寄 書

Runge-Kutta 法の階数 (order) と性能との関係について*

田 中 正 次** 山 下 茂**
島 津 義 彦** 広 瀬 浩**

1. 序 論

一口に Runge-Kutta 法といっても, 2～8階数 (order) にわたり, また, 各階数にもいろいろな変種があって, これらの方法を前にして使用者は, その選択にとまどいを感ずるにちがいない. 数値解析関係の図書は, それが常微分方程式の数値解法を主題としたものでなければ, ほとんど例外なく 4th order Runge-Kutta 法——すなわち, Clasical Runge-Kutta 法や Runge-Kutta-Gill法——のみをかかげる. また, ほかの階数の方法を扱う場合にも, 比重のおき方が全然違う. しかし, とくに 4th order 法を選んだ理由については全くふれないか, あるいはわずかにほかの方法は精度が低いのでと断わっている程度である (たとえば文献 1), 2), 3), 4), 5), 6) など).

著者はこの辺の事情を解明する目的で, 2nd から 6th order までの各階数の方法の中から, 2nd～4th order については著名な公式各2を, 5th～6th order については各1を選び, いくつかの例題を一定の区間の積分の後, 所定の誤差をもつという条件のもとに解いてみた. これらの数値実験から, 次のような結論が得られた. すなわち, 一定区間の数値積分の後, 同一の誤差 (多少幅がある) をもつように制御して, いくつかの例題計算を試みた結果, order の高いものの方が少ない計算量で目的を達すことが知られた. いいかえれば, 階数の高いものほど高能率であるという結果が現われた. ただし, 計算量は関数計算総回数で測ることにした (一般に, 微分方程式の右辺の関数が複雑な場合には, このような考え方は正当であろう. しかし, ここで選ばれた問題については, あまり適当でないかもしれない).

このことからも, 一般の数値解析のテキストが 4th order 法のみをかかげていることは正当であると思われる. 説明を補足しよう. higher order の Runge-Kutta 法は, 開発後まだ間もなく, 十分に検討がつくされておらず不安である. しかし, 2nd～4th order の方法は, 歴史も古く十分使われており, その本質もよく知られている. そこで, 熟知されていて信頼性も高く, 高性能以外にほかにもすぐれた特徴をもつ classical Runge-Kutta 法や Runge-Kutta-Gill 法が選ばれたと解釈することができる.

なお, 将来について一言すれば, さらに高性能な higher order 法の活用を考えるべきであろう.

以下, order の異なる Runge-Kutta 法比較のためになされた数値実験について詳述する.

2. 数値実験に使用された公式

数値実験には, 次のような各階数の公式を使用した.

(1) 2nd order 法[7]

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} k_1=hf(x_n,\ y_n) \\ k_2=hf\left(x_n+\dfrac{h}{2},\ y_n+\dfrac{k_1}{2}\right) \\ y_{n+1}=y_n+k_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

この公式を 2nd No. 1 と略称する.

$$\text{(ii)}\quad \begin{cases} k_1=hf(x_n,\ y_n) \\ k_2=hf\left(x_n+\dfrac{2}{3}h,\ y+\dfrac{2}{3}k_1\right) \\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{4}(k_1+3k_2) \end{cases} \tag{2.2}$$

この公式を 2nd No. 2 と略称する.

(2) 3rd order 法[7]

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} k_1=hf(x_n,\ y_n) \\ k_2=hf\left(x_n+\dfrac{h}{2},\ y_n+\dfrac{k_1}{2}\right) \\ k_3=hf(x_n+h,\ y_n-k_1+2k_2) \\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{6}(k_1+4k_2+k_3) \end{cases} \tag{2.3}$$

この公式を 3rd No. 1 と略称する.

* On the Efficiency of Runge-Kutta Methods with various Orders, by Masatsugu Tanaka, Shigeru Yamashita, Yoshihiko Shimazu and Hiroshi Hirose (Yamanashi University)

** 山梨大学

$$
(\text{ii})\quad \begin{cases} k_1 = hf(x_n,\ y_n) \\ k_2 = hf\left(x_n + \dfrac{h}{3},\ y_n + \dfrac{k_1}{3}\right) \\ k_3 = hf\left(x_n + \dfrac{2}{3}h,\ y_n + \dfrac{2}{3}k_2\right) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{4}(k_1 + 3k_3) \end{cases} \qquad (2.4)
$$

この公式を 3rd No. 2 と略称する.

