プログラムのページ

担当　吉　沢　　正

7105 数式処理言語 (PL/I FORMAC) の Riemann 幾何への応用*

朝長康郎(宇都宮大学)，檜山澄子(東大地震研究所)

§0 はじめに

われわれ数学者にとって，数式処理言語は大きな魅力ではあるが，現在のところ式の簡約化の困難さ，演算時間を多く必要とすることなどの理由のために，まだそれほどに実用的面では効を奏していない．確かに問題が数値計算にたよれる場合には，経済性，能率からいってもそちらの方がすぐれているが，多変数の場合の演算には，大きな威力となると思われる．しかし現在はまだ，種々問題を解くことを試みることにより，数式処理による可能性・実用性などの模索の段階であろうかと思われる．そのような意味からわれわれも Riemann 幾何のテンソルや Christoffel の記号の計算およびそれらを含む種々の計算などに利用してみた．一般にこれらは，手計算では非常に複雑な式のため，苦労するが FORMAC を使えば，問題によっては意外に簡単に解け，すでに書かれていた式のミスを発見したというようなこともあった。

以下に使用の一例を示す．

§1 問題の説明

Weyl の共形曲率テンソル $C_{jkl}{}^i$ は次のように定義される．

$$C_{jkl}{}^i \equiv R_{jkl}{}^i - \frac{1}{n-2}(R_{jk}\delta_l{}^i - R_{jl}\delta_k{}^i + g_{jk}R_l{}^i - g_{jl}R_k{}^i) + \frac{R(g_{jk}\delta_l{}^i - g_{jl}\delta_k{}^i)}{(n-1)(n-2)}$$

$$(i, j, k, l = 1, \cdots, n)$$

$n=3$ のとき，$C_{jkl}{}^i \equiv 0$ であることを示せ

§2 計算方法

定点では適当に座標を選んで，

$g_{ij}=\delta_{ij}=g^{ij}$ および $\{{}_j{}^i{}_k\} = \dfrac{1}{2} g^{ih}\left(\dfrac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} + \dfrac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^h}\right) = 0$ のようにできるから，

$$R_{jkl}{}^i = R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k}\right) \tag{1}$$

としてよい。すると，

$$R_{ij} \equiv R_{ijk}{}^k = R_{1ij1} + R_{2ij2} + R_{3ij3} \tag{2}$$

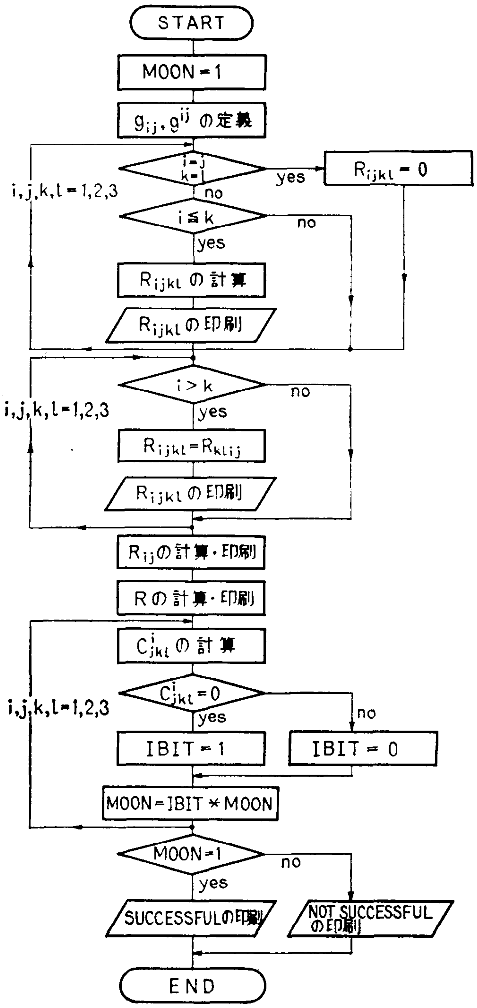

図 1 フローチャート

* An application of the symbolic manipulation of mathematical expressions (PL/I FORMAC) to Riemannian geometriy.

