

図形の固有値の樹とその応用*

扇谷 紳一** 石桁 正士***

Abstract

Previously, the authors have tried to solve the eigen-value problems expressed by Helmholtz's differential equation ($\Delta\Phi + \lambda\Phi = 0$ in simply connected domain, $\Phi = 0$ on an arbitrary boundary, which shape is called figure) using the outer normals of Green function.

In this paper, the problems have been solved by difference calculus of inverse Green function and more the correlation between geometric informations of figure (length of periphery, vertical angle, number of interior angles, etc.) and the calculated eigen-values of figure has been investigated.

The graph which indicates this correlation is called as tree of eigen-value of figure and the tree may be utilized in order to estimate optimum overrelaxation parameter by the authors.

1. まえがき

ここでいう図形とは、二次元の単一連結領域の境界の形をいう。このような図形の固有値 λ とは、単一連結領域 R において恒等的に零でない関数 Φ を考え、 Φ は Helmholtz の方程式 $\Delta\Phi + \lambda\Phi = 0$ を満足し、かつ R の境界 Γ 上で $\Phi = 0$ を満足するときの λ をいう。任意の形の Γ をもつ図形の λ を求める方法としては、緩和法や変分法、さらにランダム・ウォークを利用するモンテカルロ法などが工夫されている。著者らはさきに Green 関数を利用する方法について発表した¹⁾、ここでは計算方法が簡単で、かつ高次の固有値まで求める差分法(網目法)を用いることとし、そのうえで著者らが提案する差分法に固有な連続空間の離散化に伴う誤差を補正する方法²⁾を併用する。これによって高精度とはいえないが、多数の任意の形をもつ図形の固有値を機械的に求めることができ、固有値という数値からみた図形のもつ情報の帰納的な解析が可能となる。さらに著者らはいくつかの連続的に変わる一連の図形(シリーズとよぶ)を選び、本方法でそれらの図形の固有値を求め、それとその図

形の幾何学的情報などと対応させて固有値の樹(相関図)を作り³⁾、緩和法などに用いる最適加速係数⁴⁾の推定に利用できることを示す。

2. 固有値の計算方法

2.1 格子状空間と差分オペレーター

まず、図形を置く連続空間を離散化して間隔 h の格子状空間にする。図形の境界 Γ は図形に最も近い格子点を直線で結んで形成する。これを Γ_h とする。

一般に図形の固有値は、その図形の面積に依存するから(付録1)、求める図形の面積 M を1に規格化して統一しておく。したがって、任意にとった格子間隔 h を一辺とする微小正方形を単位として Γ_h で囲まれた図形の面積が Sh^2 あるとすると、次式の関係が成り立つ。

$$M = Sh^2 = 1 \quad (1)$$

S は Γ_h で囲まれた格子点の数(内点数とよぶ)に近い値である。Fig. 1に格子状空間上にとった図形の例を示す。

つぎに差分オペレーターは計算に最も簡単な5点差分をとる。したがって、Fig. 1では Γ_h 内のたとえば番号16の点の関数値を $\Phi(16)$ と表わすと、点16における Laplacian は次式のように定まる。

$$\Delta_h \Phi(16) = \frac{1}{h^2} [\Phi(17) - 2\Phi(16) + \Phi(15) + \Phi(21) - 2\Phi(16) + \Phi(11)]$$

* Tree of Eigen-value of Two dimensional Figure and its application, by Shin-ichi Sengoku (Central Research Laboratory, Tateishi Electronic Co.) and Tadashi Ishiketa (Faculty of Engineering Science, Osaka University)

** 立石電機株式会社 中央研究所

*** 大阪大学 基礎工学部

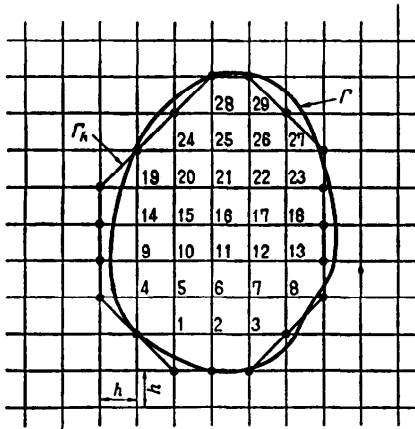


Fig. 1 An example of Γ and Γ_h
($S: 37.5$, Number of inner point: 29)

