情報処理学会論文誌　Vol.53　No.8　1954–1961 (Aug. 2012)

漸化式を用いる不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu, x)$ の数値計算法の誤差解析

吉田 年雄[1,a)]

受付日 2011年12月16日, 採録日 2012年5月12日

概要：本論文では，漸化式を用いる不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu,x)$ の数値計算法と誤差解析を述べている（$\nu > 0,\ x \geq 0$）．m を適当に選ばれた正の整数とし，α を小さな任意定数とする．$\nu = a + n$（n：整数，$0 < a \leq 1$）とおく．$F_{m+1}(x) = 0$ と $F_m(x) = \alpha$ を出発値として，$\gamma(a+k,x)$ が満たす漸化式 $F_{k-1}(x) = ((a+k+x)F_k(x) - F_{k+1}(x))/(a+k-1)$ を繰り返し使うことにより，$\gamma(a+n,x)$ は $\gamma(a+n,x) \doteqdot (x^a/a)F_n(x)/\sum_{k=0}^{m} F_k(x)/k!$ で計算できる．上記の別法は，$F_{m+1}(x) = 0$ を出発値として，漸化式 $F_k(x) = (F_{k+1}(x) + x^{a+k}e^{-x})/(a+k)$ を繰り返し使うものである．そのとき，$\gamma(a+n,x)$ は $\gamma(a+n,x) \doteqdot F_n(x)$ によって求められる．ここでは，これらの計算法の誤差解析を行い，倍精度で関数値を計算するために必要な漸化式の繰返し回数を求めている．

キーワード：不完全ガンマ関数，漸化式を用いる計算法，誤差解析，特殊関数

Error Analysis of Recurrence Technique for the Calculation of Incomplete Gamma Function $\gamma(\nu, x)$

Toshio Yoshida[1,a)]

Received: December 16, 2011, Accepted: May 12, 2012

Abstract: In this paper, we describe a numerical method for incomplete gamma function $\gamma(\nu,x)$ by recurrence techniques and its error analysis ($\nu > 0,\ x \geq 0$). We determine a and n so that the relation $\nu = a + n$ (n: an integer, $0 < a \leq 1$) holds and assume that m is an arbitrary integer and α is an arbitrary small number. Starting with $F_{m+1}(x) = 0$, $F_m(x) = \alpha$, and obtaining $F_{m-1}(x)$, $F_{m-2}(x)$, $\cdots$, $F_0(x)$ from the recurrence $F_{k-1}(x) = ((a+k+x)F_k(x) - F_{k+1}(x))/(a+k-1)$, then $\gamma(a+n,x)$ is computed by $\gamma(a+n,x) \doteqdot (x^a/a)F_n(x)/\sum_{k=0}^{m} F_k(x)/k!$. The alternative method is as follows. Starting with $F_{m+1}(x) = 0$, and obtaining $F_n(x)$ from the recurrence $F_k(x) = (F_{k+1}(x) + x^{a+k}e^{-x})/(a+k)$, then $\gamma(a+n,x)$ is computed by $\gamma(a+n,x) \doteqdot F_n(x)$. From error analysis, we obtain the repeated time of recurrence in double precision mode.

Keywords: incomplete gamma function, recurrence technique, error analysis, special function

1. はじめに

不完全ガンマ関数はベッセル関数と同様に，いろいろな分野で用いられている重要な関数であり，用途についてはいうまでもない．不完全ガンマ関数と呼ばれる関数には次の 2 つのものがある [1].

$$\gamma(\nu,x) = \int_0^x t^{\nu-1}e^{-t}dt \quad (\nu > 0) \tag{1}$$

$$\Gamma(\nu,x) = \int_x^\infty t^{\nu-1}e^{-t}dt \tag{2}$$

また，ガンマ関数 $\Gamma(\nu)$ を用いれば，両者の間に次の関係式が成り立つ．

$$\gamma(\nu,x) + \Gamma(\nu,x) = \Gamma(\nu) \tag{3}$$

さらに，式 (1) の部分積分より次式が得られる．

1　中部大学
Chubu University, Kasugai, Aichi 487–8501, Japan
a)　tyoshida@isc.chubu.ac.jp

$$\gamma(\nu+1,x)=\nu\gamma(\nu,x)-x^{\nu}e^{-x} \tag{4}$$

$\gamma(\nu,x)$ のテーラー展開式は

$$\gamma(\nu,x)=x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!(\nu+k)} \tag{5}$$

$$=x^{\nu}e^{-x}\Gamma(\nu)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\nu+k+1)}$$

$$=x^{\nu}e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+k)} \tag{6}$$

として表され，連分数展開式 [2], [3] は次式のように表される．

$$\gamma(\nu,x)=x^{\nu}e^{-x}\left[\frac{1}{\nu+}\ \frac{-\nu x}{1+\nu+x+}\ \frac{-(1+\nu)x}{2+\nu+x+}\ \frac{-(2+\nu)x}{3+\nu+x+}\ \cdots\right] \tag{7}$$

$$=x^{\nu}e^{-x}\left[\frac{1}{\nu+}\ \frac{-\nu x}{1+\nu+}\ \frac{x}{2+\nu+}\ \frac{-\nu x}{3+\nu+}\ \frac{2x}{4+\nu+}\ \frac{-\nu x}{5+\nu+}\ \frac{3x}{6+\nu+}\ \cdots\right] \tag{8}$$

$\gamma(\nu,x)$ の計算法としては，上記のテーラー展開式，連分数展開式による方法と次に説明する漸化式を用いる方法がある．漸化式を用いる方法には，計算法 I と計算法 II がある．次数 ν は正の実数，x は非負の実数とする．n を非負の整数として，

$$\nu=a+n \quad (0<a\le 1) \tag{9}$$

とおけば，与えられた ν の値に対して，a と n が一意に決まる．

計算法 I は，Gautschi [4] により提案された（$P(\nu,x)=\gamma(\nu,x)/\Gamma(\nu)$ に対して）．m を適当に選ばれた正の整数とし（$m>n$），α を小さな任意定数とする．

$$F_{m+1}(x)=0, \quad F_m(x)=\alpha \tag{10}$$

を出発値として，$\gamma(a+k,x)$ が満たす漸化式

$$F_{k-1}(x)=\frac{a+k+x}{(a+k-1)x}F_k(x)-\frac{1}{(a+k-1)x}F_{k+1}(x) \tag{11}$$

