空 間 回 路 網*

小 川 英 光** 五 十 嵐 彰** 飯 島 泰 蔵**

Abstract

The information science consists of the next three parts:

(i) the elucidation of information phenomena,

(ii) the construction of information theories,

(iii) the development of information processing systems.

This is the paper aimed at (iii) on the basis of (ii).

In this paper, new information processing systems, which are named "spatial networks", are proposed as an alternative to digital computers in the region such as pattern recognition.

First of all, signals, which support the information, and the function of the information processing are formulated mathematically. As a natural result of it, we have obtained spatial networks which process information parallely with analog elements. They can deal with not only algebraic but also topological information of signals.

1. ま え が き

現在驚異的発展を遂げつつあるディジタル計算機の特徴は，扱う内容をすべて論理的代数的演算に変換し，それらを逐次に直列的に処理する装置である，ということころにある．一方，人間の大脳が行なう情報処理には，論理的演算の他に，情緒的で，並列的で，しかも非確定的なものがある．パターン認識等の問題は，この領域に属するものである．そして，真の人工知能実現のためには，この後者の情報処理機能についての研究が，非常に重要になってくる[(1)]．

この問題に対する接近の仕方には，いくつかある．それを見るために，情報科学の構造について考えてみよう．情報科学は次の三つの分野から構成されている[(2)]：

(i) 情報現象の解明，

(ii) 情報理論の建設，

(iii) 情報方式の開発．

図形認識を例にとって，これを説明する．図形そのものの性質を調べて，図形の本質と思われるものを浮き出させるのが(i)である．(ii)は，(i)で得られた成果をもとにして，図形とは何か，図形認識に必要な情報処理機能とは何か，を体系化してゆく段階である．(iii)は，(ii)で明らかにされた情報処理機能を，実際に金物で実現するためにはどうすればよいか，を論じるところである．

そして，(iii)にしたがって作られた装置を使うことにより，(i)の図形の性質がよりはっきりとしてくるし，この装置を，大脳の働きの図形認識という側面でのモデルとみることにより，大脳の情報処理機構も理解しやすくなるであろう．これは(iii)から(i)への作用であるが，そうすることによって，(ii)の理論の外的正当化も行なわれるであろう．

このように，(i)～(iii)の間には非常に密接な関係があり，この三つの分野が互いに相互作用をおよぼしあって初めて，情報科学が情報科学として発展しうるのである．逆にいえば，この三つの分野のうちどの一つが欠けても，完全な発展は望まれないのである．バイオニクスの研究は，(i)の領域に属する．(i)の立場を基礎にして(ii)を論じているものに，飯島のパターン認識の理論がある[(3)]．(i)の立場を基礎にして(iii)へ進もうとするものに，生体の情報処理機構を工学的観点から模疑してゆく研究がある[(4)]．そして，(ii)の立場を基礎にして(iii)を論じるのが，本論文で述べる新しい情報処理方式—空間回路網—である．

空間回路網の背景となっている思想について，次に簡単に述べる．われわれがパターン認識等で扱う図形

* Spatial Networks, by Hidemitsu Ogawa, Akira Igarashi and Taizo Iijima (Electrotechincal Laboratory).

** 電子技術総合研究所， 飯島特別研究室．

集合は，無限に多くの要素でできているので，この集合の構造を調べるために，すべての要素を一つ一つ調べあげることはできない．われわれにできることは，適当に選ばれた有限個の標本から，もとの集合全体の構造がある精度で推定できるような方法を採用することである．そのためには，一つの要素について調べたことが，その近くにある要素について成立することが必要となる．逆にいえば，そのような性質，すなわち，その集合の代数的性質ばかりでなく，位相的性質をも情報処理のために利用しなければいけないのである．このように，代数的情報と位相的情報を共に扱えるような情報処理システムを**空間回路網**と名づける．

2. 情報処理の数学的定式化

2.1 信号空間

あるものについて何かを知ろうとする場合には，そのものだけを調べるよりも，他のものとの関係において理解する方が，はるかにわかりやすい．情報という問題を扱うときには特にそうである．つまり，物事は内包的によりも外延的に捕える方がわかりやすいのである．たとえば数学で，″関数 f が連続である″ というときに，わざわざ連続関数の全体 C を考え，″$f \in C$″ と書くのは，そのためである[21]．

そこで本節では，情報を担う信号というものを数学的に定式化するために，これらの信号が作る集合を考え，その集合に属する元として信号を定義することにする．では，その集合として，どのような集合を採用すればよいであろうか．すなわち，信号空間の元として情報を担う信号を定義するのであるが，その信号空間とはどのような空間であろうか．以下にそれを述べる．

二つの図形 f_1，f_2 が与えられたとき，この二つの図形を重ねあわせたものはまた一つの図形となる．それを f_1+f_2 とすれば

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x) \qquad (1)$$

となる．また図形 f の明るさを a 倍したものも一つの図形である．それを af とすれば

$$(af)(x)=af(x) \qquad (2)$$

となる．

そこで，ある領域に描きうるすべての図形の集合を $\mathfrak{H}$ とすれば，$\mathfrak{H}$ に属する任意の図形に対して，加法演算と正数倍の演算とが，それぞれ式(1)，(2)によって定義されることになる．しかも，黒地に白い図形を描くばかりでなく，白地に黒い図形を描く場合をも考えれば，式(2)は全ての実数 a に対して定義されるから，この二つの演算に対して $\mathfrak{H}$ が実線形空間になっていることがわかる．

次に，$\mathfrak{H}$ に属する一つの図形 f を考える．この図形に何かの拍子にノイズが加わって，少し異なった図形 f' になることがある．この場合 f と f' を全く別の図形と見ることもできる．しかし，パターン認識の立場からすれば，これは本来同じものであるから，同じ図形あるいは近い図形とみなす方が自然であろう．すなわち，f' は f の近くにあるのである．こうして，図形に対しても近さの概念が生まれる．数学ではこれを近傍という．そして，近傍の概念が導入された集合を位相空間という．