したがって、Helmholtz の方程式は \mathbf{A} を差分オペレーターを表わす行列、 Φ を関数 ϕ を表わすベクトル、 \mathbf{E} を単位行列とすると、つぎのように表わせる。

$$\left[-\frac{1}{h^2} \mathbf{A} + \lambda \mathbf{E} \right] \Phi = 0 \quad (2)$$

$\Phi \neq 0$ より

$$\left| -\frac{1}{h^2} \mathbf{A} + \lambda \mathbf{E} \right| = 0 \quad (3)$$

ここに Helmholtz の方程式は、行列 \mathbf{A} の固有値問題に帰着されることになる。Fig. 1 の場合の \mathbf{A} はつぎのようになる。この \mathbf{A} の逆行列が Green 関数である¹⁾ (付録 2)。

	1	2	3	4	5	6	29
1	4	-1	0	0	-1	0	0
2	-1	4	-1	0	0	-1	0
3	0	-1	4	0	0	0	0
4	0	0	0	4	-1	0	0
\vdots								
\vdots								
\vdots								
\vdots								
29	0	0	0	0	0	0	4

行列 \mathbf{A} の固有値を Λ とすると、求める λ は(1)式の関係より、つぎのように求められる。

$$\lambda = \frac{1}{h^2} \Lambda = S \Lambda \quad (4)$$

2.2 固有値の補正

解析的に求める正方形・長方形・円などの固有値と前述の行列式をもとにして、Jacobi 法により求めた値とを比較した結果、つぎのことが明らかになった。

解析的に得られた i 番目の固有値 λ_i (以下解析値とよぶ) と Jacobi 法で求めた i 番目の固有値 $\lambda_{i(h)}$ (以下実験値とよぶ) とを用いて相対誤差 e_i を作る。

$$e_i = \frac{\lambda_i - \lambda_{i(h)}}{\lambda_i} \quad (5)$$

実験的に $e_i \approx a \lambda_{i(h)}$ という関係が得られ、よくわしく調べると $a \approx 0.08/S$ という関係が得られた。この関係より $\lambda_{i(h)}$ を解析値 λ_i に近づけるためには、つぎの補正を必要とする。

$$\bar{\lambda}_{i(h)} = \frac{\lambda_{i(h)}}{1 - \frac{0.08 \lambda_{i(h)}}{S}} \quad (6)$$

$\bar{\lambda}_{i(h)}$ を実験値の補正值とよぶ。 Γ_h が Γ に十分近いときに(6)式による補正は最も良好な結果を示す。

Fig. 2 に正方形の場合の補正前の相対誤差 e_i と補正後の相対誤差 $\bar{e}_i = (\lambda_i - \bar{\lambda}_{i(h)})/\lambda_i$ とを示す。

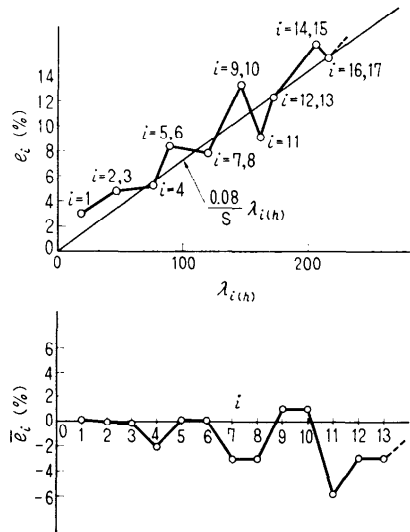


Fig. 2 An example of relative error e_i and \bar{e}_i
(Figure: Square, Number of inner point: 81)

2.3 補正式の意味

(6)式を無限級数の和と考えて展開すると次式が得られる。

$$\bar{\lambda}_{i(h)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{0.08}{S} \right)^{n-1} \lambda_{i(h)}^n \quad (7)$$

