Vol.2012-AL-141 No.3
2012/10/4

ラインダイグラフの無閉路彩色とフィードバック頂点集合

河合 博之[1,a)]

概要：無閉路彩色とは，隣接する 2 頂点が異なる色で割当てられ，かつどの 2 色で誘導される部分グラフも閉路を持たない頂点彩色である．一方フィードバック頂点集合は，それを削除することにより閉路を持たないような頂点集合をいう．ここでは，有向グラフのある辺彩色がそのラインダイグラフの底グラフに対する無閉路彩色を与えることを示し，ラインダイグラフに関連するグラフのクラス（de Bruijn グラフや Kautz グラフ等）の無閉路彩色問題およびフィードバック頂点集合問題について考察する．

キーワード：無閉路彩色，フィードバック頂点集合，ラインダイグラフ, de Bruijn グラフ, Kautz グラフ

Acyclic coloring and feedback vertex set of a line digraph

Hiroyuki Kawai[1,a)]

Abstract: An acyclic coloring of a graph G is a coloring of its vertices, satisfying that no two adjacent vertices are assigned the same color and no two colors induce a cycle in G. A feedback vertex set of a graph G is a subuset S of $V(G)$ such that $V(G) \setminus S$ induces an acyclic subgraph. There are some types of arc-colorings of a digraph in terms of adjacency. In this report, it is shown that a kind of arc-cloring of a digraph gives a acyclic coloring of an underlying graph of a line dgraph. Then, we consider the problem of acyclic coloring and feedback vertex set of graphs related to line digraphs such as de Bruijn graphs or Kautz graphs.

Keywords: acyclic coloring, feedback vertex set, line digraph, de Bruijn graph, Kautz graph

1. 有向グラフの彩色

グラフの彩色とは，その要素である頂点や辺に対する色の割当てであり，一般にその隣接性が彩色条件とされる．つまり，二つの隣接している頂点（辺）は異なる色で塗る，ということである．無向グラフに関しては頂点または辺の隣接関係が明確である一方，有向グラフの辺彩色の条件となる隣接性は，有向辺の向きを考慮することによっていくつかのタイプに分類できる．いま C を色集合とし，有向グラフ $D = (V, E)$ の辺彩色 $f : E \to C$ を考える．任意の異なる二つの有向辺 $(u, v), (w, x) \in E(D)$ を異なる色で割当てる，つまり $f(u, v) \neq f(w, x)$ となるための条件として，次の三つの隣接性を定義することができる．

(1) $v = w$ のとき （連続する有向辺）

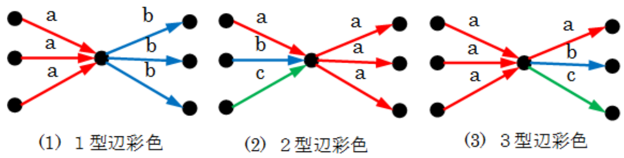

図 1 有向辺彩色の三つの型
Fig. 1 Three types of arc-colorings

(2) $v = x$ のとき （各頂点に入ってくる有向辺）
(3) $u = w$ のとき （各頂点から出ていく有向辺）

図 1 に有向辺彩色の基本となる三つの型を示す．さらに，これら三つの型を組合わせることで有向グラフの辺彩色は 7 つの型に分類される．これまでの研究において例えば，[2], [5], [8] では 1 型辺彩色を，[6] は 1–2 型，[1] は 2–3 型，そして [7] は 2 型辺彩色を扱っている．

有向グラフ D のラインダイグラフ $L(D)$ とは，頂点集合として D の有向辺集合 $E(D)$ を持ち，頂点 (u, v) から頂

1 函館工業高等専門学校情報工学科
Hakodate National College of Technology
a) hkawai@hakodate-ct.ac.jp

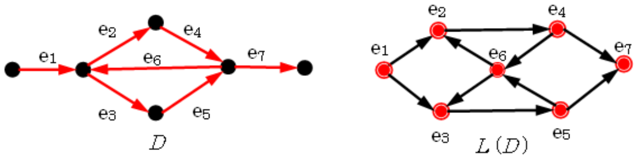

図 2 有向グラフ D とそのラインダイグラフ $L(D)$
Fig. 2 A digraph D and its line digraph $L(D)$

点 (v, w) へ有向辺をもつ有向グラフである（**図 2**）．つまり，D の二つの連続する有向辺が $L(D)$ において隣接する 2 頂点となる．この定義から有向グラフ D の 1 型辺彩色は $L(D)$ の頂点彩色に対応することがわかる．無向グラフ G の無閉路彩色とは，隣接する 2 頂点は異なる色で割当てられ，かつどの 2 色から誘導される部分グラフも閉路を持たない G の頂点彩色である．同様に有向グラフ D に対しても有向閉路を持たないとする D の無閉路彩色の定義が可能である．また，有向グラフ D の無閉路辺彩色は，その辺彩色のタイプによって i 型無閉路辺彩色,$1 \leq i \leq 7$ として導入される．本研究では，有向グラフの 1–2 型の辺彩色を 4 型と呼び，有向グラフの 4 型無閉路辺彩色を扱う．