ところで，位相空間を規定する近傍の公理をみれば，一点 f の近傍は，この点の近さの状態，すなわち位相を規定しているが，二点 f，g の相互の関係については何も触れていない．したがって，これだけでは，位相的性質といっても，一点とその近傍とで定まるような性質を扱っているのであって，他の点との近さというような関係は出てこない．この意味からいえば，位相空間は空間の極端に細部の性質，いわゆる局所的性質を規定していることになる(19)．

このような位相空間に対して，二点の近さとか，もっと進んで，いわゆる大局的な性質を調べてゆくために，ハウスドルフの分離公理と呼ばれるものについて考える．二つの異なる図形 f, g をとる．この場合にも，それぞれ f および g の近傍というものが考えられる．そして，次第に細かく見てゆけば，f の近傍と g の近傍の両方に属するような図形を排除することができるであろう．このように，位相空間のどんな二点に対しても，それぞれの近傍で互いに交わらないものが存在するとき，その位相空間はハウスドルフ空間と呼ばれる．

さらに，f の近くにある f' と，g の近くにある g' に対して，$f'+g'$ という図形を式(1)によって考えることができるが，$f'+g'$ は $f+g$ の近くにあると考えられる．同様に，数 a の近くにある数 a' に対して，$a'f'$ という図形を式(2)によって考えることができるが，この $a'f'$ も af の近くにあると考えられる．

以上のことをまとめれば，図形集合 $\mathfrak{H}$ は，次の四つの条件を満足していることがわかる．

1)　$\mathfrak{H}$ は線形空間である．
2)　$\mathfrak{H}$ はハウスドルフ空間である．
3)　f, g の和 $f+g$ は，二変数 f, g の関数として連続である．
4)　f と数 a との積 af は，二変数 a, f の関数として連続である．

1) は $\mathfrak{H}$ の代数的構造を表わし，2) は $\mathfrak{H}$ の位相的構造を表わしている．そして 3)，4) は，この二つの構造が互いに調和していることを示している．1)～4) を満足する集合 $\mathfrak{H}$ は，位相線形空間と呼ばれる[20]．以上図形集合が位相線形空間になることを見てきた．

しかし，すべての信号空間が位相線形空間になるとは限らない．たとえば学習の問題では，情報処理機能自身の集合を一つの信号空間と考えなければいけないのであるが，この場合，上記ハウスドルフの分離公理が満たされない場合が生じる†．

そこで一般的には，**信号空間**をある種の位相空間とみなすことにする．そして，個々の問題に応じて適当な近傍を定義し，位相空間の範囲をさらに狭めてゆくことにする．

2・2　情報処理機能の定式化

前節で，情報を担う信号の数学的定式化を行なった．パターン認識理論を建設したり，情報処理装置を設計する問題を扱うために次にしなければいけないことは〃情報処理〃そのもの，あるいは〃情報処理機能〃というものを数学的に定式化することである．

そこで再び，パターン認識を例にとって考察を進める．情報科学の立場からすれば，パターン認識とは外界に提示されたパターンを，それが属する概念に対応づけることである，と定義される．さらに，各概念に対応して標準パターンというものが少なくとも 1 個考えられるから，パターン認識とは，与えられたパターンを，それが属する概念に対応する標準パターンに対応づける操作である，ということができる．

ところで前節において，情報を担う信号を位相空間の元として定式化したから，ここでは，情報処理というものを，ある位相空間の元をある位相空間の適当な元に変換する操作である，と定義する．そうすれば，この変換を行なうもの，すなわち，ある位相空間からある位相空間への作用素が，その**情報処理機能**を表わしていることになる．

そして，この作用素をできるだけ素直に金物で実現すれば，それはこの作用素と同じ働き，すなわち，代数的処理だけでなく，位相的処理も行なうことができるシステムとなるのである．そのための設計および解析理論を**空間回路網理論**という．

† 電子技術総合研究所の磯道技官の指摘による．

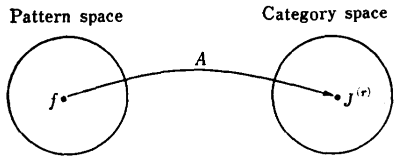

Fig. 1　Formulation of the pattern recognition

さて，真のパターン認識をしようと思えば，一つ一つのパターンだけでなく，そのパターンが属する空間全体の構造を知らなければいけない．同様に，より優れた情報処理装置を設計したり，あるいは，情報処理機能そのものについて論じようと思えば，一つの情報処理機能（一つの作用素）に着目するだけでなく，その情報処理機能の属する空間（以下これを**機能空間**という）全体の構造を知らなければいけない†．すなわち情報処理機能に対しても，外延的記述が重要になってくる．本論文でもこのような見方がなされているが，文献(13)では，特にこの考え方が有効な働きをしている．

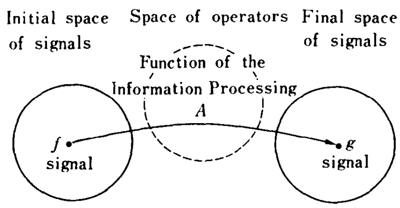

Fig. 2　Formulation of the information processing

3.　情報処理機能の表現

2.1 で信号を位相空間の元として定義した．ところで，近傍の定義にはいろいろある．たとえば，f の近傍は f だけであるという定義もあるし，f の近傍は $\mathfrak{H}$ 全体であるという定義もある．このように，非常に細かい位相から，非常に粗い位相までいろいろの段階がある．しかし，一般的に位相を定義しておいて，ある問題に対してはこの位相の入れ方が最適である，というように具体的な形を決定する手段は，数学の世界においてもまだ得られていない．数学の世界では，ア

† 数学では，作用素環といった分野がこれに対応している．

プリオリに特定の位相を定義して，その特定の位相に対しては，いろいろと細かい性質が調べられているという段階である．そこで，われわれとしては，図形のもっともらしいいくつかの性質を基にして，直観的に位相を与えなければならないのである．