一方、Helmholtz の方程式で微分オペレーターを展開すると、つぎのように変形できる。

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Phi(x, y) = \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} \Phi(x, y)$$

$$= \lambda^2 \Phi(x, y) - 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \Phi(x, y)$$

上式を差分オペレーターと対応させると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(x, y) &= \frac{1}{h^2} \left\{ \Sigma^* \Phi(x', y') - 4\Phi(x, y) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} + \frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}} \right) \Phi(x, y) \right\} \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ \Sigma^* \Phi(x', y') - 4\Phi(x, y) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \lambda^n \Phi(x, y) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \Phi(x, y) \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{h^6}{6!} \left(\frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} \right) \Phi(x, y) + \dots \right\} \end{aligned}$$

ただし $x' = x \pm h$, $y' = y \pm h$ を表わし, Σ^* は (x, y) の 4 隣接点の加算を表わす。上式の右辺第 4 項以後を $R(x, y)$ と置くと次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Sigma^* \Phi(x', y') - 4\Phi(x, y) + R(x, y) \\ = -h^2 \lambda \Phi(x, y) + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{(2n)!} \lambda^n \Phi(x, y) \\ = 2 \{ 1 - \cos(h\sqrt{\lambda}) \} \Phi(x, y) \quad (\lambda > 0) \end{aligned}$$

$R(x, y) = O(h^2)$ を無視し, 差分オペレーターを用いた Helmholtz 方程式の固有値を $\lambda_{(h)}$ と書くと, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Sigma^* \Phi(x', y') - 4\Phi(x, y) \\ = 2 \{ 1 - \cos(h\sqrt{\lambda}) \} \Phi(x, y) \\ = h^2 \lambda_{(h)} \Phi(x, y) \quad (8) \end{aligned}$$

この $\lambda_{(h)}$ より正確な λ を求めるには, 次の補正を必要とする。ただし, $\lambda_{(h)}$ の補正値を $\bar{\lambda}_{(h)}$ とする。

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{(h)} &= \left\{ \frac{1}{h} \cos^{-1} \left(1 - \frac{h^2 \lambda_{(h)}}{2} \right) \right\}^2 \\ &= S \left\{ \cos^{-1} \left(1 - \frac{\lambda_{(h)}}{2S} \right) \right\}^2 \\ &= S \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \cdot \frac{1}{2n} \left(\frac{\lambda_{(h)}}{2S} \right)^n \quad (9) \end{aligned}$$

ただし, $\lambda_{(h)}/2S \leq 2$, $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\dots 1$ とする。

(7)式と(9)式とは, ほほ近い傾向をもつ級数である。

これによって(6)式の補正の意味がある程度明らかになったと考えられる。なお, 一次元の場合は, y に関する項がなくなるため, (9)式は完全な補正式となる。

なお(6)式による補正の方法は図形が凸な場合に十分妥当性がある。というのは W. R. Wasow らにより図形が凸な場合, $\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_{(h)} = \lambda$ (常に $\lambda > \lambda_{(h)}$ なる関係を保ちながら) という関係が証明されており, また凹な図形の場合 $\lambda < \lambda_{(h)}$ となる例が示されている⁸⁾。