を繰り返し使うことにより，$F_{m-1}(x), F_{m-2}(x),\cdots,F_n(x),\cdots, F_0(x)$ を順次，計算する．そのとき，ある N（$<m$）に対して，$n=0,1,\cdots,N$ についての $\gamma(a+n,x)$ の計算式は次式で与えられる．

$$\gamma(a+n,x)\doteqdot\frac{x^a}{a}F_n(x)\Bigg/\sum_{k=0}^{m}\frac{F_k(x)}{k!} \tag{12}$$

計算法 II も Gautschi [5] により提案された．式 (4) より，$\gamma(a+n,x)$ は，漸化式

$$F_k(x)=\frac{F_{k+1}(x)+x^{a+k}e^{-x}}{a+k} \tag{13}$$

満たす．

$$F_{m+1}(x)=0 \tag{14}$$

を出発値として，漸化式 (13) を繰り返し使うことにより得られた $F_n(x)$ を用いて，$\gamma(a+n,x)$ は

$$\gamma(a+n,x)\doteqdot F_n(x) \tag{15}$$

として求められる．

これらの漸化式を用いる $\gamma(a+n,x)$ の計算法の誤差解析は行われていない．2 章では，漸化式を用いる不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu,x)$ の計算法 I の誤差解析について述べる．そこでは，まず $\gamma(\nu,x)$ の計算式の誤差の表示式を与えている．それを式変形することにより，誤差の簡潔な表示式を得ており，これは，本論文で初めて示す結果である．また，3 章では，計算法 I の誤差解析の結果をもとにして，$\gamma(\nu,x)$ を倍精度で計算するために必要な漸化式の繰返し回数を求め，能率的な計算法を提案している．さらに，4 章では，計算法 II の誤差解析について述べる．そこでは誤差の簡潔な表示式を与えており，これも本論文で初めて示す結果である．

さて，連分数展開式の計算法には，その展開式 (7) あるいは (8) で $x^{\nu}e^{-x}$ を除いた部分を

$$\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\cdots \tag{16}$$

と表したとき，次の計算法 A と計算法 B がある．

〔計算法 A〕

$$P_0=0,\ P_1=a_1 \tag{17}$$

$$Q_0=1,\ Q_1=b_1 \tag{18}$$

として，2 つの漸化式

$$P_k=b_kP_{k-1}+a_kP_{k-2} \quad (k=2,3,\cdots) \tag{19}$$

$$Q_k=b_kQ_{k-1}+a_kQ_{k-2} \quad (k=2,3,\cdots) \tag{20}$$

を繰り返し計算する．第 m 近似分数，すなわち，a_m/b_m まで計算したときの連分数の値は，P_m/Q_m となるので，それが要求精度内に収束するまで繰り返し計算すればよい．

〔計算法 B〕

m を適当に定め，

$$F_m=a_m/b_m,\ F_k=a_k/(b_k+F_{k+1}) \quad (k=m-1,m-2,\cdots,1) \tag{21}$$

により，F_1 を求めれば，それが連分数展開式を b_m/a_m までとったものの値となる．

表 1　各計算法の比較
Table 1　Comparisons of methods.

x=10, $\nu = 0.1$	Repeated time	Relative accuracy	CPU time (μs)
Taylor expansion (5)	52	$3.1 \cdot 10^{-15}$	2.5　2.2　1.3
Taylor expansion (6)	47	$2.3 \cdot 10^{-16}$	2.1　1.4　1.1
Continued fraction (7)	49	$1.3 \cdot 10^{-12}$	2.2　3.6　1.4
Continued fraction (8)	40	$3.3 \cdot 10^{-12}$	1.7　2.2　1.3
Method II : Recurrence (13)	48	$2.2 \cdot 10^{-16}$	1.7　1.4　0.8
Method I : Recurrence (11)	46	$2.2 \cdot 10^{-16}$	1.7　1.3　1.1

x=20, $\nu = 0.1$	Repeated time	Relative accuracy	CPU time (μs)
Taylor expansion (5)	82	$6.0 \cdot 10^{-11}$	4.1　3.3　1.9
Taylor expansion (6)	68	$9.0 \cdot 10^{-16}$	2.5　2.0　1.4
Continued fraction (7)	68	$5.4 \cdot 10^{-8}$	2.8　5.0　1.7
Continued fraction (8)	57	$5.9 \cdot 10^{-8}$	2.5　3.1　1.6
Method II : Recurrence (13)	70	$6.0 \cdot 10^{-16}$	2.3　1.9　1.3
Method I : Recurrence (11)	67	$6.0 \cdot 10^{-16}$	2.3　1.9　1.6