2.1 でもこのような立場から図形集合の性質を調べ，それが位相線形空間になることを見てきた．しかし，これだけではまだ広すぎて，細かい議論を展開しにくい．また，初めから範囲を広げすぎると，方向を見失うおそれがあるので，ここでは，信号空間として，位相線形空間の特殊な場合であるヒルベルト空間を採用することにする．

外界にある図形は実数値関数として表わされるけれども，脳の奥深くにはいってゆけば，それは複素数値関数に変換されているかも知れない．また理論を展開するうえからいっても，実数値関数だけに限るよりも，複素数値関数まで広げておく方が，より簡潔な理論展開ができる．さらに，われわれが通常扱っている図形は，二次元平面上に描かれているが，数式を簡単化して理解しやすくするために，また，現実の空間回路網が有限領域しか扱えないということから，ここでは，**信号空間**として複素ヒルベルト空間 $L_2[-l,l]$（略して L_2 と書くことがある）を採用することにする．

空間 $L_2[-l,l]$ は，有限区間 $[-l,l]$ で定義された二乗可積分関数，すなわち，ノルム有限の条件

$$\|f\|^2 \equiv \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx < \infty \qquad (3)$$

を満たす関数の全体であって，f の近傍 $U(f)$ は

$$U(f) \equiv \{g \mid \|f-g\| < \varepsilon;\ g \in L_2\} \qquad (4)$$

によって定義される．また任意の $f, g \in L_2$ に対して，内積と呼ばれる次の演算が定義されている．

$$(f, g) \equiv \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\bar{g}(x)dx \qquad (5)$$

信号空間として L_2 を採用したから，**2.2** の定義により，L_2 からある位相空間への作用素が情報処理機能を表わすことになる．しかし，ここではさらに限定して，**機能空間**を，L_2 から L_2 への有界線形作用素の全体 $\mathfrak{B}$ とする．

3.1 基本座標系

空間 $L_2[-l,l]$ における完全正規直交系を $\{\varphi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ とする．任意の $f, g \in L_2$ は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \varphi_n(x),\ f_n \equiv (f, \varphi_n) \qquad (6)$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \varphi_n(x),\ g_n \equiv (g, \varphi_n) \qquad (7)$$

と一意に展開される．しかも

$$(f, g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \bar{g}_n \qquad (8)$$

となる．特に

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 \qquad (9)$$

である．これをパーセヴァルの等式という．式(9)の右辺の級数が有限になるような，可算無限個の成分でできているベクトルの全体を l_2 で表わせば，逆に，任意の元 $(f_n) \in l_2$ に対して，式(6)にしたがって作られた f は L_2 の元となる．しかも，式(8)(9)の関係があるから，空間 l_2 は $L_2[-l,l]$ と全く同じ空間であると考えることができる．

ところで，光学系あるいは立体回路を用いない限りすなわち，集中定数回路で空間回路網を構成しようとする限り，情報処理機能を離散的な形で表わしておいた方がよい．そのためには，信号空間として L_2 のかわりに l_2 を用いる方がよいことが，上述のことからわかるであろう．

この場合，L_2 の上の作用素は，l_2 の上では無限次元行列の形をとる．すなわち，$f \in L_2$ を $g \in L_2$ に変換する作用素を A とするとき，

$$g = Af \qquad (10)$$

となるが，これを離散的な形で表わせば，

$$g_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} f_n \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (11)$$

となる．ここで

$$f_n \equiv (f, \varphi_n),\ g_n \equiv (g, \varphi_n),\ a_{m,n} \equiv (A\varphi_n, \varphi_m) \qquad (12)$$

である．

このように，A と行列 $(a_{m,n})$ とは全く同じ情報処理機能をもっていて，ただその見掛けの形が異なるだけである．さらに式(12)からわかるように，行列$(a_{m,n})$の形は，座標系$\{\varphi_n\}$のとりかたによって変わる．しかも，座標系の選び方には無限の自由度がある．そこでまずできるだけ簡潔に理論が展開できるように，座標系を選ぶことが望ましい．そのような座標系を**基本座標系**と呼ぶことにする．

たとえば，扱う情報処理機能を，$f(x)$ を $f(x+a)$ に変換する変位作用素 $T(a)$ と可換なものに限る場合には，$T(a)$ の固有関数である

$$\varphi_n(x) = \exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right) (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (13)$$

を基本座標系として採用すれば，行列 $(a_{m,n})$ はすべて対角行列になり，非常に簡単になる．

空間回路網をいくつか結合する場合には，座標系を一つに固定しておく方が便利であるから，本論文では式(13)の $\left\{\varphi_n\right\}_{-\infty}^{\infty}$ を基本座標系として採用することにする．

3.2 dyad と dyadic

前節では，信号空間における座標系について論じた．**2.2** でも述べたように，空間回路網の設計をしたり，情報処理機能の構造を調べてゆく場合には，信号空間ばかりでなく，機能空間にも座標系を導入することが望ましい．そのための準備として，本節では，dyad および dyadic という概念について述べる．