3. 図形のシリーズと固有値の樹

系統的に種々の図形の固有値を計算するために, 著者らはつぎのいくつかの凸な図形のシリーズを設定した。

(1) シリーズ 1

正三角形から正 N 角形を経て円に至るシリーズで, パラメーターは角数 N である。

(2) シリーズ 2

正方形から出発して辺比を変えながら細長い長方形に至るシリーズで, パラメーターは辺比 b/a である。

(3) シリーズ 3

正方形から出発して細長い菱形に至るシリーズで, パラメーターは対角線の長さの比 n/m である。

(4) シリーズ 4

正方形から出発して台形を経て直角二等辺三角形に至るシリーズで, パラメーターは辺比 q/p である。

(5) シリーズ 5

正方形から出発して等脚台形を経て二等辺三角形に至るシリーズで, パラメーターは辺比 s/r である。

(6) シリーズ 6

直角二等辺三角形から出発して直角をはさむ二辺の比を変えていくシリーズで, パラメーターは辺比 d/c である。

(7) シリーズ 7

二等辺三角形の頂角 θ を変えていくシリーズで, パラメーターは角度 θ である。

(8) シリーズ 8

円から出発して扁平な楕円に至るシリーズで, パラメーターは長径と短径の比 f/e である。

(9) シリーズ 9

円から出発して円がだんだんと欠けていくシリーズで, パラメーターは円の直径と欠けた部分の長さの比 l/k である。

(10) シリーズ 10

扇形の頂角 ω を変えて半円に至るシリーズで, パラメーターは角度 ω である。

(11) その他のシリーズ

以上のほかに, 星芒形

$$x^n + y^n = a^n \quad (a > 0)$$

において n を変えていくシリーズや, Cassini の卵形

$$r^4 + 2a^2 r^2 \cos 2\theta + a^4 = k^4 \quad (k: \text{const})$$

において a を変えていくシリーズ (一部凹な図形となる) などを取り上げる。

図形の各シリーズについて固有値を求め, これと幾何学的情報と考えられるパラメーターとの相関をみるためグラフを描く. この固有値と幾何学的情報との相関法はかなり前に G. Polya が試みている⁵⁾. Fig. 3, Fig. 4 に相関図の例を示す。

さらに, 図形全体に共通したパラメーターとして周長 L や図形の重心を中心としたときの最大外接円半

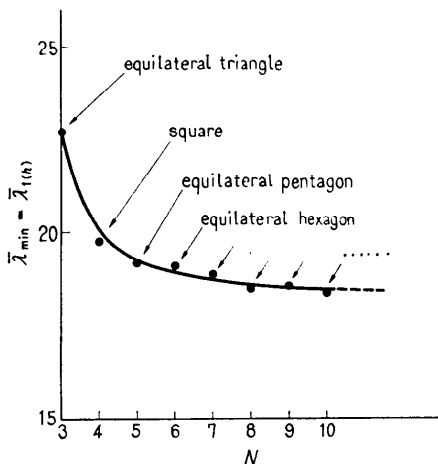


Fig. 3 Minimum eigenvalue of equilaterals (series 1)

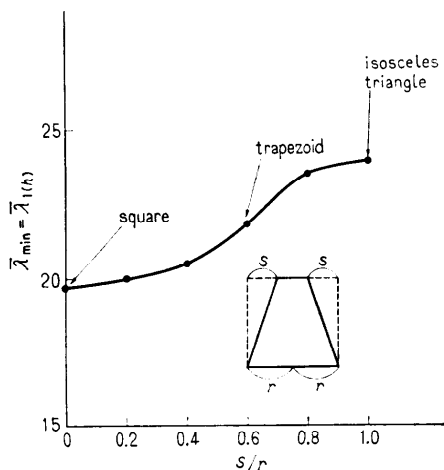


Fig. 4 Minimum eigen-value of trapezoids having two sides equal (series 5)

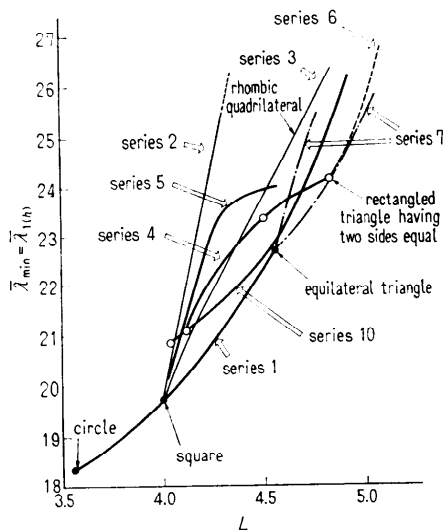


Fig. 5 Minimum eigen-value of various figures (Tree of eigen-value)