演算結果

```
                                 (1 2)                          2
                                                              (1  )
R(1,2,1,2) = 1/2 ( - 2 GGG(1,2)      .( X(1), X(2), X(3) ) + GGG(2,2)     .( X(1), X(2), X(3) ) + GGG(1,1)
                                                                                                  2
                                                                                                (2  )
     .( X(1), X(2), X(3) ) )
```

$$R_{1212}=\frac{1}{2}\left(-2\frac{\partial g_{12}(x_1x_2x_3)}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 g_{22}(x_1x_2x_3)}{\partial x_1\partial x_1}+\frac{\partial^2 g_{11}(x_1x_2x_3)}{\partial x_2\partial x_2}\right)$$ を意味する

```
                            2
                          (1  )                          (1 3)                                   (1 2)
R(1,2,1,3) = 1/2 ( GGG(2,3)     .( X(1), X(2), X(3) ) - GGG(1,2)     .( X(1), X(2), X(3) ) - GGG(1,3)     .( X(1), X
                   (2 3)
(2), X(3) ) + GGG(1,1)     .( X(1), X(2), X(3) ) )

                              (1 2)                          2                                     2
                                                           (1  )                                 (2  )
R(1,2,2,1) = 1/2 ( 2 GGG(1,2)     .( X(1), X(2), X(3) ) - GGG(2,2)     .( X(1), X(2), X(3) ) - GGG(1,1)     .( X(1)
, X(2), X(3) ) )
```

R_{ijkl} の結果　以下省略

```
                      (1 2)                              (2 3)                                       2
                                                                                                   (2  )
RR(3,1) = 1/2 GGG(2,3)     .( X(1), X(2), X(3) ) + 1/2 GGG(1,2)     .( X(1), X(2), X(3) ) - 1/2 GGG(1,3)     .( X(1)
                           (1 3)
, X(2), X(3) ) - 1/2 GGG(2,2)     .( X(1), X(2), X(3) )

                           2
                         (1  )                               (1 3)                                   (1 2)
RR(3,2) =  - 1/2 GGG(2,3)     .( X(1), X(2), X(3) ) + 1/2 GGG(1,2)     .( X(1), X(2), X(3) ) + 1/2 GGG(1,3)     .( X
                         (2 3)
(1), X(2), X(3) ) - 1/2 GGG(1,1)     .( X(1), X(2), X(3) )

                    (2 3)                                  2                                         2
                                                         (1  )                                     (2  )
RR(3,3) = GGG(2,3)     .( X(1), X(2), X(3) ) - 1/2 GGG(3,3)     .( X(1), X(2), X(3) ) - 1/2 GGG(3,3)     .( X(1), X(
                         (1 3)                                  2                                       2
                                                              (3  )                                   (3  )
2), X(3) ) + GGG(1,3)     .( X(1), X(2), X(3) ) - 1/2 GGG(2,2)     .( X(1), X(2), X(3) ) - 1/2 GGG(1,1)     .( X(1)
, X(2), X(3) )
```

R_{ij} の結果　以下省略

```
                (2 3)                               2                                       2
                                                  (1  )                                   (2  )
RRR = 2 GGG(2,3)     .( X(1), X(2), X(3) ) - GGG(3,3)     .( X(1), X(2), X(3) ) - GGG(3,3)     .( X(1), X(2), X(3) )
                                                                                                2
          (1 2)                                  (1 3)                                        (1  )
 + 2 GGG(1,2)     .( X(1), X(2), X(3) ) + 2 GGG(1,3)     .( X(1), X(2), X(3) ) - GGG(2,2)     .( X(1), X(2), X(3) )
            2                                   2                                      2
          (3  )                               (2  )                                  (3  )
 - GGG(2,2)     .( X(1), X(2), X(3) ) - GGG(1,1)     .( X(1), X(2), X(3) ) - GGG(1,1)     .( X(1), X(2), X(3) )
```

