の補題は，TRS が弱単項であることを必要とする．

補題 4.15 $i > 0$ とする．このとき，$\Leftrightarrow_{i-1}^*$ が E 重なり系列を持たないとき，任意の $s, t \in \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ について，$s \leftrightarrow_i t$ ならば $\mathsf{root}(s) = \mathsf{root}(t)$ かつ，任意の $k \in \{1, \ldots, \mathsf{ar}(\mathsf{root}(s))\}$ について $s_{|k} \Leftrightarrow_{i-1}^* t_{|k}$．

証明 i に関する帰納法で証明する．$i > 1$ のとき，$s \leftrightarrow_i t$ が定義 4.9 の (2.1) で定義されたならば明らかに命題が成立する．

$s \leftrightarrow_i t$ が定義 4.9 の (2.2) で定義されたとき，$\leftrightarrow_i = \{(s', t'), (t', s'), (\beta_1\theta_1, \beta_1\theta_1'), (\beta_1\theta_1', \beta_1\theta_1), \ldots, (\beta_l\theta_l, \beta_l\theta_l'), (\beta_l\theta_l', \beta_l\theta_l)\}$ とする．ただし，(s', t')，(t', s') は最初に追加される要素，$(\beta_1\theta_1, \beta_1\theta_1')$, $(\beta_1\theta_1', \beta_1\theta_1), \ldots, (\beta_l\theta_l, \beta_l\theta_l')$, $(\beta_l\theta_l', \beta_l\theta_l)$ は while 文の中で追加される要素で，追加された順番に並んでいるものとする．便宜上，$(s', t') = (\beta_0\theta_0, \beta_0\theta_0')$ とする．

命題 $P(j)$：任意の $k \in \{1, \ldots, \mathsf{ar}(\mathsf{root}(\beta_j))\}$ について $\mathsf{root}(\beta_j\theta_j) = \mathsf{root}(\beta_j\theta_j')$ かつ $\beta_j\theta_{j|k} \Leftrightarrow_{i-1}^* \beta_j\theta_{j|k}'$ を j に関する帰納法により証明する．そのために，$j \in \{0, \ldots, l\}$ に対して $\Leftrightarrow_{(i,j)}$ を次のように定義する．

$$\Leftrightarrow_{(i,j)} = \begin{cases} \Leftrightarrow_{i-1} \cup \{(s', t'), (t', s')\} & (j = 0 \text{ のとき}) \\ \Leftrightarrow_{(i,j-1)} \cup \{(\beta_j\theta_j, \beta_j\theta_j'), (\beta_j\theta_j', \beta_j\theta_j)\} & (j > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$\leftrightarrow_{(i,j)} = \{(\beta_j\theta_j, \beta_j\theta_j'), (\beta_j\theta_j', \beta_j\theta_j)\}$ とする．$P(0)$ は条件 (i)，(ii) より明らかに成立している．$P(j)$ まで成立している（ただし，$j < l$）と仮定する．$\beta_{j+1}\theta_{j+1} \leftrightarrow_i \beta_{j+1}\theta_{j+1}'$ より，ある $\gamma' : \alpha_{j+1}\theta_{j+1} \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow_{(i,j)}^*} \alpha_{j+1}\theta_{j+1}'$ が存在する（ここで，$\alpha_{j+1} \to \beta_{j+1} \in R$）．

- $\gamma' : \alpha_{j+1}\theta_{j+1} (= p_1) \leftrightarrow_{\tau_1} \ldots \leftrightarrow_{\tau_{m-1}} \alpha_{j+1}\theta_{j+1}' (= p_m)$ とすると，任意の $m' \in \{1, \ldots, m-1\}$ に対して $\tau_{m'} \in \{1, \ldots, i-1\} \cup \{(i, 0), (i, 1), \ldots, (i, j)\}$ が成立するので，任意の $k \in \{1, \ldots, \mathsf{ar}(\mathsf{root}(\alpha_{j+1}))\}$ について補題全体に関する帰納法の仮定および命題 $P(j)$ に関する帰納法の仮定より，$\mathsf{root}(p_{m'}) = \mathsf{root}(p_{m'+1})$ かつ $p_{m'|k} \Leftrightarrow_{i-1}^* p_{m'+1|k}$ が成立する．したがって，$\alpha_{j+1}\theta_{j+1|k} \Leftrightarrow_{i-1}^* \alpha_{j+1}\theta_{j+1|k}'$ が成立する．$k \notin \mathcal{O}_X(\alpha_{j+1})$ のとき，$\delta : \alpha_{j+1}\theta_{j+1|k} \Leftrightarrow_{i-1}^* \alpha_{j+1}\theta_{j+1|k}'$ を $\mathsf{size}(\delta)$ の最小のものとすると系 4.14 より，$0 \notin \mathsf{size}(\delta)$ である．よって，$\delta : \alpha_{j+1}\theta_{j+1|k} \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow_{i-1}^*} \alpha_{j+1}\theta_{j+1|k}'$．

このプロセスを繰り返すことにより，任意の $u \in \mathcal{O}_X(\alpha_{j+1})$ について，ある $i' < i$ が存在して $\alpha_{j+1}\theta_{j+1|u} \Leftrightarrow_{i'}^* \alpha_{j+1}\theta_{j+1|u}'$ が成立する．したがって，$\mathsf{V}(\beta) \subseteq \mathsf{V}(\alpha)$ に注意すると，

命題 (*)：任意の $v \in \mathcal{O}_X(\beta_{j+1})$ に対して

$\beta_{j+1}\theta_{j+1|v} \Leftrightarrow_{i'}^* \beta_{j+1}\theta_{j+1|v}'$（ただし $i' < i$）

が成立する．ここで，$\beta_{j+1} \in X$ ならば $\beta_{j+1}\theta_{j+1} \Leftrightarrow_{i'}^* \beta_{j+1}\theta_{j+1}'$（ただし $i' < i$）が成立するので，場合 (2.2) で組 $(\beta_{j+1}\theta_{j+1}, \beta_{j+1}\theta_{j+1}')$ を $\leftrightarrow_i$ に追加することはない．したがって，$(\beta_{j+1}\theta_{j+1}, \beta_{j+1}\theta_{j+1}') \in \leftrightarrow_i$ より $\beta_{j+1} \notin X$ となる．よって $\mathsf{root}(\beta_{j+1}\theta_{j+1}) = \mathsf{root}(\beta_{j+1}\theta_{j+1}')$ が成立する．

命題 $P(j+1)$ を示すには，あと，任意の $k \in \{1, \ldots, \mathsf{ar}(\mathsf{root}(\beta_{j+1}))\}$ について，$\beta_{j+1}\theta_{j|k} \Leftrightarrow_{i-1}^* \beta_{j+1}\theta_{j'|k}$ が成立することを示す必要がある．これには，任意の $w \in \mathcal{O}_F(\beta_{j+1}) \setminus \{\varepsilon\}$ について，ある $i'' \geq i' + 1$ が存在し，$\beta_{j+1}\theta_{j+1|w} \Leftrightarrow_{i''}^* \beta_{j+1}\theta_{j+1|w}'$ が成立し，すべての $j' \in \{i' + 1, \ldots, i''\}$ に対して，$\leftrightarrow_{j'}$ が場合 (2.1) で定義されることを示せば十分である．$\beta_{j+1|w}$ の高さに関する帰納法で証明する．$\beta_{j+1|w} = f(s_1, \ldots, s_n)$ とする．$f \in D_R$ の場合．このとき，$\beta_{j+1|w}$ が準構成子項であることから，$\beta_{j+1|w}$ は定項．$\beta_{j+1|w}\theta_{j+1} = \beta_{j+1|w}\theta_{j+1}'$ より明らか．$f \notin D_R$ の場合．帰納法の仮定および命題 (*) から，任意の $k \in \{1, \ldots, n\}$ について i_k'' が存在して，$s_k\theta_{j+1} \Leftrightarrow_{i_k''}^* s_k\theta_{j+1}'$ が成立し，すべての $j'' \in \{i' + 1, \ldots, i_k''\}$ について，$\leftrightarrow_{j''}$ は場合 (2.1) で定義される．