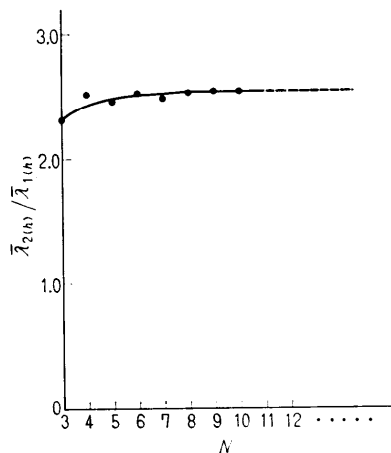


Fig. 6 Ratio of second to first eigen-value of equilaterals (series 1)

径と最小内接円半径との比 r_0/r_i などとの相関図も考えられる^{3,5)}. Fig. 5 に周長 L との相関図を示す. 著者らはこれらの相関図を図形の固有値の樹とよんでいる。

以上のほかに λ_2/λ_1 と幾何学的なパラメーターとの相関も調べつつある. Fig. 6 にその一例を示す。

4. 最適加速係数の推定への応用

4.1 最適加速係数の定義

つぎの境界値問題を加速形緩和法で解く場合を考え

よう。\$R\$ を単一連結領域、\$\Gamma\$ をその境界、\$I\$ をその内部、求める関数を \$u(x, y)\$ とする。

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= f(x, y) \quad \text{in } I \\ u(x, y) &= g(x, y) \quad \text{on } \Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

ただし \$f(x, y)\$, \$g(x, y)\$ は既知の関数である。

空間 \$x, y\$ を離散化して微分オペレーターの代わりに差分オペレーターを用い、格子点の座標 \$(x, y)\$ を \$(i, j)\$ と表わす。この結果(10)式に、つぎのように行列の形で表示できる。

$$AU = K$$

各成分の形で書くと、つぎのようになる。

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} u_j = k_i$$

$$1 \leq i \leq n \quad (n \text{ は内点数である})$$

加速形緩和法における加速係数を \$\omega\$ とすると、計算式は \$m\$ 回目の計算値と \$m+1\$ 回目の計算値とを用いて、つぎのように表現できる。

$$\begin{aligned} a_{ii} u_i^{(m+1)} - a_{ii} u_i^{(m)} + \omega \left\{ - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{(m+1)} \right. \\ \left. - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^{(m)} + k_i - a_{ii} u_i^{(m)} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式の \$\omega\$ の最適値 \$\omega_{opt}\$ は次式で与えられている⁴⁾。

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu_{max}^2}} \quad (12)$$

$$\mu_{max} = 1 - \frac{A_{min}}{4} \quad (13)$$

ただし、\$A_{min}\$ は行列 \$A\$ の最小の固有値である。

4.2 推定の手順

(12)式において \$\mu_{max}\$ さえわかれば \$\omega_{opt}\$ はすぐさま求められる。\$\mu_{max}\$ は \$A_{min}\$ より一意的に求められる。一般に \$A\$ と \$\lambda\$ との関係は(4)式で与えられているから、\$A_{min}\$ は(1)式で定義した \$S\$ と \$\lambda_{min}\$ とさえわかれば、次式より求められる。

$$A_{min} = \frac{1}{S} \lambda_{min} \quad (14)$$

したがって、\$\omega_{opt}\$ 推定の手順は、つぎのようになる。

(1) 境界 \$\Gamma\$ に最も近い図形をシリーズの中から選び、固有値の樹を利用して内挿法によって推定値 \$\lambda_{min}\$ を求める。

(2) 単一連結領域 \$R\$ の面積を1に規格化して、内点数を \$n\$ と定めたとときの格子間隔 \$h\$ を計算する。

(3) \$h^2\$ を単位として \$\Gamma_h\$ で囲まれた面積 \$S\$ を算出する。

(4) (12)式~(14)式を用いて推定値 \$\omega_{opt}\$ を求める。

4.3 推定例

内点数 \$n=79 \times 59\$ の長方形 (辺々の比 \$80 : 60 = 4 : 3\$) について \$\omega_{opt}\$ を推定する。このとき \$\Gamma_h\$ で囲まれた図形は四すみ欠けた長方形となるゆえ、\$S=80 \times 60 - 2 = 4,798\$ である。\$\lambda_{min}\$ は Fig. 5 のシリーズ2を利用して求める。パラメーター \$b/a=4/3\$ であるから、\$L=7\sqrt{3}/3 \approx 4.04\$ における \$\tilde{\lambda}_{min}\$ は 20.3 である。