φ, ψ, f をヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の元とするとき，

$$<\varphi, \psi> f \equiv (f, \psi)\varphi \tag{14}$$

によって定義される作用素 $<\varphi, \psi>$ を dyad という．dyad の一次結合（特に本論文では無限和も含む）を dyadic という．これが機能空間における座標系の役目をすることが，後でわかるであろう．dyad の定義から，容易に次の関係式が得られる．

$$a<\varphi, \psi> = <a\varphi, \psi> = <\varphi, \bar{a}\psi> \tag{15}$$

$$<\varphi_1+\varphi_2, \psi> = <\varphi_1, \psi> + <\varphi_2, \psi> \tag{16}$$

$$<\varphi, \psi_1+\psi_2> = <\varphi, \psi_1> + <\varphi, \psi_2> \tag{17}$$

$$A<\varphi, \psi> = <A\varphi, \psi> \tag{18}$$

$$<\varphi, \psi>A = <\varphi, A^*\psi> \tag{19}$$

$$<\varphi_1, \psi_1><\varphi_2, \psi_2> = (\varphi_2, \psi_1)<\varphi_1, \psi_2> \tag{20}$$

$$<\varphi, \psi>^* = <\psi, \varphi> \tag{21}$$

$$\| <\varphi, \psi> \| = \|\varphi\| \cdot \|\psi\| \tag{22}$$

ここで a は複素数，A は $\mathfrak{H}$ の上の作用素，A^* は A の共役作用素，$\|\cdot\|$ は・のノルムの記号である．

3.3 伸縮作用素 $\Lambda(\lambda)$

情報処理機能の dyadic 表現の概念に達っするために，$f(x)$ を $f(\lambda x)$ に変換する伸縮を行なう作用素について考えてみよう．$f(x)$ が無限区間で定義されている場合には問題はないが，本論文で扱っているように $f \in L_2[-l, l]$ になると，λx が区間 $[-l, l]$ からはみ出す場合が生じるので，伸縮作用素を単に，$f(x)$ を $f(\lambda x)$ に変換する作用素として定義することはできなくなる．

そこでまず，伸縮作用素の基本座標系のもとでの行列表現を形式的に求めてみれば，その第 m, n 要素は

$$(\varphi_n(\lambda x), \varphi_m(x)) = \frac{\sin(m-\lambda n)\pi}{(m-\lambda n)\pi} \tag{23}$$

となる．この無限次元行列は空間 l_2 の上の有界線形作用素であるから，L_2 の上の有界線形作用素でこの行列に対応しているものが存在する．それを伸縮作用素と名付けて，$\Lambda(\lambda)$ と表わすことにする．

こうして定義された作用素 $\Lambda(\lambda)$ が，どのような変換を行なうものであるかを見るために，式(23)をもう一度考えてみる．$\varphi_n(x)$ は初め区間 $[-l, l]$ で定義されていたが，区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された周期 $2l$ の周期関数とみなすことができる．そうすれば，$\varphi_n(\lambda x)$ も自然に定義できる．すなわち，$\varphi_n(\lambda x)$ は，$(-\infty, \infty)$ で定義された周期 $2\lambda l$ の周期関数である．式(23)の左辺の内積は $L_2[-l, l]$ における内積であるから，結局 $\Lambda(\lambda)$ とは，上のようにして求めた関数 $\varphi_n(\lambda x)$ の区間 $[-l, l]$ にある部分に，$\varphi_n(x)$ を変換する作用素であることがわかる．

以上のことを式で表わせば，伸縮作用素 $\Lambda(\lambda)$ は

$$\Lambda(\lambda) \equiv \Phi \Lambda'(\lambda) \Phi \qquad (0<\lambda<\infty) \tag{24}$$

$$[\Lambda'(\lambda) f](x) \equiv f(\lambda x)$$

と定義される．ここで

$$\Phi \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} <\varphi_n, \varphi_n> \tag{25}$$

である†．

$L_2P[-l, l]$ を，$L_2[-l, l]$ に属している関数を周期 $2l$ で全区間 $(-\infty, \infty)$ に拡張した関数の全体であって，L_2 の位相をそのまま用いた空間とする．式(25)で定義された Φ は，任意の関数の区間 $[-l, l]$ にある部分だけを取出して，周期 $2l$ で全区間 $(-\infty, \infty)$ に拡張する作用素である．したがって Φ は $L_2P[-l, l]$ においては恒等作用素となる．$\Lambda'(\lambda)$ は $L_2P[-l, l]$ から $L_2P[-\lambda l, \lambda l]$ への作用素であって，λ が異なれば $L_2P[-\lambda l, \lambda l]$ はすべて異なった空間になる．式(23)～(25)および dyadic の性質を用いれば，伸縮作用素 $\Lambda(\lambda)$ は

$$\Lambda(\lambda) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(m-\lambda n)\pi}{(m-\lambda n)\pi} <\varphi_m, \varphi_n> \tag{26}$$

と dyadic 表現される．$\Lambda(3/2)$ の場合を**図 3** に示す．

変位作用素 $T(a)$ も同様にして

† この無限級数は，作用素の強収束の意味での極限である．すなわち任意の $\varepsilon>0$ と任意の $f \in L_2$ に対して，適当な N をとれば，任意の $N_1, N_2 > N$ に対して

$$\left\| \Phi f - \sum_{n=-N_1}^{N_2} <\varphi_n, \varphi_n> f \right\| < \varepsilon$$

が成立する．

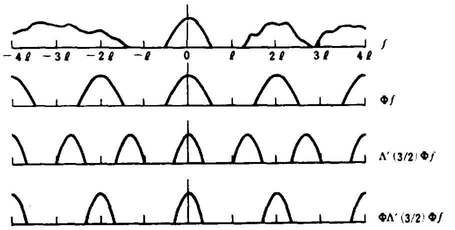

Fig. 3 Decomposition of the expansion operating process ($\lambda=3/2$)

$$T(a)=\Phi T'(a)\Phi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\frac{n\pi}{l}a\right)<\varphi_n,\varphi_n>$$

$$[T'(a)f](x)=f(x+a)\quad(-\infty<a<\infty)\tag{27}$$

と表わされる．$T'(a)$ は $L_2P[-l,l]$ からそれ自身の上への作用素である．

3.4 情報処理機能の dyadic 表現

前節の二つの例を見てもわかるように，われわれが直観的に容易に扱えるのは，$L_2[-l,l]$ の上の作用素よりもむしろ，$L_2P[-l,l]$ の上の作用素である．そこで，有界線形情報処理機能を $L_2P[-l,l]$ からある位相空間への有界線形作用素 A' として与え，それを

$$A=\Phi A'\Phi\tag{28}$$

なる変換によって，ある位相空間から $L_2P[-l,l]$ への有界線形作用素 A に変換する．

したがって，A は次の三つの段階の情報処理を行なうものである．まず Φ によって，$(-\infty,\infty)$ 上にある関数の区間 $[-l,l]$ にある部分だけを取り出して，周期 $2l$ の周期関数に展開する．次に A' によって，A 本来の情報処理を行なう．最後に，再び Φ で $[-l,l]$ にある部分だけを取り出して周期関数に展開することにより，処理を完了する．区間 $[-l,l]$ だけに着目すれば，A は $L_2[-l,l]$ からそれ自身の中への作素用となっている．