よって，(2.1) は (2.2) より優先されるので，$l = \max\{i_1'', \ldots, i_n''\}$ としたとき，$l < i$ が成立する．$\beta_{j+1}\theta_{j+1|w} \Leftrightarrow_l^* \beta_{j+1}\theta_{j+1|w}'$ が成立していれば，明らかに題意は成立．

そうでない場合．(2.2) より (2.1) は優先されるので，(2.1) の (s, t) として，$(\beta_{j+1}\theta_{j+1|w}, \beta_{j+1}\theta_{j+1|w}')$ をとり，$\leftrightarrow_{l+1} = (\beta_{j+1}\theta_{j+1|w}, \beta_{j+1}\theta_{j+1|w}')$ としたときに，条件 (i)–(iv) が満たされることを示せばよい．明らかに条件 (i)–(iii) は満たす．

条件 (iv) が満たされることを示す．$\alpha\theta \to \beta\theta \in G_{\gamma_{min}}$, $\alpha\theta' \to \beta\theta' \in G_{\gamma_{min}}$，$\alpha\theta(\overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow_l} \cup \{(s, t), (t, s)\})^*\alpha\theta'$ が成立するとする．このとき，$\mathsf{root}(\alpha) \in D_R$, $\mathsf{root}(s) = \mathsf{root}(t) = f \notin D_R$ より，$\alpha\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow_l^*} \alpha\theta'$．よって，$\beta\theta \Leftrightarrow_{l-1}^* \beta\theta'$ または $\beta\theta \leftrightarrow_l \beta\theta'$ が成立する．以上より，条件 (iv) が満たされる．

以上より，任意の $k \in \{1, \ldots, \mathsf{ar}(\mathsf{root}(\beta_{j+1}))\}$ について $\beta_{j+1}\theta_{j+1|k} \Leftrightarrow_{i-1}^* \beta_{j+1}\theta_{j+1|k}'$ が成立する．よって $P(j+1)$

が成立する．以上より，すべての $j \in \{0,\ldots,l\}$ に対して $P(j)$ が成立するので，この補題が成立する． □

補題 4.16 $\Leftrightarrow^*_{imax}$ が E 重なり系列を持つとき，その E 重なり系列を $\delta : \overline{\alpha}_{|v}\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow^*_{imax}} \overline{\alpha'}\theta$ とする．そのとき，common$(\overline{\alpha}_{|v}, \overline{\alpha'})$ は真かつ，任意の $(x,t) \in$ Decompose$(\overline{\alpha}_{|v}, \overline{\alpha'})$ について $x\theta \Leftrightarrow^*_{imax-1} t\theta$.

証明 $imax = 0$ とすると，$\overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow}$ の定義より，$\overline{\alpha}_{|v}\theta = \overline{\alpha'}\theta$. これは R が重なり TRS ではないことに反する．よって，$imax > 0$. $\Leftrightarrow^*_{imax-1}$ が E 重なり系列を持たないことから，補題 4.15 より，root$(\overline{\alpha}_{|v})$ = root$(\overline{\alpha'})$ かつ任意の $k \in \{1,\ldots,\mathrm{ar}(\mathrm{root}(\overline{\alpha}_{|v}))\}$ に対して $\delta_k : \overline{\alpha}_{|vk}\theta \Leftrightarrow^*_{imax-1} \overline{\alpha'}_{|k}\theta$. $k \notin \mathcal{O}_X(\overline{\alpha}_{|v}) \cup \mathcal{O}_X(\overline{\alpha'})$ のとき，δ_k を size の値が最小のものとすると，補題 4.13 より $0 \notin$ size(δ_k) である．したがって，補題 4.15 より root$(\overline{\alpha}_{|vk})$ = root$(\overline{\alpha'}_{|k})$ かつ任意の $l \in \{1,\ldots,\mathrm{ar}(\mathrm{root}(\hat{\alpha}_{|vk})\}$ に対して $\delta_{kl} : \overline{\alpha}_{|vkl}\theta \Leftrightarrow^*_{imax-2} \overline{\alpha'}_{|kl}\theta$. このカット系列を求めるプロセスを繰り返すことにより，common$(\overline{\alpha}_{|v}, \overline{\alpha'})$ が真となり，任意の $u \in$ Min$(\mathcal{O}_X(\overline{\alpha}_{|v}) \cup \mathcal{O}_X(\overline{\alpha'}))$ について，$\overline{\alpha}_{|vu}\theta \Leftrightarrow^*_{imax-1} \overline{\alpha'}_{|u}\theta$ が成立する．したがって，この補題が成立する． □

補題 4.17 次の (a) および (b) が成立する．

(a) $\Leftrightarrow^*_{imax}$ が E 重なり系列を持たないならば，$(\hat{\alpha}_{1|u}, \hat{\alpha}_2)$ は ω 単一化可能.

(b) $\Leftrightarrow^*_{imax}$ が E 重なり系列を持つならば，その E 重なり系列を $\delta : \overline{\alpha}_{|v}\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow^*_{imax}} \overline{\alpha'}\theta$ としたとき，$(\overline{\alpha}_{|v}, \overline{\alpha'})$ は ω 単一化可能.

証明

(a) 式 (4.5) より，common$(\hat{\alpha}_{1|u}, \hat{\alpha}_2)$ は真である．ω 単一化アルゴリズムに Decompose$(\hat{\alpha}_{1|u}, \hat{\alpha}_2)$ を入力してアルゴリズムの途中で得られる要素対集合を Γ とする．$x \sim_{\Gamma_X} y$ かつ $p \neq q$ を満たす $(x,p),(y,q) \in \Gamma_T$ が存在するとき，補題 4.12 より，$p\hat{\theta} \Leftrightarrow^*_{imax} x\hat{\theta} \Leftrightarrow^*_{imax} y\hat{\theta} \Leftrightarrow^*_{imax} q\hat{\theta}$ が成立する．補題 4.16 の証明と同様の議論によりこの系列のカット系列を求めることができ，このカット系列を求めるプロセスを繰り返すことにより，common(p,q) は真であり，任意の $(x',s) \in$ Decompose(p,q) に対して $x'\hat{\theta} \Leftrightarrow^*_{imax} s\hat{\theta}$ が成立する．この議論を繰り返すことにより，ω 単一化アルゴリズムが失敗になることはない．一方，ω 単一化アルゴリズムの停止性は保証されているので，結局，ω 単一化アルゴリズムは成功で終了することが分かる．したがって，(a) が成立する．

(b) 補題 4.16 より common$(\overline{\alpha}_{|u}, \overline{\alpha'})$ が真である．ω 単一化アルゴリズムに Decompose$(\overline{\alpha}_{|u}, \overline{\alpha'})(= \Gamma)$ を入力すると，$x \sim_{\Gamma_X} y$ かつ $p \neq q$ を満たす $(x,p),(y,q) \in \Gamma_T$ が存在するとき，補題 4.16 より，$p\theta \Leftrightarrow^*_{imax-1} x\theta \Leftrightarrow^*_{imax-1} y\theta \Leftrightarrow^*_{imax-1} q\theta$ が成立する．$\Leftrightarrow^*_{imax-1}$ は E 重なり系列を持たないので，補題 4.16 の証明と同様の議論によりこの系列のカット系列を求めることができ，このカット系列を求めるプロセスを繰り返すことにより，common(p,q) は真であり，任意の $(x',s) \in$ Decompose(p,q) に対して $x'\theta \Leftrightarrow^*_{imax-1} s\theta$ が成立する．したがって，Decompose(p,q) を追加して新しく得られる Γ に対しても，$(x',s) \in \Gamma$ ならば $x'\theta \Leftrightarrow^*_{imax-1} s\theta$ が成立するので，この議論を繰り返すことにより，ω 単一化アルゴリズムが失敗になることはない．一方，ω 単一化アルゴリズムの停止性は保証されているので，結局，ω 単一化アルゴリズムは成功で終了することが分かる．したがって，(b) が成立する． □