本論文において，連分数展開式の誤差解析を行うことは主題ではないが，連分数展開式 (7) については，その誤差解析が成功したので，付録に述べることにする．

ここで，$\gamma(\nu, x)$ の計算法の比較を行おう．ただし，各計算法には，それぞれ特長があり，一概に比較することはできない．与えられた ν と x に対して，単一の不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu, x)$ を求める場合には，テーラー展開式あるいは連分数展開式が適しているが，与えられた a，x と N (> 0) に対して，不完全ガンマ関数 $\gamma(a, x)$，$\gamma(a+1, x)$，$\cdots$，$\gamma(a+N, x)$ をいっせいに必要とする場合には，漸化式を用いる計算法が適している．また，テーラー展開式では，指数関数を含まない式 (5) は，一見，効率的であるように思われるが，交代級数であるので，x が小さい場合を除いて桁落ちをする．漸化式を用いる計算法では，計算法 II は指数関数を必要とするが，漸化式の計算は，計算法 I より簡単である．**表 1** に，テーラー展開式 (5)，テーラー展開式 (6)，連分数展開式 (7)，連分数展開式 (8)，漸化式 (13) を用いる方法，漸化式 (11) を用いる方法の比較のため，倍精度で関数値を計算するのに必要な項数あるいは繰返し回数（m），計算値の相対精度，CPU 計算時間を示す（計算時間は，測定ごとに多少の変動がある）．本結果はコンパイラーとして富士通の Fortran&C V4.0 の Fortran を用いて行い，計算時間は，左から，Intel Core 2 Duo CPU T7250 2.00 GHz，Intel Core 2 CPU 6600 2.4 GHz，Intel Core i5-2430M CPU 2.4 GHz の結果である．連分数展開式の計算は計算法 A の場合を示す（計算法 B では，この計算時間の 2/3 程度になる）．この表より，連分数展開式の精度が悪く，実用では問題であることが分かる（x が大きいほど桁落ちが生ずる）．テーラー展開式 (5) も交代級数であるので桁落ちが起き，同様な傾向がある．以上より，単一の $\gamma(a+n, x)$ を求める場合には，テーラー展開式 (6) による方法あるいは漸化式を用いる方法がよく，一連の $\gamma(a+k, x)$（$k = 0, \cdots, N$）を求める場合には，漸化式を用いる方法がよい．漸化式を用いる方法で，計算法 I と計算法 II の選択については，指数関数の計算時間に依存すると考えられる．

2. 計算法 I の誤差解析

漸化式 (11) の一般解は

$$F_n(x) = \xi\gamma(a+n, x) + \eta\Gamma(a+n, x) \tag{22}$$

で表される．ここで，ξ と η は任意定数である．これらの任意定数は式 (10) によって決められる．式 (10) から次式が得られる．

$$F_{m+1}(x) = \xi\gamma(a+m+1, x) + \eta\Gamma(a+m+1, x) = 0 \tag{23}$$

$$F_m(x) = \xi\gamma(a+m, x) + \eta\Gamma(a+m, x) = \alpha \tag{24}$$

式 (22) と (23) から η を消去すると次式を得る．

$$\gamma(a+n, x) = \frac{F_n(x)}{\xi} + \frac{\gamma(a+m+1, x)}{\Gamma(a+m+1, x)}\Gamma(a+n, x) \tag{25}$$

上式と次の関係式 [4]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma(a+k, x)}{k!} = \frac{x^a}{a} \quad (a > 0) \tag{26}$$

より，

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(\frac{F_k(x)}{\xi} + \frac{\gamma(a+m+1, x)}{\Gamma(a+m+1, x)}\Gamma(a+k, x)\right) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\gamma(a+k, x)}{k!} = \frac{x^a}{a} \tag{27}$$

が成り立つ．式 (25) と上式から ξ を消去すると次式が得られる．

$$\gamma(a+n,x) = \frac{x^a F_n(x)}{a\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{F_k(x)}{k!}}(1-\Phi_{a,m}(x)) + \frac{\gamma(a+m+1,x)}{\Gamma(a+m+1,x)}\Gamma(a+n,x) \tag{28}$$

ただし，

$$\Phi_{a,m}(x) = \frac{a}{x^a}\frac{\gamma(a+m+1,x)}{\Gamma(a+m+1,x)}\sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(a+k,x)}{k!} + \frac{a}{x^a}\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\gamma(a+k,x)}{k!} \tag{29}$$

である．この $\Phi_{a,m}(x)$ は n に依存しないことに注意しよう．上式 (28) は $\gamma(a+n,x)$ の計算式 (12) の誤差を的確に表している．

式 (28) の右辺の第 2 項を $\gamma(a+n,x)$ で割ったものを次式で示すように，$\Theta_{a,m,n}(x)$ とおく．

$$\Theta_{a,m,n}(x) = \frac{\gamma(a+m+1,x)\Gamma(a+n,x)}{\Gamma(a+m+1,x)\gamma(a+n,x)} \tag{30}$$

計算式 (12) の相対精度

$$\epsilon_{a,m,n}(x) = \frac{\dfrac{x^a}{a}F_n(x)\Big/\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{F_k(x)}{k!} - \gamma(a+n,x)}{\gamma(a+n,x)} \tag{31}$$

は，式 (28) を用いれば，

$$\epsilon_{a,m,n}(x) = \frac{\Phi_{a,m}(x) - \Theta_{a,m,n}(x)}{1-\Phi_{a,m}(x)} \tag{32}$$

と表され，$|\Phi_{a,m}(x)| << 1$ のときには，

$$\epsilon_{a,m,n}(x) \approx \Phi_{a,m}(x) - \Theta_{a,m,n}(x) \tag{33}$$

と近似できる．

表 2 に，$x = 8$, $a = 0.7$, $m = 25$ のとき，$n = 25, 24, \cdots, 1, 0$ の場合について，式 (12) の計算値，その相対誤差 $\tilde{\epsilon}_{a,m,n}(x)$（$=$ (計算値 $-$ 真値)/真値)，$\Phi_{a,m}(x)$，$\Theta_{a,m,n}(x)$ と計算式の相対誤差 $\epsilon_{a,m,n}$（$= (\Phi_{a,m}(x) - \Theta_{a,m,n}(x))/(1-\Phi_{a,m}(x))$）を示す．これらは倍精度演算で行った結果であり，丸め誤差の影響を避けるため，計算式の精度が単精度程度の場合について示している．$\Phi_{a,m}(x)$，$\Theta_{a,m,n}(x)$ の値を求めるには，$\Gamma(a+k,x)$（$k = 0, 1, \cdots, m+1$）と $\gamma(a+k,x)$（$k = n; k = m+1, m+2, \cdots$）の計算法が必要である（この場合には，精度は数桁あればよい）．$\Gamma(a+k,x)$ については，文献 [6], [7] の計算法で計算できる．$\gamma(a+k,x)$ についてはテーラー展開式 (6) を用いればよい．この展開式による計算は桁落ちがなく，丸め誤差の程度で関数値が求められるので，$\gamma(a+k,x)$ の真値として用いることができる．