式(25)を用いて式(28)を変形すれば，

$$A=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}a_{m,n}<\varphi_m,\varphi_n>\tag{29}$$

となる．ここで

$$a_{m,n}\equiv(A'\varphi_n,\varphi_m)=(A\varphi_n,\varphi_m)\tag{30}$$

である．式(29)を A の **dyadic 表現**という．

式(30)の行列 $(a_{m,n})$ だけに着目したものが，A の行列表現である．しかし，式(23)の場合にそうであったように，行列表現だけから A の情報処理過程を容易に想い浮かべることはできない．式(29)のように，そのときに採用した座標系が表面に現われている方が，はるかに扱いやすいのである．そのために考え出されたものが，dyadic 表現である．

式 (29) は，機能空間 $\mathfrak{B}$ に属する任意の元が，$\{<\varphi_m,\varphi_n>\}$ なる作用素の系を用いて一意に展開できることを示している．すなわち，$\{<\varphi_m,\varphi_n>\}$ は $\mathfrak{B}$ における一つの座標系である．信号空間の構造を調べるために L_2 に座標系 $\{\varphi_n\}$ を導入したように，$\mathfrak{B}$ に座標系を導入することによって，機能空間 $\mathfrak{B}$ の構造を調べることが可能となる．

情報処理機能 A を $\{<\varphi_m,\varphi_n>\}$ なる座標系で展開したときの展開係数 $\{a_{m,n}\}$ は，どんな意味をもっているであろうか．それを見るために，φ_n に A なる情報処理を施してみる．そうすれば，式(29) (14)より

$$A\varphi_n=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_{mn}\varphi_m\tag{31}$$

となる．この式は，φ_n なる空間周波数成分が，A によって φ_m なる空間周波数成分に変換される割合が $a_{m,n}$ であることを示している．それ故，行列 $(a_{m,n})$ を A の**空間周波数特性**と呼ぶことにする．

4. 空間回路網の設計理論

4.1 自然座標系

前節で得られた A の dyadic 表現から直接空間回路網を構成することは，空間回路網が有限個の入出力端子しかもち得ないということから，不可能である．またあくまで基本座標系 $\{\varphi_n\}$ に固執することには，次のような問題がある．空間回路網が外界から入力信号を受け取る場合，(f,φ_n) なる演算を行なって f_n を求めることが困難であり，逆に，空間回路網の出力として (f_n) が与えられたとき，(f_n) に対応する L_2 の元 $f(x)$ が実数値関数であっても，(f_n) が複素数ベクトルになって，(f_n) から容易に $f(x)$ を想い浮かべることができない．

これらの問題を解決するために，座標系を次のようにして基本座標系から，自然座標系と呼ばれる新しい座標系 $\{\psi_n\}_{-N}^{N}$ に変換することにする．

基本座標系 $\{\varphi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ を有限次元で打ち切ったときの n の最小値を $-N$，最大値を M とする．この $\{\varphi_n\}_{-N}^{M}$ によって張られる L_2 の部分空間を $\mathfrak{H}_N$ とし，$\mathfrak{H}_N$ に新しい座標系 $\{\psi_n\}_{-N}^{M}$ を導入する．

$\{\psi_n\}_{-N}^{M}$ による展開係数が，実数値関数 $f(x)$ に対してすべて実数になるためには，$\psi_n(x)$ がすべて実数値関数であることが必要十分である．

さらに，$\{\psi_n\}_{-N}^{M}$ は $\{\varphi_n\}_{-N}^{M}$ の一次結合として

$$\psi_m(t)=\sum_{n=-N}^{M} u^*_{m,n}\varphi_n(x) \tag{32}$$

のように表わされるのであるが，$\psi_m(x)$ がすべて実数値関数になるためには

$$\left.\begin{array}{ll} u^*_{-m,-n}=u^*_{m,n} & (n=0,\pm1,\cdots,\pm N) \\ u^*_{m,n}=0 & (n=N+1,\cdots,M) \end{array}\right\} \tag{33}$$

であることが必要十分である．ここで $M\geqq N$ と仮定したが，$M<N$ の場合には，M と N を入れ換えることにより，やはり式(33)を得ることができる．結局 $M=N$ の場合だけを考えればよいことになる．

L_2 から $\mathfrak{H}_N$ を作るときに，$\{\varphi_n\}_{-N}^{N}$ の一部を除く理由は何もないので，このすべてを用いることにする†．

そこで，新しい座標系 $\{\psi_n\}_{-N}^{N}$ を

$$\begin{pmatrix}\psi_{-N}\\ \psi_{-N+1}\\ \vdots \\ \psi_N\end{pmatrix} \equiv U_N^* \begin{pmatrix}\varphi_{-N}\\ \varphi_{-N+1}\\ \vdots \\ \varphi_N\end{pmatrix} \tag{34}$$

によって導入する．ここで $U_N=(u_{m,n})$ は

$$u_{m,n}\equiv\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\varphi_m\left(\frac{2ln}{2N+1}\right)$$
$$(m,n=-N,-N+1,\cdots,N) \tag{35}$$