2. $L(D)$ のフィードバック頂点集合

グラフ $G = (V, E)$ のフィードバック頂点集合（FVS）とは，$V \setminus S$ が誘導する G の部分グラフが閉路を持たない V の部分集合 S である．G の最小のフィードバック頂点集合を求める問題は一般に NP 困難であるため，さまざまなグラフの族に対しての研究がなされている [4], [9], [10]．グラフの無閉路彩色とフィードバック頂点集合の関係は [3] によって研究された．例えば，グラフ G が 3 色で無閉路彩色可能ならば G は高々 $|V|/3$ 頂点のフィードバック頂点集合を持つ．なぜなら，任意の 1 色を除去することによって G は閉路を持たないからである．次の補題は，有向グラフ D の 4 型無閉路辺彩色とそのラインダイグラフ $L(D)$ の無閉路彩色の関係を示している．ここで，有向グラフ D に対し $U(D)$ は D の底グラフを表す．

補題 1 D を自己ループを許す有向グラフとする．このとき，D が k 色の 4 型無閉路辺彩色を持つならば，$U(L(D))$ は k 色で無閉路彩色可能である．ただし，出次数 0 の頂点に入ってくる辺の色に制限はないものとする．さらに $L(D)$ もまた k 色の 4 型無閉路辺彩色を持つ．

証明 有向グラフ D が k 色の 4 型無閉路辺彩色 f を持つものとする．明らかに f は $U(L(D))$ の k 色頂点彩色である．今 $U(L(D))$ の任意の閉路を C とし，C に対応する $L(D)$ の部分有向グラフを C' とする．C' が有向閉路とすると C' の頂点は 3 色以上で塗られているため 2 色では誘導されない．C' が有向閉路ではないとすると，C' には $(u, v), (w, v) \in E(D)$ なる異なる 3 頂点 u, v, w が存在し，それらは 3 色で塗られている．また，D の出次数 0 の頂点に入ってくる辺は C' には含まれない．したがって，f による $L(D)$ の頂点彩色は無閉路彩色である．自己ループではない $L(D)$ の辺 (u, v) に対し，$f'(u, v) = u$ とする．自己ループ (v, v) は $(v, w) \in E(L(D))$ なる頂点 w が存在すれば $f'(v, v) = f(w)$，存在しなければ $f'(v, v) = f(v)$ とする．このとき，f' は $L(D)$ の 4 型辺彩色である． ∎

ラインダイグラフの底グラフ $U(L(D))$ のフィードバック頂点集合は，補題 1 を応用することで求めることができる．つまり，ダイグラフ D の部分有向グラフの辺を 2 色で 4 型辺彩色すれば，この 2 色に対応する頂点集合が $U(L(D))$ のフィードバック頂点集合となる．

3. de Bruijn, Kautz グラフの FVS

de Bruijn ダイグラフ $B(d, D)$ と Kautz ダイグラフ $K(d, D)$ は，ラインダイグラフの族であり，$B(d, D) = L^{D-1}(K_d^+)$,$K(d, D) = L^{D-1}(K_{d+1}^*)$ として定義される．ここで，K_d^+ と K_d^* はそれぞれ完全ダイグラフと完全対称ダイグラフを表す．de Bruijn グラフと Kautz グラフのフィードバック頂点集合はそれぞれ [10],[9] で研究されている．$U(B(d, D))$ と $U(K(d, D))$ のフィードバック頂点集合は，補題 1 をそれぞれ，$B(d, D-1)$,$K(d, D-1)$ に適切に応用することにより得ることができ，[9], [10] の結果を改善することができる．

参考文献

[1] Bermond, J.C., and Hell, P.: On even factorization and the chromatic index of the Kautz and de Bruijn digraphs, *J. Graph Theory*, Vol. 17, No. 5, pp. 647–655 (1993).

[2] Bessy, S., Havet, F., and Birmelé E.: Arc-chromatic number of digraphs in which each vertex has bounded outdegree or bounded indegree, *J. Graph Theory*, Vol. 53, No. 4, pp. 315–332 (2006).

[3] Fertin, G., Godard, E., and Raspaud, A.: Minimum feedback vertex set and acyclic coloring, *Information Processing Letters*, Vol. 84, pp. 131–139 (2002).

[4] Focardi, R., Luccio, F.L., and Peleg, D.: Feedback vertex set in hypercubes, *Information Processing Letters*, Vol. 76, pp. 1–5 (2000).

[5] Harner, C.C., and Entringer, R.C.: Arc coloring of digraphs, *J. Combininatorial Theory B*, Vol. 13, pp. 219–225 (1972).

[6] Hasunuma, T.: Embedding iterated line digraphs in books, *Networks*, Vol. 40, No. 2, pp. 51–62 (2002).

[7] Kawai, H., Fujikake, N., and Shibata, Y.: Factorization of de Bruijn digraphs by cycle-rooted trees, *Information Processing Letters*, Vol. 77, No. 5–6, pp. 269–275 (2001).

[8] Kawai, H., and Shibata, Y.: The chromatic number and the chromatic index of de Bruijn and Kautz digraphs, *Trans. IEICE*, Vol. E85–A, No. 6, pp. 1352–1358 (2002).

[9] Xu, X.-R., Wang, J., Xu, J.-M., and Cao, Y.-C.: Feedback numbers of Kautz undirected graphs, *Australasian J. combinatorics*, Vol. 52, pp. 3–9 (2012).

[10] Xu, X.-R., Xu, J.-M., and Cao, Y.-C.: Bounds on feedback numbers of de Bruijn graphs, *Taiwanese J. Math.*, Vol. 15, No. 3, pp. 1101–1113 (2011).