表 2　$\tilde{\epsilon}_{a,m,n}(x)$ と $\epsilon_{a,m,n}(x)$（$a = 0.7$，$m = 25$）
Table 2　$\tilde{\epsilon}_{a,m,n}(x)$ and $\epsilon_{a,m,n}(x)$ ($a = 0.7$, $m = 25$).

n	Approximation(12)	$\tilde{\epsilon}_{a,m,n}(x)$	$\Phi_{a,m}(x)$	$\Theta_{a,m,n}(x)$	$\epsilon_{a,m,n}(x)$
25	2.114091798e+18	-2.95e-01	2.05e-07	2.95e-01	-2.95e-01
24	3.605510810e+17	-9.05e-02	2.05e-07	9.05e-02	-9.05e-02
23	5.103337843e+16	-2.88e-02	2.05e-07	2.88e-02	-2.88e-02
22	6.922946119e+15	-9.54e-03	2.05e-07	9.54e-03	-9.54e-03
21	9.303056879e+14	-3.29e-03	2.05e-07	3.29e-03	-3.29e-03
20	1.250430725e+14	-1.19e-03	2.05e-07	1.19e-03	-1.19e-03
19	1.686821379e+13	-4.46e-04	2.05e-07	4.46e-04	-4.46e-04
18	2.287476267e+12	-1.76e-04	2.05e-07	1.76e-04	-1.76e-04
17	3.121991705e+11	-7.25e-05	2.05e-07	7.28e-05	-7.25e-05
16	4.293444920e+10	-3.14e-05	2.05e-07	3.16e-05	-3.14e-05
15	5.957657045e+09	-1.42e-05	2.05e-07	1.44e-05	-1.42e-05
14	8.355614181e+08	-6.71e-06	2.05e-07	6.92e-06	-6.71e-06
13	1.187006126e+08	-3.28e-06	2.05e-07	3.48e-06	-3.28e-06
12	1.712836492e+07	-1.63e-06	2.05e-07	1.83e-06	-1.63e-06
11	2.519834843e+06	-7.96e-07	2.05e-07	1.00e-06	-7.96e-07
10	3.798175406e+05	-3.59e-07	2.05e-07	5.63e-07	-3.59e-07
9	5.905609751e+04	-1.18e-07	2.05e-07	3.23e-07	-1.18e-07
8	9.561427951e+03	1.91e-08	2.05e-07	1.85e-07	1.91e-08
7	1.633437488e+03	9.97e-08	2.05e-07	1.05e-07	9.97e-08
6	3.000660562e+02	1.48e-07	2.05e-07	5.69e-08	1.48e-07
5	6.091082320e+01	1.76e-07	2.05e-07	2.87e-08	1.76e-07
4	1.421309100e+01	1.92e-07	2.05e-07	1.29e-08	1.92e-07
3	4.040386234e+00	2.00e-07	2.05e-07	4.86e-09	2.00e-07
2	1.530529071e+00	2.03e-07	2.05e-07	1.39e-09	2.03e-07
1	9.070790313e-01	2.04e-07	2.05e-07	2.59e-10	2.04e-07
0	1.297881702e+00	2.04e-07	2.05e-07	2.02e-11	2.04e-07

この表を見れば分かるように，計算値の相対誤差 $\tilde{\epsilon}_{a,m,n}(x)$ と計算式の相対誤差 $\epsilon_{a,m,n}(x)$ は一致おり，誤差解析が正しいことを例証している．

式 (10) を出発値として，漸化式 (11) を繰り返し適用することにより得られた $F_{m-1}(x)$，$F_{m-2}(x)$，$\cdots$，$F_0(x)$ を用いて，計算式 (12) により，10 進 p 桁の精度で $\gamma(a+n,x)$ を計算できるためには，次の 2 つの不等式

$$|\Phi_{a,m}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \tag{34}$$

$$|\Theta_{a,m,n}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \tag{35}$$

が成り立てばよい．上の 2 つの不等式は，漸化式の繰返し回数を決めるための基本的な式である．

式 (29) を変形しよう．関係式 (26) を用いると，

$$\begin{aligned}\Phi_{a,m}(x) =& 1 + \frac{a}{x^a}\frac{\gamma(a+m+1,x)}{\Gamma(a+m+1,x)}\sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(a+k,x)}{k!} - \frac{a}{x^a}\sum_{k=0}^{m}\frac{\gamma(a+k,x)}{k!}\\ =& \frac{\dfrac{a}{x^a}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{R_{a,m,k}(x)}{k!} + \Gamma(a+m+1,x)}{\Gamma(a+m+1,x)}\end{aligned} \tag{36}$$

と表される．ここで，

$$\begin{aligned} R_{a,m,k}(x) =&\Gamma(a+k,x)\gamma(a+m+1,x)\\ &-\Gamma(a+m+1,x)\gamma(a+k,x)\\ =&\{\Gamma(a+k)-\gamma(a+k,x)\}\gamma(a+m+1,x)\\ &-\{\Gamma(a+m+1)-\gamma(a+m+1,x)\}\\ &\cdot\gamma(a+k,x)\\ =&\Gamma(a+k)\gamma(a+m+1,x)-\Gamma(a+m+1)\\ &\cdot\gamma(a+k,x) \end{aligned} \tag{37}$$