なる成分でできたユニタリー行列であり，$*$はエルミート共役を意味する．式(34)から $\{\psi_n\}_{-N}^{N}$ は

$$\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\frac{\sin\frac{(2N+1)\pi}{2l}\left(x-\frac{2ln}{2N+1}\right)}{\sin\frac{\pi}{2l}\left(x-\frac{2ln}{2N+1}\right)} \tag{36}$$

となり，つぎの性質をもつ．

$$(\psi_m,\psi_n)=\delta_{m,n} \tag{37}$$

$$\psi_m\left(\frac{2ln}{2N+1}\right)=\sqrt{2N+1}\ \delta_{m,n} \tag{38}$$

$$\sum_{n=-N}^{N}\psi_n(x)=\sqrt{2N+1} \tag{39}$$

$$\sum_{n=-N}^{N}\{\psi_n(x)\}^2=2N+1 \tag{40}$$

さらに重要なことは，任意の $f\in\mathfrak{H}_N$ に対して

$$f_n^\wedge\equiv(f,\psi_n)=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}f\left(\frac{2ln}{2N+1}\right) \tag{41}$$

なる関係式が成立することである．すなわち，$\{\psi_n\}_{-N}^{N}$ による展開係数が，$f(x)$ の標本点における観測値と(定数倍を除いて)一致するのである．それゆえ，$\{\psi_n\}_{-N}^{N}$ を空間 $\mathfrak{H}_N$ の**自然座標系**と呼ぶことにする．

式(39)(40)はつぎのような意味をもっている．$f(x)$ から $f_n^\wedge$ を求めるときには，$f_n^\wedge=(f,\psi_n)$ からわかるように，$[-l,l]$ の間の $f(x)$ の値をすべて同等に使うのではなく，$f(x)$ に $\psi_n(x)$ という重みをつけて用いている．さらに $f\in\mathfrak{H}_N$ の場合には，式(41)からわかるように，$f(x)$ の $x=2ln/(2N+1)$ なる唯一点の値だけを用いることと等価になっている．このように，一見 $f(x)$を平等に用いないで，その一部を特に強調して用いているように見えるけれども，すべての n にわたって考えてみれば，式(39)(40)から $f(x)$をすべての $x\in[-l,l]$ に対して平等に用いたことになっているのである．

式(39)が成立することと，

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sum_{n=-N}^{N}f_n^\wedge \tag{42}$$

が成立することとは同等である．それゆえ，もし $f(x)$ の空間周波数成分が $\mathfrak{H}_N$ に帯域制限されていれば，式(41)から

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}f\left(\frac{2ln}{2N+1}\right) \tag{43}$$

なる関係式が成立するのである．パーセバルの等式から

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(x)|^2dx=\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left|f\left(\frac{2ln}{2N+1}\right)\right|^2 \tag{44}$$

であるが，特にこの自然座標系に対しては，$f(x)$ のノルムだけでなく，面積に対しても同様の関係式が成立するのである．

L_2 から $\mathfrak{H}_N$ への射影作用素，すなわち，任意の $f\in L_2$ に対して，f の $\mathfrak{H}_N$ に属する成分だけを取り出す空間フィルタを E_N とする．$\Phi_N\equiv E_N\Phi E_N$ は $\mathfrak{H}_N$ の上では恒等作用素になっているが，式(35)のユニタリー変換に対して，その形が不変に保たれる．

$$\sum_{n=-N}^{N}<\varphi_n,\varphi_n>=\sum_{m=-N}^{N}<\psi_m,\psi_m> \tag{45}$$

これですべての準備が完了した．いよいよ次節で，線形空間回路網の設計理論について述べることにする．

4.2 設計理論

空間回路網の端子数が有限個という制約から，われ

† このことから，$\mathfrak{H}_N$ は常に奇数 $(2N+1)$ 次元の空間になる．これは，L_2 の基本座標系として式(13)の$\{\varphi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ を採用したためであって，別の座標系を採用して，$\mathfrak{H}_N$ を偶数次元の空間にすることも可能である[13]．

われわれが空間回路網で実現できる情報処理機能は，A ではなくて，

$$A_N \equiv E_N A E_N = \sum_{m,n=-N}^{N} a_{m,n} < \varphi_m, \varphi_n > \quad (46)$$

によって定義される $\mathfrak{H}_N$ から $\mathfrak{H}_N$ への作用素 A_N である†.

式(46)を自然座標系を用いて表現しなおせば，

$$A_N = \sum_{m,n=-N}^{N} a^{\wedge}_{m,n} < \psi_m, \psi_n > \quad (47)$$

$$a^{\wedge}_{m,n} \equiv \sum_{p,q=-N}^{N} u_{m,p} a_{p,q} \overline{u_{q,n}} \quad (48)$$

となる．式(47)における $\{<\psi_m, \psi_n>\}$ は，$\mathfrak{H}_N$ から $\mathfrak{H}_N$ への有界線形作用素の全体でできている機能空間 $\mathfrak{B}_N$ における一つの座標系である．この座標系に関する A_N の展開係数 $\{a^{\wedge}_{m,n}\}$ は，どんな意味をもっているであろうか．それを見るために，ψ_n に A_N なる情報処理を施してみる．そうすれば，式(47) (14) (37)より

$$A_N \psi_n = \sum_{m=-N}^{N} a^{\wedge}_{m,n} \psi_m \quad (49)$$

となる．当然のことながら，すべての ψ_n は $\mathfrak{H}_N$ に属しているから，式(41)を考慮すれば，式(49)が次のことを意味していることがわかる．空間回路網の入力側第n端子だけ1，他はすべて零となるようなパターンを加えれば，出力側第 m 端子に $a^{\wedge}_{m,n}$ なる値が観測される．そこで，入力側第 n 端子と出力側第 m 端子を$a^{\wedge}_{m,n}$ なる値の係数加算器で結べば，A_N なる情報処理機能を実現する空間回路網を構成することができる．それ故，行列 $(a^{\wedge}_{m,n})$ を A_N の**結合特性**，あるいは空間回路網の結合特性と呼ぶことにする．