補題 4.17 より，次の定理を得る．

定理 4.18 弱単項 TRS において非 ω 重なりならば，非 E 重なりである．

証明 TRS R が重なり TRS ならば，ω 重なりでもあるので，この定理は明らかに成立する．そこで，TRS R は重なり TRS ではないと仮定して，この定理を背理法で証明する．すなわち，R が非 ω 重なりかつ E 重なりであると仮定して，矛盾を導く．これらの仮定は (4.1) と (4.2) と同じであり，したがって補題 4.6 より，(4.4)–(4.6) を満たす並列ステップ数最小の E 重なり系列 γ_{min} が存在する．この γ_{min} から定義した $G_{\gamma_{min}}$(4.7)，$T_{G_{\gamma_{min}}}$(4.8) を用いて，関係 $\leftrightarrow_i$，$\Leftrightarrow_i$ を定義する（定義 4.9）と，定義 4.9 の直後で述べたように $imax$ が求まり，$\Leftrightarrow_{imax}$ に対して補題 4.17 を満たす．$\Leftrightarrow^*_{imax}$ が E 重なり系列を持たないならば，この補題の (a) より，$(\hat{\alpha}_{1|u}, \hat{\alpha}_2)$ は ω 単一化可能である．したがって，R は ω 重なりであり，矛盾が生ずる．$\Leftrightarrow^*_{imax}$ が E 重なり系列を持つとき，この補題の (b) より，ある E 重なり系列 $\delta : \overline{\alpha}_{|v}\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow^*_{imax}} \overline{\alpha'}\theta$ が存在して，$(\overline{\alpha}_{|v}, \overline{\alpha'})$ は ω 単一化可能である．したがって，R は ω 重なりであり，矛盾が生ずる．ゆえに，この定理が成立する． □

この定理より次の系が得られる．

系 4.19 弱単項 TRS は，非 ω 重なりならば UN 性を満たす．

系 4.20 WN 性を満たす弱単項 TRS は，非 ω 重なりならば CR 性を満たす．

例 4.21 $F = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}, R_4 = \{f(x,x) \to a, f(x,h(h(h(x)))) \to b, g(a,x,x,b) \to c, g(y,y,z,z) \to d, e \to h(e)\}$ とする．この TRS R_4 における並列ステップ数最小の E 重なり系列 γ_{min} は

$$\begin{array}{l} g(\quad a, f(e,h(e)), \quad f(e,h(e)), \qquad\qquad b) \leftarrow \\ g(\quad a, f(e,h(e)), \quad f(e,h(e)), f(e,h(h(h(e))))) \leftrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\!\!\!\!+\!\!\!\!\rightarrow \\ g(f(e,e), \quad f(e,e), f(e,h(h(e))), \quad f(e,h(h(e)))) \end{array}$$

となる．このとき，$G_{\gamma_{min}} = \{f(e,h(h(h(e)))) \to b, f(e,e) \to a, e \to h(e)\}$，$T_{G_{\gamma_{min}}} = \{g(a,f(e,h(e)), f(e,h(e)),b), \quad g(f(e,e), \quad f(e,e), \quad f(e,h(h(e))), f(e,h(h(e)))), f(e,(h(h(h(e))))), b, f(e,e), a, e, h(e)\}$ と

なる．定義 4.9 の (1) より，$\leftrightarrow_0 = \{(f(e,h(h(h(e)))),b)$, $(b,f(e,h(h(h(e)))))$, $(f(e,e),a)$, $(a,f(e,e))$, $(e,h(e))$, $(h(e),e)\}$ となる．次に (2) より，(e,e), $(e,h(e)) \in \Leftrightarrow_0^*$ より $(f(e,e),\ f(e,h(e)))$ が条件の (i)–(iv) を満たすので $\leftrightarrow_1 = \{(f(e,e),\ f(e,h(e))),\ (f(e,h(e)),\ f(e,e))\}$ となる．同様に，$(e,h(e)) \in \Leftrightarrow_1^*$ より $\leftrightarrow_2 = \{(h(e),\ h(h(e)))$, $(h(h(e)),\ h(e))\}$，(e,e), $(h(e),\ h(h(e))) \in \Leftrightarrow_2^*$ より $\leftrightarrow_3 = \{(f(e,h(e)),\ f(e,h(h(e)))),\ (f(e,h(h(e))),\ f(e,h(e)))\}$, $(h(e),\ h(h(e))) \in \Leftrightarrow_3^*$ より $\leftrightarrow_4 = \{(h(h(e)),\ h(h(h(e))))$, $(h(h(h(e))),\ h(h(e)))\}$，(e,e)，$(h(h(e)),\ h(h(h(e)))) \in \Leftrightarrow_4^*$ より $\leftrightarrow_5 = \{(f(e,h(h(e))),\ f(e,h(h(h(e)))))$, $(f(e,h(h(h(e)))),\ f(e,h(h(e))))\}$ とできる．すると，$\Leftrightarrow_5^*$ は $f(e,e) \leftrightarrow_1 f(e,h(e)) \leftrightarrow_3 f(e,h(h(e))) \leftrightarrow_5 f(e,h(h(h(e))))$ という E 重なり系列を持つので，$\leftrightarrow_i$ の帰納的定義はここで終了する．$f(x,x)$ と $f(x,h(h(h(x))))$ は ω 単一化可能であることから，この例は補題 4.17 の (b) が成立する場合である．

次に，弱単項 TRS が，必ずしも重み保存的（や深さ保存的）でないことを説明する．$w : F \rightarrow \{1,2,\dots\}$ を関数記号に対する重み付け関数とする．項 t とその出現 u について，$W_w(u,t)$ を次のとおり再帰的に定義する：$W_w(\varepsilon,x) = 0$，$W_w(\varepsilon,f(t_1,\dots,t_n)) = w(f)$，$W_w(iu,f(t_1,\dots,t_n)) = w(f)+W_w(u,t_i)$．ある重み付け関数 $weight : F \rightarrow \{1,2,\dots\}$ が存在して，任意の $\alpha \rightarrow \beta \in R$，$x \in \mathsf{V}(\beta)$ について $\max\{W_{weight}(v,\beta) \mid v \in \mathcal{O}_x(\beta)\} \le \max\{W_{weight}(u,\alpha) \mid u \in \mathcal{O}_x(\alpha)\}$ が成立するとき，R を**重み保存的 TRS** という．すべての関数記号 f について $weight(f) = 1$ とした場合に上記条件が成立する場合は R を**深さ保存的 TRS** という．

例 4.22 $R_1 = \{+(s(x),0) \rightarrow s(x), +(s(x),s(y)) \rightarrow +(x,s(s(y))), +(0,y) \rightarrow y\}$ は弱単項 TRS である．R_1 は重み保存的 TRS ではない．なぜなら，2 つ目の規則について $\max\{W_{weight}(v,+(x,s(s(y)))) \mid v \in \mathcal{O}_y(+(x,s(s(y))))\} = weight(+) + 2weight(s) > weight(+) + weight(s) = \max\{W_{weight}(u,+(s(x),s(y))) \mid u \in \mathcal{O}_y(+(s(x),s(y)))\}$ が成立するからである．同様に，R_1 は深さ保存的 TRS でもない．

深さ保存的 TRS や重み保存的 TRS においては，非 ω 重なりならば非 E 重なりとなる [17].

例 4.23 次の TRS R_5 は，従来手法では困難であるが本論文の手法では UN 性を判定できる例である．
$F = \{e,t,f,s,p,m,\infty\}$ とする．

$$
\begin{aligned}
R_5 = \{&e(x,x) \rightarrow t,\\
&e(s(x),p(y)) \rightarrow f,\\
&e(p(x),s(y)) \rightarrow f,\\
&m(s(x),y) \rightarrow m(x,p(y)),\\
&m(p(x),y) \rightarrow m(x,s(y)),\\
&\infty \rightarrow s(\infty)\}
\end{aligned}
$$

s と p の重みをどのように設定しても，4 つ目と 5 つ目の規則のいずれかが必ず重み保存にならない．したがって，R_5 は深さ保存的でも重み保存的でもなく，従来手法が使えない．

5. 多層 TRS の E 重なり性と ω 重なり性

前章では，弱単項 TRS において，非 ω 重なりならば，非 E 重なりであることを示した．TRS に弱単項性が必要であった理由は，$i+1$ 番目に追加した関係 $\leftrightarrow_{i+1}$ により，あるピーク列

$$\beta\sigma \leftrightarrow_0 \alpha\sigma \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow_{i+1}^*} \alpha\sigma' \leftrightarrow_0 \beta\sigma'$$