である．上式の変形では，関係式 (3) を用いている．上式 (37) において，式 (6) を使えば，

$$\begin{aligned} R_{a,m,k}(x) &= \Gamma(a+m+1)\Gamma(a+k)e^{-x}\\ &\cdot\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{a+m+1+i}}{\Gamma(a+m+2+i)}-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{a+k+i}}{\Gamma(a+k+1+i)}\right\}\\ &= \Gamma(a+m+1)\Gamma(a+k)e^{-x}\\ &\cdot\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{a+m+1+i}}{\Gamma(a+m+2+i)}-\sum_{i=0}^{m-k}\frac{x^{a+k+i}}{\Gamma(a+k+1+i)}\right.\\ &\quad\left.-\sum_{i=m-k+1}^{\infty}\frac{x^{a+k+i}}{\Gamma(a+k+1+i)}\right\}\\ &= \Gamma(a+m+1)\Gamma(a+k)e^{-x}\\ &\cdot\left\{-\sum_{i=0}^{m-k}\frac{x^{a+k+i}}{\Gamma(a+k+1+i)}\right\} \end{aligned} \tag{38}$$

が得られる．それで，式 (36) の分子の第 1 項は次のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{a}{x^a}\sum_{k=0}^{m}\frac{R_{a,m,k}(x)}{k!} &= -\Gamma(a+m+1)e^{-x}\frac{a}{x^a}\\ &\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(a+k)}{k!}\sum_{i=0}^{m-k}\frac{x^{a+k+i}}{\Gamma(a+k+1+i)} \end{aligned} \tag{39}$$

上式を x の同じベキでまとめると，

$$\begin{aligned} \frac{a}{x^a}\sum_{k=0}^{m}\frac{R_{a,m,k}(x)}{k!} &= -\Gamma(a+m+1)e^{-x}\frac{a}{x^a}\\ &\cdot\sum_{l=0}^{m}\frac{x^{a+l}}{\Gamma(a+l+1)}\sum_{i=0}^{l}\frac{\Gamma(a+l-i)}{\Gamma(l+1-i)} \end{aligned} \tag{40}$$

となる．上式右辺の最後の和は，ガウスの定理の有限級数版（Vandermonde の定理ともいう）を用いれば，次式のようになる．

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{l}\frac{\Gamma(a+l-i)}{\Gamma(l+1-i)} &= \frac{\Gamma(a+l)}{\Gamma(l+1)}\sum_{i=0}^{l}\frac{(1)_i(-l)_i}{i!(1-a-l)_i}\\ &= \frac{\Gamma(a+l+1)}{l!\cdot a} \end{aligned} \tag{41}$$

ここで，$(\alpha)_i$（$=\Gamma(\alpha+i)/\Gamma(\alpha)$）はポッホハンマーの記号である．したがって，

$$\frac{a}{x^a}\sum_{k=0}^{m}\frac{R_{a,m,k}(x)}{k!} = -\Gamma(a+m+1)e^{-x}\sum_{l=0}^{m}\frac{x^l}{l!} \tag{42}$$

が得られる．上式を用いれば，式 (36) は

$$\begin{aligned} \Phi_{a,m}(x) &= \frac{-\Gamma(a+m+1)e^{-x}\displaystyle\sum_{l=0}^{m}\frac{x^l}{l!}+\Gamma(a+m+1,x)}{\Gamma(a+m+1,x)}\\ &= \frac{\begin{array}{l}-\Gamma(a+m+1)e^{-x}\left\{e^x-\displaystyle\sum_{l=m+1}^{\infty}\frac{x^l}{l!}\right\}\\ +\Gamma(a+m+1)-\gamma(a+m+1,x)\end{array}}{\Gamma(a+m+1,x)}\\ &= \frac{\Gamma(a+m+1)e^{-x}\displaystyle\sum_{l=m+1}^{\infty}\frac{x^l}{l!}-\gamma(a+m+1,x)}{\Gamma(a+m+1,x)} \end{aligned} \tag{43}$$

となる．式 (6) を用いれば，

$$\begin{aligned} &\Phi_{a,m}(x)\\ &= \frac{\begin{array}{l}\Gamma(a+m+1)e^{-x}\\ \cdot\left\{\displaystyle\sum_{l=m+1}^{\infty}\frac{x^l}{l!}-x^{a+m+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(a+m+k+2)}\right\}\end{array}}{\Gamma(a+m+1,x)}\\ &= \frac{\begin{array}{l}\Gamma(a+m+1)x^{m+1}e^{-x}\\ \cdot\left\{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(m+k+2)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{a+k}}{\Gamma(a+m+k+2)}\right\}\end{array}}{\Gamma(a+m+1,x)} \end{aligned} \tag{44}$$

と表される．

上式の｛　｝に注目しよう．式 (9) より，a の区間は $0<a\le 1$ である．$m>x$ のとき，

$$1/\Gamma(m+2)-x^a/\Gamma(a+m+2) \tag{45}$$

は，数値実験から，a の単調増加関数であることが分かる．そのとき，

$$\begin{aligned} &1/\Gamma(n+2)-x^a/\Gamma(a+n+2)\\ &\quad(n=m+1,m+2,\cdots) \end{aligned} \tag{46}$$

も，a の単調増加関数となり，｛　｝の中の k についての和は a の単調増加関数となる．また，$\Gamma(a+m+1)/\Gamma(a+m+1,x)$ は，$m>x$ のとき，$0<a\le 1$ において，ほとんど変動のない数値（$\fallingdotseq 1$）である．それで，$\Phi_{a,m}(x)$ は，m と x を固定したとき，a の単調増加関数となることが分かる．このことは数値実験でも確かめられる．したがって，$a=1$ のとき，$\Phi_{a,m}(x)$ は最大値

$$\Phi_{1,m}(x) = x^{m+1}e^{-x}/\Gamma(m+2,x) \tag{47}$$

情報処理学会論文誌　Vol.53　No.8　1954–1961 (Aug. 2012)

をとる．$\Phi_{1,m}(x)$ は，固定された x に対して，m を大きくすると，小さくなる．これは，式 (2) を変数変換して得られる

$$\Gamma(\nu, x) = e^{-x}x^{\nu-1}\int_0^\infty e^{-u}\left(1+\frac{u}{x}\right)^{\nu-1}du \qquad (48)$$