A が，実関数は実関数に変換する情報処理機能になるための必要十分条件は，

$$\overline{a_{-m,-n}} = a_{m,n} \, (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \quad (50)$$

である．このとき結合特性 $(a^{\wedge}_{m,n})$ は

$$a^{\wedge}_{m,n} = \frac{1}{2N+1}\left[\alpha_{0,0} + 2\left(\sum_{p=q=1}^{N} + \sum_{p<q}\right)\left(\alpha_{p,q} \cos\frac{2\pi(mp-nq)}{2N+1} + \beta_{p,q} \sin\frac{2\pi(mp-nq)}{2N+1}\right)\right] \quad (51)$$

となる．ここで $\alpha_{p,q}$ および $\beta_{p,q}$ は，それぞれ $a_{p,q}$ の実部および虚部である．

式(51)からわかるように，条件(50)が成立すれば，結合特性 $(a^{\wedge}_{m,n})$ は実行列となり，空間回路網の構造は簡単になる．逆に結合特性が実行列ならば，A_N の空間周波数特性が条件(50)を満足することも容易に証明できる．

式(51)の小括弧の中の第一のΣは，変位作用素 $T(a)$ と可換な部分，したがって一様構造をもつ部分である．さらにその中の cos の項は等方な構造をもつ部分であり，sin の項は反等方な構造をもつ部分である．第二の Σ は，$T(a)$ と可換でない部分，したがって非一様構造をもつ部分である．

A_N は有限次元の作用素であるから，

$$k(x, y) \equiv \sum_{m,n=-N}^{N} a_{m,n} \varphi_m(x) \overline{\varphi_n(y)} \quad (52)$$

$$= \sum_{m,n=-N}^{N} a^{\wedge}_{m,n} \psi_m(x) \psi_n(y) \quad (53)$$

によって定義される関数 $k(x, y)$ を用いて，すべて

$$[A_N f](x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} k(x, y) f(y) dy \quad (54)$$

と積分表現される．$k(x, y)$ は x の関数としても，y の関数としても $\mathfrak{H}_N$ に属しているから，この $k(x, y)$ と結合特性の間には

$$a^{\wedge}_{m,n} = \frac{1}{2N+1} k\left(\frac{2lm}{2N+1}, \frac{2ln}{2N+1}\right) \quad (55)$$

なる関係が成立する．

これまでに述べてきた事柄を，**図4**にまとめて示す．

5. あとがき

まえがきで述べた情報科学の三つの分野のうち，まず(ii)に対する一つの接近法の基本的な考え方を述べた．すなわち，情報を担う信号をある位相空間の元，情報処理をある位相空間からある位相空間への変換とみなすことにより，情報処理機能をある位相空間の上の作用素として定式化した．

そして，この考え方を基礎において，(iii)の情報方式の開発へと進んでいった．信号空間として，位相空間の特殊な場合である $L_2[-l, l]$ を採用し，線形空間回路網理論を展開した．情報処理機能を dyadic 表現することにより，本質的には行列演算で議論ができるようになった．しかも，採用した座標系が表面に現われているために，処理してゆく過程が一つ一つはっきりと認識できるようになった．