(3) 4th order 法[6)]

$$
(\text{i})\quad \begin{cases} k_1 = hf(x_n,\ y_n) \\ k_2 = hf\left(x_n + \dfrac{h}{2},\ y_n + \dfrac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x_n + \dfrac{h}{2},\ y_n + \dfrac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(x_n + h,\ y_n + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_3) \end{cases} \qquad (2.5)
$$

これが有名な Classical Runge-Kutta 法である. この公式を 4th No. 1 と略称する.

$$
(\text{ii})\quad \begin{cases} k_1 = hf(x_n,\ y_n),\quad y_1 = y_n + \dfrac{1}{2}(2k_1 - 2q_0) \\ k_2 = hf\left(x_n + \dfrac{h}{2},\ y_1\right), \\ \qquad y_2 = y_1 - \left(1 - \sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)(k_2 - q_1) \\ k_3 = hf\left(x_n + \dfrac{h}{2},\ y_2\right), \\ \qquad y_3 = y_2 + \left(1 + \sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)(k_3 - q_2) \\ k_4 = hf(x_n + h,\ y_3),\quad y_4 = y_3 + \dfrac{1}{6}(k_4 - 2q_3) \\ q_1 = q_0 + 3\left\{\dfrac{1}{2}(k_1 - 2q_0)\right\} - \dfrac{1}{2}k_1 \\ q_2 = q_1 + 3\left\{\left(1 - \sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)(k_2 - q_1)\right\} \\ \qquad - \left(1 - \sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)k_2 \\ q_3 = q_2 + 3\left\{\left(1 + \sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)(k_3 - q_2)\right\} \\ \qquad - \left(1 + \sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)k_3 \\ q_4 = q_3 + 3\left\{\dfrac{1}{6}(k_4 - 2q_3)\right\} - \dfrac{1}{2}k_4 \end{cases} \qquad (2.6)
$$

これが有名な Runge-Kutta-Gill 法である. この公式を 4th No. 2 と略称する.

(4) 5th order 法

$$
\begin{cases} k_1 = hf(x_n,\ y_n) \\ k_2 = hf\left(x_n + \dfrac{h}{3},\ y_n + \dfrac{k_1}{3}\right) \\ k_3 = hf\left(x_n + \dfrac{2}{5}h,\ y_n + (6k_2 + 4k_1)/25\right) \\ k_4 = hf(x_n + h,\ y_n + (15k_3 - 12k_2 + k_1)/4) \\ k_5 = hf\left(x_n + \dfrac{2}{3}h,\right. \\ \qquad \left. y_n + (8k_4 - 50k_3 + 90k_2 + 6k_1)/81\right) \\ k_6 = hf\left(x_n + \dfrac{4}{5}h,\right. \\ \qquad \left. y_n + (8k_4 + 10k_3 + 36k_2 + 6k_1)/75\right) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{192}(23k_1 + 125k_3 - 81k_5 + 125k_6) \end{cases} \qquad (2.7)
$$

この公式を単に 5th として引用する[8)].

(5) 6th order 法

$$
\begin{cases} k_1 = hf(x_n,\ y_n) \\ k_2 = hf\left(x_n + \dfrac{h}{9},\ y_n + \dfrac{k_1}{9}\right) \\ k_3 = hf\left(x_n + \dfrac{h}{6},\ y_n + \dfrac{1}{24}(k_1 + 3k_2)\right) \\ k_4 = hf\left(x_n + \dfrac{2}{6}h,\ y_n + \dfrac{1}{6}(k_1 - 3k_2 + 4k_3)\right) \\ k_5 = hf\left(x_n + \dfrac{3}{6}h,\ y_n + \dfrac{1}{8}(-5k_1 + 27k_2\right. \\ \qquad \left. -24k_3 + 6k_4)\right) \\ k_6 = hf\left(x_n + \dfrac{4}{6}h,\ y_n + \dfrac{1}{9}(221k_1 - 981k_2\right. \\ \qquad \left. +867k_3 - 102k_4 + k_5)\right) \\ k_7 = hf\left(x_n + \dfrac{5}{6}h,\ y_n + \dfrac{1}{48}(-183k_1 + 678k_2\right. \\ \qquad \left. -472k_3 - 66k_4 + 80k_5 + 3k_6)\right) \\ k_8 = hf\left(x_n + h.\ y_n + \dfrac{1}{82}(716k_1 - 2079k_2\right. \\ \qquad \left. +1002k_3 + 834k_4 - 454k_5 - 9k_6 + 72k_7)\right) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{840}(41k_1 + 216k_3 + 27k_4 \\ \qquad +272k_5 + 27k_6 + 216k_7 + 41k_8) \end{cases} \qquad (2.8)
$$