が得られるならば，$\beta \notin X$ のとき任意の $k \in \{1,\dots,\mathsf{ar}(\mathsf{root}(\beta))\}$ に対して

$$\beta_{|k}\sigma \Leftrightarrow_i^* \beta_{|k}\sigma'$$

が成立していることを示すためであった．すなわち，TRS R が弱単項であるならば，$\beta_{|k}$ は準構成子項であり，したがって，定義記号が出現するならば $\beta_{|k}$ のある定項の部分項 $\beta_{|kv}$ 中に出現するから，$\beta_{|kv}\theta = \beta_{|kv}\theta'$ が成立する．それゆえ，任意の $x \in \mathsf{V}(\beta_{|k})$ に対して $x\sigma \Leftrightarrow_i^* x\sigma'$ が成立するならば $\beta_{|k}\sigma \Leftrightarrow_i^* \beta_{|k}\sigma'$ であることを容易に証明することができた．

この章では，弱単項 TRS のクラスを拡張した 2 層 TRS のクラスを新たに導入する．2 層 TRS は，定義記号の集合 D_R が D_1 と D_2 の 2 つに分割でき，書き換え規則の部分集合 R_1 と R_2 を $R_j = \{\alpha' \rightarrow \beta' \in R \mid \mathsf{root}(\alpha') \in D_j\}$（ただし，$j = 1,2$）と定義すると，$\alpha' \rightarrow \beta' \in R_1$ ならば $\beta' \in X \cup G$ または $\mathsf{root}(\beta') \in D_1 \cup C$ かつ任意の $k \in \{1,\dots,\mathsf{ar}(\mathsf{root}(\beta'))\}$ に対して $\beta'_{|k}$ は準構成子項であることを満たす（ここで，G は定項の集合，C は定義記号ではない関数記号の集合である）．また，$\alpha'' \rightarrow \beta'' \in R_2$ ならば $\beta'' \in X \cup G$ または任意の $k' \in \{1,\dots,\mathsf{ar}(\mathsf{root}(\beta''))\}$ に対して $\beta''_{|k'}$ 中に出現する定義記号は $f \in D_1$ を満たすか，または f は $\beta''_{|k'}$ のある定項の部分項中に出現する．この条件を満たす TRS を 2 層 TRS と定義する．

この章では，2 層 TRS においても，非 ω 重なりならば非 E 重なりであることを証明する．この結果（定理 5.6）は定理 4.18 の結果を拡張している．この証明の枠組みは前章のものと同様であるが，関係 $\leftrightarrow_i, \Leftrightarrow_i$（ただし，$i = 0,1,\dots$）の定義を与える以下の定義 5.4 は，前章の定義 4.9 と以下の点で異なっている．すなわち，定義 5.4 では，関係 $\leftrightarrow_{i+1}$ によりあるピーク列 $\beta\sigma \leftrightarrow_0 \alpha\sigma \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow_{i+1}^*} \alpha\sigma' \leftrightarrow_0 \beta\sigma'$ が得られるときは $\mathsf{root}(\alpha) \in D_1$ ならば前章の定義 4.9 と同様の定義（定義 5.4 の (2.1)，(2.2) 参照）を行い，$\mathsf{root}(\alpha) \in D_2$

ならば，その関係の追加をできる限り遅らせる（定義 5.4 の (2.3) 参照）ように変更している点で異なっている．これにより，$\mathsf{root}(\alpha) \in D_2$ のとき，$\beta \notin X$ ならば任意の $k \in \{1, \ldots, \mathsf{ar}(\mathsf{root}(\beta))\}$ に対して $\beta_{|k}$ 中に出現する定義記号 f に対して $f \in D_1$ であるか，または f はある定項の部分項に出現することより，

$$\beta_{|k}\sigma \Leftrightarrow_i^* \beta_{|k}\sigma'$$

を保証することができる．したがって，前章と同様の証明が可能となり，2 層 TRS においても，非 ω 重なりならば非 E 重なりであることを示すことができる．

以上が，本章の証明の概要であり，以下ではその形式的な証明を与える．まず，2 層 TRS の定義を与える．

定義 5.1 TRS R は，D_R の分割 D_1, D_2（すなわち，$D_R = D_1 \cup D_2$ かつ $D_1 \cap D_2 = \emptyset$）が存在して，かつすべての規則 $\alpha \to \beta \in R$ に対して次のいずれかが成立するとき，**2 層**であるという．

(1) β は定項または変数である．

(2) $\mathsf{root}(\alpha) \in D_1$，$\mathsf{root}(\beta) \in C \cup D_1$ かつ，すべての $i \in \{1, \ldots, \mathsf{ar}(\mathsf{root}(\beta))\}$ に対して $\beta_{|i}$ が準構成子項である．

(3) $\mathsf{root}(\alpha) \in D_2$，$\mathsf{root}(\beta) \in C \cup D_1 \cup D_2$ かつ，すべての $i \in \{1, \ldots, \mathsf{ar}(\mathsf{root}(\beta))\}$ と $\beta_{|i}$ 中に出現する任意の定義記号 f に対して $f \in D_1$ が成立するか，または f は $\beta_{|i}$ の定項の部分項に出現する．

例 5.2 次の R_6 は 2 層 TRS である．

$$\begin{aligned} R_6 = \{&+(s(x), s(y)) \to +(x, s(s(y))),\\ &+(s(x), 0) \to s(x),\\ &+(0, y) \to y,\\ &\Sigma(x) \to g(x, 0),\\ &g(s(x), y) \to g(x, +(s(x), y)),\\ &g(0, y) \to y\} \end{aligned}$$

ただし，$D_1 = \{+\}$，$D_2 = \{g, \Sigma\}$ とする．

例 5.3 $R_7 = \{g(x) \to h(x, g(x))\}$ は 2 層 TRS ではない．

定義 5.1 において，$D_2 = \emptyset$ かつ TRS R が 2 層のとき，R を 1 層 TRS とよぶ．1 層 TRS は弱単項 TRS であり，その逆も成立する．

以下では，2 層 TRS R に対して，非 ω 重なりならば非 E 重なりであることを示す．この結果を示すために，前章と同様に，

$$\text{TRS } R \text{ は E 重なりであるが，} \omega \text{ 重なりでない} \quad (5.1)$$

と仮定して，矛盾を導く．TRS R が重なり TRS ならば明らかに ω 重なりでもあるので，ただちに矛盾が生ずる．したがって，以下では

$$\text{TRS } R \text{ は重なり TRS ではない} \quad (5.2)$$

と仮定する．前章と同様に，並列ステップ数最小の E 重なり系列

$$\gamma_{min} : \hat{\alpha}_{1|u}\hat{\theta}(= s_0) \overset{U_0}{\leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!+} \cdots \overset{U_{n-1}}{\leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!+} \hat{\alpha}_2\hat{\theta}(= s_n)$$
（ただし，$\hat{\alpha}_1 \to \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2 \to \hat{\beta}_2 \in R$）

とする．補題 4.6 より，γ_{min} は共通部不変列と仮定することができる．前章で，γ_{min} から定義された定項 TRS $G_{\gamma_{min}}$ および項集合 $T_{G_{\gamma_{min}}}$ をこの章でも使用する．$\leftrightarrow_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ を定義 4.9 と同様の方法で以下に定義する．

定義 5.4 関係 $\leftrightarrow_i \subseteq \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})^2 (i \geq 0)$ を次のように帰納的に定義する．

(1) $i = 0$ のとき，$\leftrightarrow_0 := \{(\alpha, \beta), (\beta, \alpha) \mid \alpha \to \beta \in G_{\gamma_{min}}\}$ とする．

(2) $i > 0$ のとき，$\leftrightarrow_{i-1}$ が定義されないかまたは $\Leftrightarrow_{i-1}^*$ が E 重なり系列を持つならば，$\leftrightarrow_i$ は定義されない．$\leftrightarrow_{i-1}$ が定義され，$\Leftrightarrow_{i-1}^*$ が E 重なり系列を持たないならば，

(2.1) 次の条件 (i)–(iv) を満たす $s, t \in \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ が存在するとき，そのような組 (s, t) を 1 つ選び $\leftrightarrow_i = \{(s, t), (t, s)\}$ とする．

(i) $\mathsf{root}(s) = \mathsf{root}(t)$

(ii) すべての $j \in \{1, \ldots, \mathsf{ar}(\mathsf{root}(s))\}$ について $s_{|j} \Leftrightarrow_{i-1}^* t_{|j}$