自然座標系を導入することにより，抽象的数学的理論と実際の金物とが素直に結びついた．その結果，従来の電子計算機とは異なる，新しい型の情報処理方式

† ここでは簡単のために，入力側と出力側の端子数が同じ場合だけを扱っているが，そうでない場合へも容易に拡張できる．

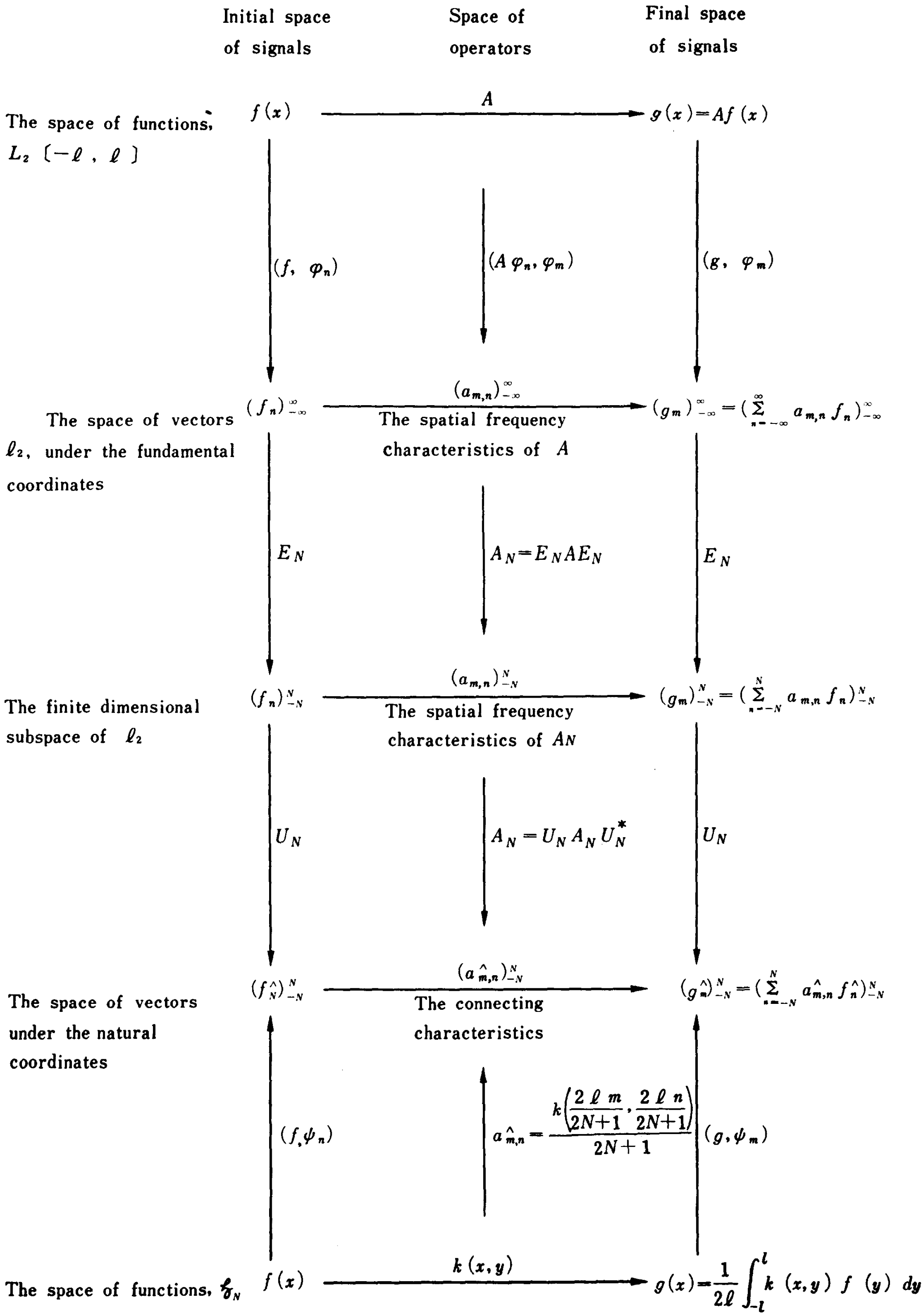

Fig. 4 Framework of the theory of linear spatial networks

を得ることができた．これが大脳の最適なモデルであるということはできない．しかし，本論文で述べてきた考え方と，飯島のパターン認識理論とを結びつけた光学的文字読取装置が既に二種製作されており，かなりの成果をあげている[10][11]．このことからも，空間回路網の考え方が，一つの有力な alternative であることは，確信してよいであろう．

さて，そもそも何かを認識しようとする場合には，その認識を行なう主体があって初めて，情報も意味をもってくる．このように，情報科学においては，主体と客体との相互作用を解明することが，本質的な問題である．したがって，空間回路網の研究だけをいくら進めても，パターン認識の研究は解決されないし，いわんや人工知能の実現は不可能である．しかし，(ⅰ)～(ⅲ)の各分野がそれぞれ，かなりの程度に発展していなければ，お互いに相互作用をおよぼしあうことは，これまた不可能なことである．本論文で述べた空間回路網の研究は，いま，そのような段階を踏み出したところである．

本論文では，情報を担う信号とか情報処理機能を，いかに数学的に定式化したらよいかということに重点をおいて論じてきた．その自然な結果として，空間回路網という新しい方式を得ることができたのであるが，空間回路網についてのさらに詳しい理論，たとえば，機能の近似の問題，機能の分解，合成の問題，空間回路網の誤差評価，試験，調整等に関する問題については，他の文献を参照されたい[5]～[17]．なお，電子技術総合研究所彙報で，線形空間回路網理論特集号が予定されている．理論の詳細がそこで発表されるであろう．

謝辞 本論文に関して種々有益な討論をしていただいた，当所飯島特別研究室の諸氏に感謝する．

参考文献

1) 視聴覚情報研究会編：情報の科学Ⅱ，ラティス (昭 42)．
2) 北川：情報学の論理，講談社現代新書 200, (昭 44)．
3) 飯島：パターン認識，日刊工業新聞社，工業技術ライブラリー 8，(昭 44)．
4) 福島：″電子の眼″，医用電子と生体工学（日本 ME 学会雑誌)，7，3，pp. 136-151，（昭 44-06)．
5) 飯島他：″自動正規化回路について（大域相互依存回路網の提案)″，信学会，オートマトンと自動制御研資，(昭 38-10)．
6) 森：″線形空間回路網理論″，信学会オートマトンと自動制御研資，(昭 40-07)．
7) 磯道，森，飯島：″2次元パターンの処理″，昭 40 年信学会大，S 4-12.
8) 森，磯道，飯島：″空間回路の過渡特性″，昭41年四学連大，1878.
9) 飯島：″線形空間回路網の誤差評価理論″ 昭 42 年四学連大，2915.
10) 舟久保他：″電試型 OCR パイロットモデル″，信学論 (C)，**52-C**，11，pp. 712-719，(昭 44-11)；電試彙報，電試型 OCR パイロットモデル特集号，**34**，1，(昭 45-01)．
11) 昭和45年2月電気試験所（現電子技術総合研究所）で公開された光学的文字読取機 ″ASPET/70″，およびそれに関連した文献，昭 45 年四学連大，2710-2714.
12) 五十嵐，小川，飯島：″空間回路網理論の位相解析的考察″，信学会，オートマトン研資，A 68-62，(昭 44-03)；昭 44 年四学連大，2979.
13) 五十嵐，小川，飯島：″線形空間回路網理論の位相解析的基礎づけ″，信学論 (C)，**53-C**，6，pp. 393-401，(昭 45-06)．
14) 小川，五十嵐，飯島：″Dyadic 表現による空間回路網理論の展開″，信学会，オートマトン研資，A69-33，(昭 44-09)；昭 44 年信学全大，88；信学論 (C)，(採録決定)．
15) 小川，飯島：″有界線形情報処理機能の分類″，昭 45 年四学連大，2805.
16) 小川，飯島：″帯域制限されたパターンに対する情報処理機能の最良近似″，信学会，オートマトン研資，A70-22，(昭 45-07)．
17) 小川，舟久保，飯島：″第二標本化と Low-Pass Filter,″ 昭 45 年信学全大，110.
本論文の数学的側面については，つぎの書物を参照されたい．
18) スミルノフ：高等数学教程 12，共立出版，(昭 40)．
19) 河野：位相空間論，共立全書 82，(昭 41)．
20) ナイマルク：関数解析入門Ⅰ，共立全書 527，(昭 43)．
21) 加藤：位相解析，共立出版，(昭 42)．

(昭和 45 年 6 月 20 日受付)