この公式は単に 6th として引用される[9),10)]

3. 例 題

解析解が容易に得られる次の5問を選び数値解を求めた．

(1) $$\frac{dy}{dx}=\sin x-y,\quad y(0)=0.5=0.5 \tag{3.1}$$

解析解 $$y=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x) \tag{3.2}$$

(2) $$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{1+x},\quad y(0)=1 \tag{3.3}$$

解析解 $$y=(1+x)^2 \tag{3.4}$$

(3) $$\frac{dy}{dx}=xe^x,\quad y(0)=-1 \tag{3.5}$$

解析解 $$y=e^x(x-1) \tag{3.6}$$

(4) $$\frac{dy}{dx}=1-y^2,\quad y(0)=0 \tag{3.7}$$

解析解 $$y=\tan hx \tag{3.8}$$

(5) $$\frac{dy}{dx}=-y^2-(2x-1)y-(1-x+x^2),$$

$$y(0)=-0.5 \tag{3.9}$$

解析解 $$y=-x+\frac{1}{e^{-x}+1} \tag{3.10}$$

4. 実験方法およびその結果

各問題とも数値解は，$x=0.0$ から $x=3.0$ まで求めた．刻み幅 h は，$x=3.0$ における数値解の誤差 E

Table 1　$x=3.0$ における数値解の誤差 ε と刻み幅 h

上段$=\varepsilon$，下段$=h$

公式 ＼ 例題	$\frac{dy}{dx}=\sin(x)-y,\ y(0)=0.5$	$\frac{dy}{dx}=2y/(1+x),\ y(0)=1$	$\frac{dy}{dx}=xe^x,\ y(0)=-1$	$\frac{dy}{dx}=1-y^2,\ y(0)=0$	$\frac{dy}{dx}=-y^2-(2x-1)y-(1-x+x^2),\ y(0)=-0.5$
2nd No. 1	-2.50×10^{-5}	-1.92×10^{-5}	-2.10×10^{-5}	-2.09×10^{-5}	-2.70×10^{-5}
	2.0×10^{-2}	2.0×10^{-3}	2.4×10^{-3}	4.0×10^{-2}	6.0×10^{-2}
2nd No. 2	-2.22×10^{-5}	-2.53×10^{-5}	-2.13×10^{-5}	-2.23×10^{-5}	-2.30×10^{-5}
	1.59×10^{-2}	2.0×10^{-3}	3.61×10^{-2}	4.0×10^{-2}	5.0×10^{-2}
3rd No. 1	2.27×10^{-5}	-2.1×10^{-5}	2.06×10^{-5}	2.77×10^{-5}	2.11×10^{-5}
	1.00×10^{-1}	2.0×10^{-2}	1.5×10^{-1}	1.5×10^{-1}	2.0×10^{-1}
3rd No. 2	2.32×10^{-5}	-2.21×10^{-5}	-2.01×10^{-5}	2.28×10^{-5}	2.10×10^{-5}
	1.25×10^{-1}	2.67×10^{-2}	3.57×10^{-2}	1.5×10^{-1}	2.5×10^{-1}
4th No. 1	-2.11×10^{-5}	-2.15×10^{-5}	2.06×10^{-5}	-2.16×10^{-5}	-1.87×10^{-5}
	2.5×10^{-1}	6.97×10^{-2}	1.5×10^{-1}	2.72×10^{-1}	4.28×10^{-1}
4th No. 2	-2.11×10^{-5}	-2.17×10^{-5}	2.05×10^{-5}	-2.08×10^{-5}	-1.68×10^{-5}
	2.5×10^{-1}	6.97×10^{-2}	1.5×10^{-1}	2.72×10^{-1}	4.28×10^{-1}
5th	2.05×10^{-5}	-2.32×10^{-5}	-1.86×10^{-5}	2.32×10^{-5}	2.19×10^{-5}
	5.0×10^{-1}	1.5×10^{-1}	3.75×10^{-1}	4.28×10^{-1}	7.5×10^{-1}
6th	1.18×10^{-5}	-2.74×10^{-5}	2.86×10^{-5}	-1.98×10^{-5}	-1.27×10^{-5}
	7.5×10^{-1}	3.33×10^{-1}	1.5×10^{0}	5.0×10^{-1}	7.5×10^{-1}