を用いれば示すことができる．この式 (47) は漸化式の繰返し回数を決めるために次章で使われる重要な式である．

3. 漸化式の繰返し回数

所要の精度で $\gamma(a+n, x)$ を求めるための条件を考えよう．与えられた x と a に対して，式 (34) が成り立つ m の最小値を M_0 とし，式 (35) の m を M_0 に置き換えた式が成り立つ n の最大値を N とする．そのとき，式 (10) の m を M_0 と選べば，計算式 (12) により，$0 \le n \le N$ で $\gamma(a+n, x)$ を 10 進 p 桁の精度で求められることになる．M_0 と N は a（$0 < a \le 1$）に依存するが，本論文で提案する計算法では，M_0 と N は a に依存させないことにする．そのため，M_0 と N は，それぞれ，区間 $0 < a \le 1$ での最大値と最小値に選ばなければならない．

M_0 と N の具体的な求め方について述べよう．まず，M_0 については，$\Phi_{a,m}(x)$ が a の単調増加関数であることより，式 (34) において，$a = 1$ としたもの

$$|\Phi_{1,m}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \qquad (49)$$

を使って，上式を満足する m の最小値を M_0 とする．このとき，$0 < a \le 1$ のすべての a において，$|\Phi_{a,M_0}(x)| < 0.5 \times 10^{-p}$ を満足する．固定された x に対して，$\Phi_{1,m}(x)$ は m の単調減少関数であるので，m を 1 から 1 ずつ増加させたとき，式 (49) を最初に満足する m の値が M_0 となる．次に，N の求め方について考えよう．式 (30) の右辺の関数の様子について調べると，$m+1 > n$ のとき，$\Theta_{a,m,n}(x)$ は a の減少関数であることが分かる．それで，

$$|\Theta_{0,M_0,n}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \qquad (50)$$

を満足する n の最大値を N とすればよい．そのとき，$0 < a \le 1$ のすべての a において，$|\Theta_{a,M_0,N}(x)| < 0.5\times10^{-p}$ を満足する．$\nu > 0$ において，$\Gamma(\nu, x)/\Gamma(\nu)$ と $\gamma(\nu, x)/\Gamma(\nu)$ の関数の様子を調べると，前者は ν の増加関数，後者は ν の減少関数であることが分かる．よって，$\Theta_{0,M_0,n}(x)$ は，固定された M_0 と x に対して，n の増加関数となることが分かる．それで，n を 0 から 1 ずつ増加させたとき，式 (50) を最初に満足しなくなった n の値から 1 を引いた値が N となる．

漸化式の繰返し回数を調べよう．**表 3** には，$x = 1, 2, \cdots, 10, 20, \cdots, 100, 110, \cdots, 200$ について，$p = 16$，すなわち，倍精度の場合の N と M_0 の値を示す（繰返し回数を M_0 に選ぶと，$n \le N$ で倍精度で関数値が求められる）．表中の M_1，M_2，M_3，M_4，M_5 は，それぞれ，$n = N+10$，$n = N+20$，$n = N+30$，$n = N+40$，$n = N+50$ のときに必要な繰返し回数を表している．$\gamma(\nu, x)$ の実際の計算について述べよう．まず，式 (9) より，n を定める．x と n に対して，漸化式の繰返し回数を決めなければならない．N の値は，x がちょうど，表の x 欄の値にあるものであれば，それにより与えられる．そうでなければ，N は，最も近い 2 つの x（x_1 と x_2 とする）に対する N（$N(x_1)$ と $N(x_2)$ とする）を用いた線形補間式の値の小数点以下を切り捨てた次式

$$N(x) = \big\lfloor [\{N(x_2) - N(x_1)\}x + x_2N(x_1) - x_1N(x_2)] /(x_2 - x_1)\big\rfloor \qquad (51)$$

により与えることにする．ここで，$\lfloor\ \rfloor$ は小数点以下の切捨てを表す．n が $0 \le n \le N$ であれば，漸化式の繰り返し回数は M_0 とすればよい．

$n > N$ のときには，x と n が，表の x 欄および n の欄に書かれたものであれば，それらにより示される繰返し回数を用いればよい．しかし，そうでない場合には，最も近い 2 つの x（x_1 と x_2 とする）と最も近い 2 つの n（n_1 と n_2 とする）について，それぞれの線形補間により繰返し回数を決める必要がある．繰返し回数を関数 $M(x, n)$ により表

表 3　漸化式の繰り返し回数（倍精度）
Table 3　Repeated Time of Recurrence (double precision).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	3	2	3	6	7	8	7	9	9	11
M_0 $(n \le N)$	18	22	26	30	33	36	38	41	43	46
M_1 $(n = N+10)$	25	28	31	36	38	41	42	45	47	50
M_2 $(n = N+20)$	34	35	39	43	45	48	49	52	53	56
M_3 $(n = N+30)$	43	44	47	51	53	56	56	59	60	63
M_4 $(n = N+40)$	52	53	56	60	62	64	64	67	68	71
M_5 $(n = N+50)$	62	63	65	69	71	73	73	76	77	80

x	20	30	40	50	60	70	80	90	100
N	21	29	38	51	59	68	78	86	99
M_0 $(n \le N)$	67	85	102	119	134	149	164	178	193
M_1 $(n = N+10)$	71	88	105	122	137	152	167	181	196
M_2 $(n = N+20)$	75	92	108	126	140	155	170	183	199
M_3 $(n = N+30)$	82	97	113	130	144	159	173	187	202
M_4 $(n = N+40)$	89	104	119	136	150	164	178	191	206
M_5 $(n = N+50)$	97	111	125	142	156	169	183	196	212

x	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
N	109	115	126	138	146	154	163	177	182	192
M_0 $(n \le N)$	207	220	234	248	261	274	287	301	313	326
M_1 $(n = N+10)$	210	223	237	251	264	277	290	304	316	329
M_2 $(n = N+20)$	213	225	239	253	266	279	292	306	318	331
M_3 $(n = N+30)$	216	228	242	256	269	282	295	309	321	333
M_4 $(n = N+40)$	220	232	246	260	273	285	298	312	324	336
M_5 $(n = N+50)$	225	237	250	265	277	289	302	316	327	340