(iii) $s \not\Leftrightarrow_{i-1}^* t$

(iv) $\alpha\theta(\overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow}_{i-1} \cup \{(s, t), (t, s)\})^* \alpha\theta'$ を満たすすべての $\alpha\theta \to \beta\theta, \alpha\theta' \to \beta\theta' \in G_{\gamma_{min}}$（ただし，$\alpha \to \beta \in R$）について $\beta\theta \Leftrightarrow_{i-1}^* \beta\theta'$

(2.2) 上記の条件 (i)–(iv) を満たす $s, t \in \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ が存在しないとき，条件 (i)–(iii) と $\mathsf{root}(s) \in D_1$ を満たす組 (s, t) が存在するならば，そのような組 (s, t) を 1 つ選び，$\leftrightarrow_i$ を次のアルゴリズム (2.2) によって求める．

アルゴリズム (2.2)

$\leftrightarrow_i := \{(s, t), (t, s)\}$
while ある $\alpha\theta \to \beta\theta, \alpha\theta' \to \beta\theta' \in G_{\gamma_{min}}$ が存在して，
$\alpha\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow_i^*} \alpha\theta', \beta\theta \not\Leftrightarrow_{i-1}^* \beta\theta'$ かつ
$\beta\theta \not\leftrightarrow_i \beta\theta'$ do
begin
$\leftrightarrow_i := \leftrightarrow_i \cup \{(\beta\theta, \beta\theta'), (\beta\theta', \beta\theta)\}$
end

(2.3) 上記の (2.1) または (2.2) の条件を満たす $s, t \in \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ が存在しないとき，条件 (i)–(iii) と $\mathsf{root}(s) \notin D_1$ を満たす組 (s, t) が存在するならば，そのような組 (s, t) を 1 つ選び，$\leftrightarrow_i$ を次の

アルゴリズム (2.3) によって求める．

アルゴリズム (2.3)

$\leftrightarrow_i := \{(s,t),(t,s)\}$

while ある $\alpha\theta \to \beta\theta, \alpha\theta' \to \beta\theta' \in G_{\gamma_{min}}$

が存在して，

$\alpha\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\Leftrightarrow_i^*} \alpha\theta', \beta\theta \not\Leftrightarrow_{i-1}^* \beta\theta'$ かつ

$\beta\theta \not\leftrightarrow_i \beta\theta'$ do

begin

$\leftrightarrow_i := \leftrightarrow_i \cup \{(\beta\theta,\beta\theta'),(\beta\theta',\beta\theta)\}$

end

条件 (i)–(iii) を満たす $s,t \in \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ が存在しないならば，$\leftrightarrow_i$ は定義されない．

$\mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ が有限集合であることから，$\leftrightarrow_i$ の定義が無限個の i に対して定義されることはない．したがって，$\leftrightarrow_i$ が定義された最大の i を $imax$ とする．定義より，$\Leftrightarrow_{imax-1}^*$ が E 重なり系列を持つことはありえない．

定義 4.9 で定義された関係 $\leftrightarrow_i$，$\Leftrightarrow_i$ に対して補題 4.15 が成立することを示したように，この定義 5.4 で定義された関係 $\leftrightarrow_i$，$\Leftrightarrow_i$ に対して次の補題 5.5 が成立することを示す．

補題 5.5 $i > 0$ とする．このとき，$\Leftrightarrow_{i-1}^*$ が E 重なり系列を持たないとき，任意の $s,t \in \mathsf{Sub}(T_{G_{\gamma_{min}}})$ について $s \leftrightarrow_i t$ ならば，$\mathsf{root}(s) = \mathsf{root}(t)$ かつ任意の $k \in \{1,\ldots,\mathsf{ar}(\mathsf{root}(s))\}$ について $s_{|k} \Leftrightarrow_{i-1}^* t_{|k}$．

証明 i に関する帰納法で証明する．

$i = 1$ のときは $i \geq 2$ と同様に証明できるので，省略する．$i \geq 2$ の場合を証明する．$s \leftrightarrow_i t$ が (2.1) または (2.2) で定義されたときは補題 4.15 の証明と同じであるので，ここでは (2.3) で定義された場合についてのみ証明する．$\leftrightarrow_i = \{(s',t'),(t',s'),(\beta_1\theta_1,\beta_1\theta_1'),(\beta_1\theta_1',\beta_1\theta_1),\ldots,(\beta_l\theta_l,\beta_l\theta_l'),(\beta_l\theta_l',\beta_l\theta_l)\}$ とする．ただし，(s',t')，(t',s') は最初に追加される要素，$(\beta_1\theta_1,\beta_1\theta_1'),(\beta_1\theta_1',\beta_1\theta_1),\ldots,(\beta_l\theta_l,\beta_l\theta_l'),(\beta_l\theta_l',\beta_l\theta_l)$ は while 文の中で追加される要素で，追加された順番に並んでいるものとする．$(s,t) = (s',t')$ もしくは (t',s') ならば，定義より明らかにこの補題が成立する．$(s,t) = (\beta_1\theta_1,\beta_1\theta_1')$ のとき，ある $\alpha_1 \to \beta_1 \in R$ と系列

$$\gamma : \alpha_1\theta_1(= p_0) \leftrightarrow_{j_0} p_1 \leftrightarrow_{j_1} p_2 \ldots \leftrightarrow_{j_n} \alpha_1\theta_1'(= p_n)$$

が存在して，$\min(j_0,j_1,\ldots,j_n) > 0$ かつ $\max(j_0,j_1,\ldots,j_n) \leq i$ を満たす．$j_k = i$ ならば，$(p_k,p_{k+1}) = (s',t')$ または (t',s') となる．帰納法の仮定より，任意の $k \in \{1,\ldots,\mathsf{ar}(\mathsf{root}(\alpha_1))\}$ について系列 $\delta_k : \alpha_1\theta_{1|k} \leftrightarrow_{j_0-1}^* p_{1|k} \leftrightarrow_{j_1-1}^* p_{2|k} \cdots \Leftrightarrow_{j_n-1}^* \alpha_1\theta_{1|k}'$，すなわち

$$\delta_k : \alpha_1\theta_{1|k} \Leftrightarrow_{i-1}^* \alpha_1\theta_{1|k}'$$

が存在する．$k \notin O_X(\alpha_1)$ のとき，δ_k として $\mathsf{size}(\delta_k)$ の最小のものを選ぶと，系 4.14 と同様に $0 \notin \mathsf{size}(\delta_k)$．この γ から（γ のカット系列）δ_k を求めるプロセスを（必要ならば）δ_k に適用して，δ_k のカット系列を求めることを繰り返すことにより，任意の $u \in O_X(\alpha_1)$ について，ある $i' < i$ と系列 $\delta_u : \alpha_1\theta_{1|u} \Leftrightarrow_{i'}^* \alpha_1\theta_{1|u}'$ が存在する．したがって，$\beta_1 \in X$ ならば，(2.3) の場合として追加されることはない．よって，$\beta_1 \notin X$．したがって，$\mathsf{root}(\beta_1\theta_1) = \mathsf{root}(\beta_1\theta_1')$．

また，任意の $w \in \mathcal{O}_F(\beta_1) \setminus \{\varepsilon\}$ について，ある i'' が存在し，$i' \leq i'' < i$ と $\beta_1\theta_{1|w} \Leftrightarrow_{i''}^* \beta_1\theta_{1|w}'$ が成立する．ここで，$i'' < i$ が成立するのは次のことによる．$\beta_{1|w}$ が定項ならば $\beta_1\theta_1 = \beta_1\theta_1'$ が成立する．そうでないとき，β_1 は 2 層より，$\beta_{1|w}$ の根から変数へのパス中に出現する関数記号は C または D_1 に属する．したがって，対 $(\beta_1\theta_{1|w},\beta_1\theta_{1|w}')$ は (2.1) と (2.2) を繰り返すことにより得られ，この場合の定義は (2.3) の定義 $\leftrightarrow_i$ に先行して行われる．したがって $i'' < i$ が成立する．ゆえに，任意の $k \in \{1,\ldots,\mathsf{ar}(\mathsf{root}(\beta_1))\}$ について $\beta_1\theta_{1|k} \Leftrightarrow_{i-1}^* \beta_1\theta_{1|k}'$ が成立する．対 $(\beta_j\theta_j,\beta_j\theta_j'),(\beta_j\theta_j',\beta_j\theta_j)$（$1 < j \leq l$）に対しても同様に証明することができる． □