Table 2　関数計算総回数

公式 ＼ 例題	$\frac{dy}{dx}=\sin(x)-y,\ y(0)=0.5$	$\frac{dy}{dx}=2y/(1+x),\ y(0)=1$	$\frac{dy}{dx}=xe^x,\ y(0)=-1$	$\frac{dy}{dx}=1-y^2,\ y(0)=0$	$\frac{dy}{dx}=-y^2-(2x-1)y-(1-x+x^2),\ y(0)=-0.5$
2nd No. 1	300	3000	2500	150	150
No. 2	188	3000	166	150	120
3rd No. 1	90	450	60	60	45
No. 2	72	336	252	60	36
4th No. 1	48	172	80	44	28
No. 2	48	172	80	44	28
5th	36	120	48	42	24
6th	32	72	16	48	32

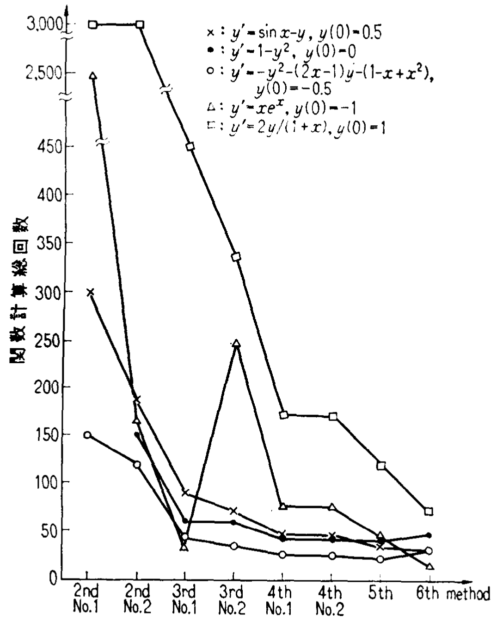

Fig. 1　Rung-Kutta 法の order と関数計算総回数との関係

が

$$2.0\times10^{-5}\leqq|E|\leqq3.0\times10^{-5} \tag{4.1}$$

を満足するように選ばれた．(4.1) で与えられた範囲はなるべく狭いほうがよいので，$|E|$のほとんどが 2.0×10^{-5} の近傍に集まるように配慮されている．

Table 1 は，各公式を用いて5つの例題を解いたときの，$x=3.0$ における数値解の誤差とそのときの刻み幅を示す．解が許容誤差内にはいるような，3.0 を整除する刻み幅が存在しないときには，許容誤差をこえない最大の誤差をもつ場合について記録した．

Table 2 は，Table 1 の，誤差と刻み幅の各組に対応する数値解における関数計算総回数を表にまとめたものである．

また，**Fig. 1** は Table 2 に示す結果を折れ線グラフで表示したものである．

これらの Table および図の観察から，われわれは直ちに冒頭で述べた結論，すなわち order の高い解法ほど高性能であるという結論を引き出すことができるであろう．また，中間データの記録をもあわせ考えれば 4th order 法が意外によいということに気づくであろう．

参考文献

1) R. H. Pennington, Introductory Computer Methods and Numerical Analysis, second edition, Macmillan, London (1970)
2) 森口繁一，高田　勝：数値計算法 II，岩波講座，現代応用数学 (1958)
3) 一松　信：数値計算，近代数学新書，至文堂 (1965)
4) 宇野利雄：計算機のための数値計算，応用数学力学講座 14，朝倉書店 (1963)
5) 吉沢　正：数値解析 I，岩波講座，基礎工学 4，岩波書店 (1968)
6) M. J. Romanelli, Runge-Kutta methods for the solution of ordinary differential equations, in Mathematical Methods for Digital computers, A. Ralston and H. S. Wilf,eds., Wiley, New York (1960)
7) Z. Kopal, Numerical Analysis, Chapman & Hall, London, 201～202 (1961)
8) W. E. Milne, Numerical Integration of Ordinary Differential Equations, Third Printing, Wiley, New York, 1960
9) A. Hŭtta, Une amélioration de la méthode de Runge-Kutta-Nyström pour la résolution numérique des équations différentiells du premier ordre, Acta Fac. Nat. Univ. Comenianae Math., 1, 201～224 (1956)
10) A. Hŭtta, Contribution à la formule de sixième Oxdre dans la méthode de Runge-Kutta-Nystxöm, Acta Fac. Univ. Comenianae Math., 2, 21～23 (1957)

(昭和46年2月12日受付)