表 4 N，M_0，M_1，M_2，M_3，M_4，M_5 の式
Table 4 Expession for N, M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 and M_5.

x	$1 \le x \le 10$	$10 < x \le 200$
N	$1.02x - 0.2$	$0.95x$

x	$1 \le x \le 7.5$	$7.5 < x \le 30$	$30 < x \le 100$	$100 < x \le 200$
M_0	$3.4x + 17$	$2.05x + 26$	$1.5x + 43$	$1.32x + 64$
M_1	$2.7x + 26$	$1.94x + 32$	$1.48x + 48$	$1.31x + 68$
M_2	$2.54x + 34$	$1.7x + 42$	$1.46x + 54$	$1.3x + 70$
M_3	$2.4x + 42$	$1.8x + 46$	$1.46x + 58$	$1.33x + 72$
M_4	$0.174x + 54$	$1.64x + 56$	$1.42x + 65$	$1.32x + 76$
M_5	$2x + 62$	$1.4x + 68$	$1.39x + 73$	$1.29x + 84$

すことにすれば，$x_1 \le x \le x_2$ および $n_1 \le n \le n_2$ のとき，

$$\begin{aligned} &M(x,n) \\ &\quad = \lceil [\{(q-p)(n_2-n)+(s-r)(n-n_1)\}x \\ &\qquad + (px_2-qx_1)(n_2-n)+(rx_2-sx_1)(n-n_1)] \\ &\qquad /\{(n_2-n_1)(x_2-x_1)\}\rceil \end{aligned} \tag{52}$$

で与えられる．ただし，$\lceil\ \rceil$ は小数点以下の切上げを表し，

$$\begin{aligned} &p = M(x_1,n_1), \quad q = M(x_2,n_1), \quad r = M(x_1,n_2), \\ &s = M(x_2,n_2) \end{aligned} \tag{53}$$

である．

また，上述の方法とは異なり，x の区間を適当に分け，それぞれの区間で，N，M_0，M_1，M_2，M_3，M_4 および M_5 を x の 1 次式で近似したものを用いることも考えられる．表 4 には，そのような 1 次式を示している．この表を用いた場合には，最大で 5 回程度の繰返し回数の無駄が生じる．

さらに，上述の 2 つの方法より能率的に漸化式の繰返し回数を与える方法を述べよう．それは，表 3 の代わりに，文献 [8] のように，1 から 200 までの 200 個の x に対する表を作成しておき，それを用いるものである．そのとき，N の値は，x の小数点以下を切り捨てた整数値の x に対する値を用い，繰返し回数は，x の小数点以下を切り上げた整数値の x に対する値を用いることになる．このようにすれば，n についてだけの線形補間を考えればよい．

4. 計算法 II の誤差解析

式 (13) の k を $k-1$ に変えると，

$$F_{k-1}(x) = (F_k(x) + x^{a+k-1}e^{-x})/(a+k-1) \tag{54}$$

となる．上式と式 (13) から $x^{a+k}e^{-x}$ の部分を消去すると，式 (11) が得られる．したがって，漸化式 (13) により計算された $F_m(x)$，$F_{m-1}(x)$，$\cdots$，$F_0(x)$ は漸化式 (11) を満足する．それで，漸化式の振舞いは式 (22) で表されることになる．計算法 I との違いは，初期値が式 (10) ではなく，

$$F_{m+1}(x) = 0, \quad F_m(x) = x^{a+m}e^{-x}/(a+m) \tag{55}$$

であることである．

$$\begin{aligned} &\xi\gamma(a+m+1,x) + \eta\Gamma(a+m+1,x) = 0 \\ &\xi\gamma(a+m,x) + \eta\Gamma(a+m,x) = x^{a+m}e^{-x}/(a+m) \end{aligned} \tag{56}$$

より，ξ と η を決めると，

$$\begin{aligned} F_n(x) = &\frac{\Gamma(a+m+1,x)}{\Gamma(a+m+1)}\gamma(a+n,x) \\ &- \frac{\gamma(a+m+1,x)}{\Gamma(a+m+1)}\Gamma(a+n,x) \end{aligned} \tag{57}$$

が得られ，上式を変形すると，

$$\begin{aligned} \gamma(a+n,x) = &\left(1 - \Phi^*_{a,m}(x)\right) F_n(x) \\ &+ \frac{\gamma(a+m+1,x)}{\Gamma(a+m+1,x)}\Gamma(a+n,x) \end{aligned} \tag{58}$$

となる．ただし，

$$\Phi^*_{a,m} = -\frac{\gamma(a+m+1,x)}{\Gamma(a+m+1,x)} \tag{59}$$

である．式 (58) は関数 $\gamma(a+n,x)$ とその計算値 $F_n(x)$ の関係を表している．この式は，$\Phi_{a,m}(x)$ が $\Phi^*_{a,m}(x)$ になっている点を除いて，式 (28) と同じであることに注意しよう．

式 (14) を出発値として，漸化式 (13) を繰り返し適用することにより得られた $F_n(x)$ を用いて，式 (15) により，10 進 p 桁の精度で $\gamma(a+n,x)$ を計算できるためには，計算法 I と同様に，次の 2 つの不等式

$$|\Phi^*_{a,m}(x)| < 0.5 \times 10^{-p}, \quad |\Theta_{a,m,n}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \tag{60}$$

が成り立てばよい．

計算式 (15) の相対精度

$$\epsilon^*_{a,m,n}(x) = \frac{F_n(x) - \gamma(a+n,x)}{\gamma(a+n,x)} \tag{61}$$

は，式 (58) を用いれば，

$$\epsilon^*_{a,m,n}(x) = \frac{\Phi^*_{a,m}(x) - \Theta_{a,m,n}(x)}{1 - \Phi^*_{a,m}(x)} \tag{62}$$