前章で補題 4.15 を用いて，補題 4.16，4.17 を示したように，補題 5.5 を用いて，これらの補題と同様の補題を示すことができる．したがって，次の定理を得る．

定理 5.6 2 層 TRS において非 ω 重なりならば，非 E 重なりである． □

一般に，k（> 0）層 TRS についても非 ω 重なりならば，非 E 重なりであるという結果を得ることができるが，紙面の都合上，証明は割愛し，ここでは k（> 0）層 TRS の定義を述べるだけにとどめる．

定義 5.7 定義記号の集合 D_R が集合 $D_1,\ldots,D_l$ に分割されたとする（すなわち，$D_R = \bigcup_{i=1}^{l} D_i$ かつ $i \neq j$ ならば $D_i \cap D_j = \emptyset$）．項 s が k **層**（ただし，$1 \leq k \leq l$）であるとは，$\mathsf{root}(s) \in C \cup D_1 \cup \cdots \cup D_k$ かつ，任意の $i \in \{1,\ldots,\mathsf{ar}(\mathsf{root}(s))\}$ に対して，$s_{|i}$ 中の任意の定義記号 f が $f \in D_1 \cup \cdots \cup D_{k-1}$ を満たすか，または $s_{|i}$ の定項の部分項に出現するときである．ここで，C は定義記号でない関数記号の集合である．

k（≥ 1）層 TRS R は次のように定義される．

定義 5.8 TRS R の定義記号の集合 D_R の分割 $D_1,\ldots,D_k$（すなわち，$D_R = \bigcup_{i=1}^{k} D_i$ かつ $i \neq j$ ならば $D_i \cap D_j = \emptyset$）が存在して，すべての規則 $\alpha \to \beta \in R$ に対して次の条件 (1) または (2) が成立するとき，R は k **層**である．

(1) β は定項または変数である．

(2) $\mathsf{root}(\alpha) \in D_j$ かつ β が j 層である $j \in \{1,\ldots,k\}$ が存在する．

k（> 1）層 TRS を総称して**多層 TRS** とよぶ．

6. 弱単項 TRS における諸問題の決定不能性

この章では，弱単項 TRS における停止性，到達可能性，項合流可能性，CR 性，E 重なり性がそれぞれ決定不能であることをチューリング機械の停止性問題を利用して証明する．チューリング機械の実例を $M = (Q, \Gamma, B, \Sigma, \delta, q_0, q_a)$ とする．ここで，Q，Γ，Σ はそれぞれ状態，テープ記号，入力記号の有限集合であり，B はブランク記号で，$B \in \Gamma$ かつ $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{B\}$ が成立する．$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times (\Gamma \setminus \{B\}) \times \{left, right\}$ は遷移関数，q_0 と q_a はそれぞれ初期状態と受理状態である．このチューリング機械は決定性であり，q_0 から開始して δ の規則に従って遷移を行い q_a になったときに停止し，受理状態にならない限りは必ず遷移を続けるものとする．現在の入力テープの内容が $st \in \Gamma^*$，状態が $q \in Q$ で，テープのヘッドが t の先頭にあるとき，計算状況を sqt と書く．ただし，s の左側および t の右側にはブランク記号が無限個続くものと仮定している．したがって，入力がブランクテープで q_0 から開始する遷移がいつか停止すること（チューリング機械のブランクテープ停止問題）と，ある $s, t \in \Gamma^*$ が存在して $q_0 \to_\delta^* sq_at$ が成立することは等価であり，これらはいずれも決定不能であることが知られている．

チューリング機械 M に対応する TRS R_M は，文献 [5] の p.27 に示されているものを基に構成する．$F_0 = \{\$, c_a\}, F_1 = \Gamma, F_2 = Q, F = F_0 \cup F_1 \cup F_2$ とし，

$$
\begin{aligned}
R_M = \{&q(x, a(y)) \to q'(a'(x), y) \mid \delta(q, a) = (q', a', right),\\
&\quad q \neq q_a, q, q' \in Q, a, a' \in \Gamma\}\\
\cup\{&q(x, \$) \to q'(a'(x), \$) \mid \delta(q, B) = (q', a', right),\\
&\quad q \neq q_a, q, q' \in Q, a' \in \Gamma\}\\
\cup\{&q(b(x), a(y)) \to q'(x, b(a'(y))) \mid \delta(q, a) = (q', a', left),\\
&\quad q \neq q_a, q, q' \in Q, a, a', b \in \Gamma\}\\
\cup\{&q(\$, a(y)) \to q'(\$, B(a'(y))) \mid \delta(q, a) = (q', a', left),\\
&\quad q \neq q_a, q, q' \in Q, a, a' \in \Gamma\}\\
\cup\{&q(b(x), \$) \to q'(x, b(a'(\$))) \mid \delta(q, B) = (q', a', left),\\
&\quad q \neq q_a, q, q' \in Q, a', b \in \Gamma\}\\
\cup\{&q(\$, \$) \to q'(\$, B(a'(\$))) \mid \delta(q, B) = (q', a', left),\\
&\quad q \neq q_a, q, q' \in Q, a' \in \Gamma\}\\
\cup\{&q_a(x, y) \to c_a\}
\end{aligned}
$$

\$ はチューリング機械の端記号を意味しており，c_a はチューリング機械が受理状態に遷移したときにのみ書き換えられる定数記号である．明らかに R_M は弱単項，線形であり，また，決定性チューリング機械をもとに構成されているので重なりを持たない．よって，R_M は CR 性を満たしている [1]．

全単射関数 $\phi : T(\emptyset, \{\$\} \cup F_1) \to \Gamma^*$ を次のとおり定義する：$\phi(\$) = B$，$\phi(a(s')) = a\phi(s')$．項 $q(s, t)$ はチューリング機械の計算状況 $\phi(s)^R q \phi(t)$ を表している．ただし，r^R は r の逆順を表す．

補題 6.1 [5] 任意の $q, q' \in Q$ と $s, t, s', t' \in T(\emptyset, \{\$\} \cup F_1)$ について，

$$q(s, t) \to_{R_M} q'(s', t') \iff \phi(s)^R q \phi(t) \to_\delta \phi(s')^R q' \phi(t')$$

□

定理 6.2 線形かつ CR 性を満たす弱単項 TRS における SN 性は決定不能である．

証明 文献 [5] 参照. □

補題 6.3 $q_0(\$, \$) \to_{R_M}^* c_a \iff$ ある $s, t \in \Gamma^*$ が存在して $q_0 \to_\delta^* sq_at$.

証明 $(\Rightarrow)$ R_M の定義より，ある s', t' が存在して $q_0(\$, \$) \to_{R_M}^* q_a(s', t') \to_{R_M} c_a$ が成立する．補題 6.1 より，$q_0 \to_\delta^* \phi(s')^R q_a \phi(t')$.

$(\Leftarrow)$ 補題 6.1 より，$q_0(\$, \$) \to_{R_M}^* q_a(\phi^{-1}(s^R), \phi^{-1}(t))$. R_M の定義より，$q_a(\phi^{-1}(s^R), \phi^{-1}(t)) \to_{R_M} c_a$. □

定理 6.4 線形かつ CR 性を満たす弱単項 TRS における到達可能性，項合流可能性は決定不能である．

証明 補題 6.3 と $q_0 \to^* sq_at$ の決定不能性より，到達可能性 $q_0(\$, \$) \to_{R_M}^* c_a$ は決定不能である．また，c_a は正規形であることから $q_0(\$, \$) \to_{R_M}^* c_a$ は $q_0(\$, \$) \to_{R_M}^* \leftarrow_{R_M}^* c_a$ と等価であるので，項合流可能性も決定不能である． □

定理 6.5 線形な弱単項 TRS における CR 性は決定不能である．

証明 $F_0 = \{\$, c_a, c\}$，$R = \{c \to q_0(\$, \$), c \to c_a\} \cup R_M$ とし，

$$R \text{ が CR 性を満たす} \iff q_0(\$, \$) \to_{R_M}^* c_a$$

を示す．

$(\Rightarrow)$ 明らか.