$$\tilde{\lambda}_{min} = \frac{\tilde{\lambda}_{min}}{S} = \frac{20.3}{4798} \approx 0.0042$$

$$\tilde{\mu}_{max} = 1 - \frac{\tilde{\lambda}_{min}}{4} \approx 0.9989$$

$$\tilde{\omega}_{opt} = \frac{1 + \sqrt{1 - \tilde{\mu}_{max}^2}}{2} \approx \frac{2}{1.05} \approx 1.90$$

J. S. Person らは \$\omega_{opt} = 1.9124\$ と計算している⁶⁾。

以上のように、この方法は固有値の樹さえ完備しておれば、任意の凸な図形の \$\tilde{\omega}_{opt}\$ を求めるのに使用できるであろう。

5. むすび

本論文では図形の変形の点から図形の固有値を調べてみたが、さらに図形の分解や結合、図形に与えた物理的性質¹⁾ の不均一性などの点からも取り扱えば、より面白い結果が期待できるであろうと著者らは考えている。

最後に本研究に協力された中里 忠、岡部 仁、谷川 繁の3君に感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 扇谷・石桁: Green 関数を利用した Helmholtz の方程式の固有値問題の数値解法, 情報処理, Vol. 8, No. 3, May, 1968.
- 2) 扇谷・石桁: Helmholtz 方程式の固有値問題の数値解法についての考察, 情報処理学会第8回大会講演予稿集, 1967.
- 3) 扇谷・谷川・石桁: 固有値からみた図形の情報, 情報処理学会第10回大会講演予稿集, 1969.
- 4) R. S. Varga: Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Inc., 1962.
- 5) G. Polya: Induction and Analogy in Mathematics, Princeton Univ. Press, 1958.
- 6) J. S. Pearson and J. A. Harrison: Determination of the optimum successive overrelaxation parameter for the solution of Laplace's equation, Electronics letters, Vol. 5, No. 22, 1969.
- 7) 日高次: 積分方程式論, 河出書房, 1940.
- 8) G. E. Forsythe and W. R. Wasow: Finite-

difference methods for partial differential Equations, John Wiley & Sons, 1967.

付録 1

境界 Γ で囲まれた図形を極座標にとる。面積 M は $M = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta$ である。 Γ より半径で p 倍の図形 Γ_p を考える。 $M_p = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (pr)^2 d\theta = p^2 M$ となる。 M における固有値は $\Delta\Phi + \lambda\Phi = 0$, $\Phi = 0$ (Γ 上で) より求まる。 M_p における固有値は $\Delta\Phi_p + \lambda_p\Phi_p = 0$, $\Phi_p = 0$ (Γ_p 上で) より求まる。 直角座標では $\Delta\Phi(px, py) + p^2\lambda_p\Phi(px, py) = 0$ ゆえ $p^2\lambda_p = \lambda$, したがって, $\lambda_p = \lambda/p^2$ となって面積に反比例して固有値は定まる。

付録 2

積分方程式による固有値問題は, 固有関数 Φ , Green 関数 G を用いて, 次式のように表わされる⁷⁾。

$$\Phi(\xi, \eta) = \lambda \iint \Phi(x, y) G(x, y; \xi, \eta) dx dy$$

離散空間上に置き換えると, つぎのように表わせる¹⁾。ただし, (x, y) を i , (ξ, η) を j とした。

$$\Phi_j = \lambda \sum_i \Phi_i G_{ij} h^2$$

行列の形で書くと, つぎのようになる。

$$[E - \lambda G h^2] \Phi = 0$$

上式と(2)式とを対応させると $A^{-1} = G$ の関係が得られる。 (昭和45年8月6日受付)