と表され，$|\Phi^*_{a,m}(x)| << 1$ のときには，

$$\epsilon^*_{a,m,n}(x) \approx \Phi^*_{a,m}(x) - \Theta_{a,m,n}(x) \tag{63}$$

と近似できる．

$\Phi^*_m(x)$ は a の減少関数であるので，$a = 0$ のとき，最大値をとる．計算法 I の場合と同様に，M_0 は

$$|\Phi^*_{0,m}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \tag{64}$$

を満足する m の最小値となる．計算法 I の場合と同様にして，$x = 1, 2, \cdots, 10, 20, \cdots, 100, 110, \cdots, 200$ について，$p = 16$，すなわち，倍精度の場合の N と M_0，M_1，M_2，

M_3，M_4，M_5 を求めると，表 3 より少しだけ大きい値が得られた．具体的には，これらの値は，$x = 1, 2, \cdots, 10$ では，1〜2，$x = 20, 30, \cdots, 100$ では，3〜7 大きく，$x = 110, 120, \cdots, 200$ では，4〜7 大きくなることが分かった．

なお，紙面の都合で示さないが，この誤差解析と数値実験の結果は一致した．これは，この誤差解析が正しいことを例証している．

5. おわりに

本論文では，漸化式を用いる不完全ガンマ関数 $\gamma(\nu, x)$ の数値計算法の誤差解析について述べた．誤差の表式を導出し，変形することにより，簡潔な誤差表示式を得た．また，倍精度で関数値を計算するために必要な漸化式の繰返し回数を求めた．

謝辞　2011 年 5 月に，名古屋大学名誉教授二宮市三先生が 89 歳で逝去されました．生前にいただいたご指導，ご支援，ご厚情に深謝いたします．また，漸化式を用いる計算法 II について，ご教示いただいた査読者に感謝いたします．

参考文献

[1] Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, p.260, Dover Publications (1972).

[2] 山内二郎，宇野利雄，一松　信：電子計算機のための数値計算法 III，pp.132–153, 培風館 (1972).

[3] Gautschi, W.: A Computational Procedure for Incomplete Gamma Functions, *ACM Trans. Mathematical Software*, Vol.5, No.4, pp.466–481 (1979).

[4] Gautschi, W.: Computational Aspects of Three-term Recurrence, *SIAM Review*, Vol.9, No.1, pp.24–82 (1967).

[5] Gautschi, W.: The Computation of Special Functions by Linear Difference Equations, *Advances in Difference Equations*, Elaydi, S., Gyori, I. and Ladas, G. (Eds.), pp.213–243, Gordon and Breach Science Publishers (1997).

[6] 吉田年雄，二宮市三：x が小さい場合の不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu, x)$ の数値計算，情報処理学会論文誌，Vol.23, No.5, pp.522–528 (1982).

[7] 吉田年雄，二宮市三：x が大きい場合の不完全ガンマ関数 $\Gamma(\nu, x)$ の数値計算，情報処理学会論文誌，Vol.25, No.2, pp.306–312 (1984).

[8] 二宮市三，吉田年雄，長谷川武光，秦野甯世，杉浦　洋，櫻井鉄也，細田陽介：数値計算のわざ，pp.28–30, 共立出版 (2006).

付　　録

A.1 連分数展開式 (7) の誤差解析

計算法 A で連分数を計算する過程を考える．式 (17) は

$$P_0 = 0,\ P_1 = 1 \tag{A.1}$$

となり，式 (19) は

$$P_k = (k-1+\nu+x)P_{k-1} - (k-2+\nu)xP_{k-2} \tag{A.2}$$

となる．上式で $k \to k+1$ とした式は漸化式 (11) と同じであるので，上の漸化式の一般解は

$$P_k(x) = \xi_p\gamma(\nu+k, x) + \eta_p\Gamma(\nu+k, x) \tag{A.3}$$

と表され，式 (A.1) より，ξ_p と η_p を決めると，

$$P_k = \{-\Gamma(\nu, x)\gamma(\nu+k, x) + \gamma(\nu, x)\Gamma(\nu+k, x)\} /(\Gamma(\nu)x^a e^x) \tag{A.4}$$

が得られる．同様にして，Q_k についても ($Q_0 = 1$, $Q_1 = \nu$)，

$$Q_k = \{\gamma(\nu+k, x) + \Gamma(\nu+k, x)\}/\Gamma(\nu) \tag{A.5}$$

が得られる．したがって，第 m 近似分数 P_m/Q_m は

$$P_m/Q_m = \{\Gamma(\nu+m)\gamma(\nu, x) - \Gamma(\nu)\gamma(\nu+m, x)\} /(x^\nu e^{-x}\Gamma(\nu+m)) \tag{A.6}$$

と表され，相対誤差 $\epsilon^{(c)}_{\nu,m}(x)$ は

$$\epsilon^{(c)}_{\nu,m}(x) = \frac{x^\nu e^{-x}P_m/Q_m - \gamma(\nu, x)}{\gamma(\nu, x)} = \frac{\Gamma(\nu)\gamma(\nu+m, x)}{\Gamma(\nu+m)\gamma(\nu, x)} \tag{A.7}$$

となる．与えられた ν と x に対して，$|\epsilon^{(c)}_{\nu,m}(x)| < 10^{-16}$ を満たす最小の m を使えば，そのとき，$\gamma(\nu, x)$ は計算値 $x^\nu e^{-x}P_m/Q_m$ により，倍精度で求められることになる．

紙面の都合で示さないが，この誤差解析と数値実験の結果は一致した．これは，誤差解析が正しいことを例証している．

吉田 年雄　（正会員）

昭和 19 年生．昭和 43 年慶應義塾大学工学部電気工学科卒業．昭和 48 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程単位取得満期退学．同年より名古屋大学助手．昭和 60 年より名古屋大学講師．昭和 61 年より中部大学助教授．平成 2 年より同教授．平成 17 年より中部大学情報科学研究所長．