$(\Leftarrow)$ $q_0(\$, \$) \to_{R_M}^* c_a$ より，$R' = R \setminus \{c \to c_a\}$ とすると，$\leftrightarrow_R^* = \leftrightarrow_{R'}^*$．よって，$s \leftrightarrow_R^* t$ とすると，$s \leftrightarrow_{R'}^* t$．$R'$ は左線形で重なりを持たないことより CR 性を満たす [1], [5]．よって，$s \to_{R'}^* \leftarrow_{R'}^* t$．$R' \subseteq R$ より，R は CR 性を満たす．

したがって，補題 6.3 より，CR 性は決定不能である．□

定理 6.6 弱単項 TRS における E 重なり性は決定不能である．

証明 $F_0 = \{\$, c_a, c\}$，$F_1 = \Gamma \cup \{h\}$，$F_2 = Q \cup \{g\}$，$R = \{g(x, x) \to c, g(h(x), x) \to c, c_a \to h(q_0(\$, \$))\} \cup R_M$ とし，R が E 重なりであることと $q_0(\$, \$) \to_{R_M}^* c_a$ が等価であることを示す．

R が E 重なりであることと $g(x, x)\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\leftrightarrow_R^*} g(h(y), y)\theta$ を満たす代入 θ が存在することは等価である．$g(x, x)\theta \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\leftrightarrow_R^*} g(h(y), y)\theta$ は $x\theta \leftrightarrow_R^* y\theta$ かつ $x\theta \leftrightarrow_R^* h(y\theta)$ と等価であり，また，$y\theta \leftrightarrow_R^* h(y\theta)$ と等価である．これはさらに，

$y\theta \leftrightarrow^*_R c_a \leftrightarrow^*_R h(y\theta)$ かつ $q_0(\$,\$) \leftrightarrow^*_R y\theta$（すなわち，$c_a \leftrightarrow^*_R q_0(\$,\$)$）と等価であるため，$q_0(\$,\$) \to^*_{R_M} c_a$ と等価であることが示せる．したがって，補題 6.3 より，E 重なり性は決定不能である．□

7. あとがき

本論文では，従来の重み保存的な TRS のクラスとは比較不能な弱単項 TRS のクラスを導入して，このクラスにおいて非 ω 重なりならば非 E 重なりであることを明らかにした．なお，3 章冒頭で述べたように非 ω 重なり性についてはほとんど線形時間で判定できるアルゴリズム [7] が知られているので，UN 性を保証するための効率良く判定可能な十分条件を得ることができた．また，合同閉包アルゴリズムに基づく新しい証明手法を導入して，本論文の結果を得た．さらに，弱単項 TRS を拡張した 2 層 TRS のクラスにおいても同様の結果が得られることを示した．これらの結果は，未解決問題（RTA open problem #79 [2]）に対して部分的な解を与えている．今後の課題としては，今回の証明手法を改善することにより，一般の TRS に対して非 ω 重なりならば非 E 重なりであることを証明する（すなわち，この未解決問題を全面的に解決する）ことがあげられる．

謝辞　本論文を執筆するうえで多くの有益なコメントをいただいた匿名の査読者に，謹んで感謝の意を表します．

参考文献

[1] Baader, F. and Nipkow, T.: *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press (1998).
[2] Dershowitz, N. and Treinen, R.: An On-line Problem Database, Lecture Notes in Computer Science 1379, pp.332–337 (1998).
[3] Gomi, H., Oyamaguchi, M. and Ohta, Y.: On the Church-Rosser Property of Non-E-overlapping and Strongly Depth-Preserving Term Rewriting Systems, *Trans. IPS Japan*, Vol.37, No.12, pp.2147–2160 (1996).
[4] Gomi, H., Oyamaguchi, M. and Ohta, Y.: On the Church-Rosser Property of Root-E-overlapping and Strongly Depth-Preserving Term Rewriting Systems, *Trans. IPS Japan*, Vol.39, No.4, pp.992–1005 (1998).
[5] Klop, J.W.: Term Rewriting Systems, *Handbook of Logic in Computer Science*, Vol.2, pp.1–116 (1992).
[6] Kozen, D.C.: *The Design and Analysis of Algorithms*, Springer-Verlag (1991).
[7] Martelli, A. and Rossi, G.: *Efficient Unification with Infinite Terms in Logic Programming On Fifth Generation Computer Systems*, pp.202–209 (1984).
[8] Matsuura, K., Oyamaguchi, M. and Mitsuhashi, I.: An Extension of E-overlapping Notion in Term Rewriting Systems and its Applications, 情報科学技術フォーラム講演論文集，Vol.7, No.1, pp.89–92 (2008).
[9] Nelson, G. and Oppen, D.C.: Fast Decision Procedures Based on Congruence Closure, *J. ACM*, Vol.27, pp.356–364 (1980).
[10] Ogawa, M. and Ono, S.: On the Uniquely Converging Property of Non-linear Term Rewriting System, Technical Report of IEICE, COMP 89-7, pp.61–70 (1989).
[11] Oyamaguchi, M.: The Church-Rosser Property for Ground Term Rewriting Systems is Decidable, *Theor. Comput. Sci.*, Vol.49, No.1, pp.43–79 (1987).
[12] Sakai, M. and Ogawa, M.: Weakly-Non-Overlapping Non-Collapsing Shallow Term Rewriting Systems are Confluent, *Information Processing Letters*, Vol.110, No.18-19, pp.810–814 (2010).
[13] Terese: *Term Rewriting Systems*, Cambridge University Press (2003).
[14] Toyama, Y. and Oyamaguchi, M.: Conditional Linearization of Non-Duplicating Term Rewriting Systems, *Trans. IEICE*, Vol.E84-D, No.4, pp.439–447 (2001).
[15] Verma, R.M.: Unique Normal Forms for Nonlinear Term Rewriting Systems: Root overlaps, *Symp. on Fundamentals of Computation Theory*, LNCS 1279, pp.452–462 (1997).
[16] 大山口通夫，太田義勝：右定項–項書き換えシステムの合流性について，電子情報通信学会論文誌，Vol.J76-D-I, No.2, pp.39–45 (1993).
[17] 松浦邦博，大山口通夫，太田義勝，小川瑞史：非線形 TRS の E 重なり性について，電子情報通信学会論文誌，Vol.J80-D-I, No.11, pp.847–855 (1997).

付　　録

A.1 削除補題（elimination lemma）

削除補題は文献 [10] で与えられたものであるが，この文献は査読を受けたものではないので，ここでその正確な証明を与える．

定義 A.1.1　並列書き換え列 δ が $\delta : \alpha\sigma \overset{U_0}{\leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\leftrightarrow} \cdots \overset{U_{n-1}}{\leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\leftrightarrow} \alpha\sigma'$ となる形を持つとする．$U = \mathsf{Min}(\bigcup_{i=0}^{n-1} U_i)$ とする．このとき，$\mathsf{size}(\delta)$ を以下のように定義する：$\mathsf{size}(\delta) = \{\#_P(\delta_{|u}) \mid u \in U \cap \mathcal{O}_F(\alpha)\}_m$．

$$\gamma_{min} : \hat{\alpha}_{1|u}\hat{\theta} \overset{U_0}{\leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\leftrightarrow} \cdots \overset{U_{n-1}}{\leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\leftrightarrow} \hat{\alpha}_2\hat{\theta}$$

を並列ステップ数最小の E 重なり系列とするとき，以下の補題が成立する．

補題 A.1.2　ピーク列 $\beta\theta \overset{\varepsilon}{\leftarrow} \alpha\theta(= t_0) \overset{U'_0}{\leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\leftrightarrow} t_1 \cdots \overset{U'_{m-1}}{\leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\leftrightarrow} \alpha\theta'(= t_m) \overset{\varepsilon}{\to} \beta\theta'$ の部分列 $\gamma : \alpha\theta(= t_0) \overset{U'_0}{\leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\leftrightarrow} t_1 \cdots \overset{U'_{m-1}}{\leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\leftrightarrow} \alpha\theta'(= t_m)$ に対して $\#_P(\gamma) < \#_P(\gamma_{min})$ ならばある共通部不変列 $\delta : \alpha\theta(= t_0) \leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\leftrightarrow^* \alpha\theta'(= t_m)$ が存在して $\#_P(\delta) \leq \#_P(\gamma)$ かつ $\mathsf{size}(\delta) = \emptyset$ が成立する．

証明　$(\#_P(\gamma), \mathsf{size}(\gamma))$ に関する帰納法で証明する．$\#_P(\gamma) = 0$ の場合は明らか．$\#_P(\gamma) > 0$ の場合，$\mathsf{size}(\gamma) = \emptyset$ のときは，$\delta := \gamma$ ととればよい．$\mathsf{size}(\gamma) \neq \emptyset$ のとき，$U' = \mathsf{Min}(\bigcup_{i=0}^{m-1} U'_i) \cap \mathcal{O}_F(\alpha) \neq \emptyset$ が成立する．任意の $u \in U'$ について，$\#_P(\gamma_{|u}) < \#_P(\gamma_{min})$ より，$\gamma_{|u} : \alpha_{|u}\theta(= t_{0|u}) \overset{V'_0}{\leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\leftrightarrow} \cdots \overset{V'_{m-1}}{\leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\leftrightarrow} \alpha_{|u}\theta'(= t_{m|u})$ は部分列としてピーク列を持つことを示す．まず，$u \in U'$ より，$V'_i = \{\varepsilon\}$ を満たす $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ が存在する．i を $V'_i = \{\varepsilon\}$ を満たす最小の整数値とすると，$t_{i|u} \overset{\varepsilon}{\leftarrow} t_{i+1|u}$ が成立する（なぜなら，$t_{i|u} \overset{\varepsilon}{\to} t_{i+1|u}$ ならば，$\alpha_{|u}\theta(= t_{0|u}) \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\leftrightarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\leftrightarrow^*} t_{i|u}$ は E 重

なり系列となり，これは γ_{min} の最小性に矛盾する）．i を $V'_i = \{\varepsilon\}$ を満たす最大の整数値とすると，同様の理由により，$t_{i|u} \xrightarrow{\varepsilon} t_{i+1|u}$ が成立する（もし $t_{i|u} \xleftarrow{\varepsilon} t_{i+1|u}$ ならば，$t_{i+1|u} \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\mathrel{\leftarrow\!\!\Vert\!\!\rightarrow}}{}^* \alpha_{|u}\theta'(= t_{m|u})$ は E 重なり系列となり，γ_{min} の最小性に矛盾する）．以上より，$\gamma_{|u}$ は少なくとも 1 つの次の書き換え系列を部分列として持つ．

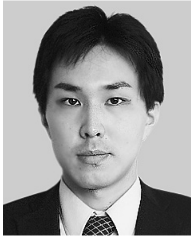
$$
\begin{aligned}
\delta : t_{i|u} &= \beta'\sigma' \xleftarrow{\varepsilon} t_{i+1|u} = \alpha'\sigma' \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\leftrightarrow}{}^* t_{j|u} \\
&= \alpha''\sigma'' \xrightarrow{\varepsilon} t_{j+1|u} = \beta''\sigma''
\end{aligned}
$$

ここで，$i, j \in \{0, \ldots, m-1\}$ $(i \leq j)$，$\alpha' \to \beta', \alpha'' \to \beta'' \in R$，$\sigma', \sigma''$ はある代入である．δ の部分列 $\gamma' : t_{i+1|u} = \alpha'\sigma' \mathrel{\leftarrow\!\!\Vert\!\!\rightarrow} \ldots \mathrel{\leftarrow\!\!\Vert\!\!\rightarrow} t_{j|u} = \alpha''\sigma''$ に対して，$\#_P(\gamma') < \#_P(\gamma_{min})$ が成立するから，γ' は E 重なり系列ではない．すなわち，$(\alpha' \to \beta') = (\alpha'' \to \beta'')$ が成立する．したがって，δ はピーク列である．$\#_P(\gamma') < \#_P(\gamma)$ より，帰納法の仮定を用いて，ある共通部不変列 $\gamma'' : t_{i+1|u} \mathrel{\leftarrow\!\!\Vert\!\!\rightarrow}{}^* t_{j|u}$ が存在して $\#_P(\gamma'') \leq \#_P(\gamma')$ かつ $\mathsf{size}(\gamma'') = \emptyset$ が成立する．したがって，$\gamma'' : \alpha'\sigma' = t_{i+1|u} \mathrel{\leftarrow\!\!\Vert\!\!\rightarrow}{}^* t_{j|u} = \alpha'\sigma''$ に対して，$\mathsf{Minrpos}(\gamma'') \cap \mathcal{O}_F(\alpha') = \emptyset$ なので，任意の $x \in \mathsf{V}(\alpha')$ について，γ'' のカット系列 $\gamma''_x : x\sigma' \mathrel{\leftarrow\!\!\Vert\!\!\rightarrow}{}^* x\sigma''$ が存在し，$\#_P(\gamma''_x) \leq \#_P(\gamma'') \leq \#_P(\gamma')$ が成立する．この γ''_x を用いることにより，$\#_P(\delta') < \#_P(\delta)$ となるピーク除去列 $\delta' : \beta'\sigma' \mathrel{\leftarrow\!\!\Vert\!\!\rightarrow}{}^* \beta'\sigma''$ を構成することができる．γ 中の $\gamma_{|u}$ の部分列 δ を δ' で置き換えることによって得られた系列を $\hat{\gamma}$ とすると，$\#_P(\hat{\gamma}) \leq \#_P(\gamma)$ および $\mathsf{size}(\hat{\gamma}) \ll \mathsf{size}(\gamma)$ が成立する．帰納法の仮定より，$\hat{\gamma}$ に対して，この補題が成立するので，元の γ に対してもこの補題が成立する．□

この補題より，次の削除補題が成立する．

補題 A.1.3　ピーク列 $\gamma : t_0 = \beta\sigma \leftarrow t_1 = \alpha\sigma \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\mathrel{\leftarrow\!\!\Vert\!\!\rightarrow}}{}^* t_{k-1} = \alpha\sigma' \to t_k = \beta\sigma'$ に対して，$\#_P(\gamma) \leq \#_P(\gamma_{min})$ が成立するならば，あるピーク除去列 $\delta : t_0 \mathrel{\leftarrow\!\!\Vert\!\!\rightarrow}{}^* t_k$ が存在して $\#_P(\delta) < \#_P(\gamma)$ が成立する．□

証明　γ の部分列 $\gamma' : t_1 = \alpha\sigma \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\mathrel{\leftarrow\!\!\Vert\!\!\rightarrow}}{}^* t_{k-1} = \alpha\sigma'$ に対して，$\#_P(\gamma') < \#_P(\gamma_{min})$ から，補題 A.1.2 より，ある共通部不変列 $\delta' : t_1 = \alpha\sigma \overset{\varepsilon\text{-}inv}{\mathrel{\leftarrow\!\!\Vert\!\!\rightarrow}}{}^* t_{k-1} = \alpha\sigma'$ が存在して $\#_P(\delta') \leq \#_P(\gamma')$ かつ $\mathsf{size}(\delta') = \emptyset$ が成立する．したがって，任意の $x \in \mathsf{V}(\alpha)$ について，δ' のカット系列 $\delta_x : x\sigma \mathrel{\leftarrow\!\!\Vert\!\!\rightarrow}{}^* x\sigma'$ が存在し，$\#_P(\delta_x) \leq \#_P(\delta') \leq \#_P(\gamma') < \#_P(\gamma)$ が成立する．この δ_x からこの補題を満たすピーク除去列 $\delta : t_0 = \beta\sigma \mathrel{\leftarrow\!\!\Vert\!\!\rightarrow}{}^* \beta\sigma' = t_k$ を構成できるのは明らか．□



三橋 一郎　（正会員）

平成 18 年三重大学大学院博士後期課程修了．博士（工学）．平成 19 年同大学総合情報処理センター助教，現在に至る．項書き換えシステムに関する研究に従事．

大山口 通夫

昭和 52 年東北大学大学院博士課程修了．工学博士．同年名古屋大学助手．昭和 53 年三重大学工学部助教授．平成 2 年同大学教授．平成 24 年名古屋大学招へい教員，現在に至る．理論計算機科学，特に項書き換えシステム，オートマトン・形式言語理論，言語処理系，プログラム意味論，アルゴリズム等に関する研究に従事．

松浦 邦博　（正会員）

平成 5 年三重大学大学院工学研究科修士課程修了．平成 19 年同大学院工学研究科博士後期課程入学，現在に至る．項書き換えシステムに関する研究に従事．