R の結果

```
THE PROOF OF THIS EXERCISE  IS SUCCESSFUL
```

$$R\equiv g^{ij}R_{ij}=R_{11}+R_{22}+R_{33} \qquad (3)$$

となる．

(1), (2), (3)を計算して証明すべき式の右辺に代入する．その際

$$R_{ijkl}=0\ (i=j\ \text{または}\ k=l),\quad R_{ijkl}=R_{klij}$$

なる関係があるので，$i\leqq k,\ i\neq j,\ k\neq l$ なる場合だけ計算を行なえばよい．

すべての i, j, k, l に対し $C_{jkl}{}^{i}\equiv 0$ のときのみ IBIT $=1$ とおき THE PROOF IS SUCCESSFUL を印刷する．

§3 プログラムおよびプログラムの説明

プログラム中における記号は次のことがらを意味する

$G(I,J)=g_{ij}=\delta_{ij},\ GINV(I,J)=g^{ij}=\delta_{ij},$
$X(I)=x_i,\ GGG(I,J)=g_{ij}(x_1,x_2,x_3),$
$R(I,J,K,L)=R_{ijkl},\ RRR=R$（カスラー曲率）
$C(I,J,K,L)=C_{jkl}{}^{i}$

次にプログラムに用いられた FORMAC 文について説明をする．プログラム中の LET(……) という形式で書かれたものが FORMAC 文で，他は PL/I 言語である．PL/I で使用する変数と FORMAC で使用する変数は独立なので，もし PL/I の変数の値を FORMAC の変数の値として使用するときは" "でかこんで使わなければならない．プログラムの 6 行 LET (I="I"; J="J") はその例で PL/I の変数 I の値を FORMAC の変数 I に代入するという意味である．

プログラム 12 行の FORMAC 文 LET(GG(I, J)=GGG(I, J).(X(1), X(2), X(3))) は GG(I, J) が変数 X(1), X(2), X(3) の関数であると定義している．

25 行目にある DERIV(A 1, B 1, 1, B 2, 1) は偏微分を ∂^2A 1/∂B 1 ∂B 2 を意味する．

なお37行目 LET(RR(J, K)=EXPAND(RR(J,K))) は RR(J, K) の分子のカッコをほどいて展開し，式を簡約化し，それをあらためて RR(J, K) とするという FORMAC 文である．

プログラム 20～24 行は $g_{jk}=g_{kj},\ \partial^2 g_{jk}/\partial x^i\partial x^l=\partial^2 g_{kj}/\partial x^l\partial x^i$ なる対称性があるのでそれの処理である．つまり，g_{jk} においては $j\leqq k$ であるように入れ

```
 INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR
 WEYL:PROC OPTIONS(MAIN);
    FORMAC_OPTIONS;
    DCL DERFMC ENTRY (BINARY FIXED(31),BINARY FIXED(31));
     LET(MOON=1);
    DO I=1 TO 3;DO J=1 TO 3; LET(I="I";J="J");  PL/I 変数をFORMAC変数に代入
    IF I=J THEN DO;LET(G(I,J)=1;GINV(I,J)=1);END;
    ELSE DO;LET(G(I,J)=0;GINV(I,J)=0);END;
    END;END;
/*  GGG(I,J)=G(I,J)    */
    DO I=1 TO 3;DO J=1 TO 3;LET(I="I";J="J");
    LET(GG(I,J)=GGG(I,J).(X(1),X(2),X(3))) ;END;END;  G(I,J)は X(1),X(2),X(3)の関数
    DO I=1 TO 3;DO J=1 TO 3; DO K=1 TO 3;DO L=1 TO 3;
     LET(I="I";J="J";K="K";L="L");
     IF I=J|K=L THEN LET(R(I,J,K,L)=0);
     ELSE DO;
     IF I<=K THEN LET(A1=GG(I,K);B7=X(I);B8=X(K));
     ELSE GO TO LOOP1;
     IF J<=K THEN LET(A2=GG(J,K);B5=X(J);B6=X(K));
       ELSE LET(A2=GG(K,J);B5=X(K);B6=X(J));
     IF I<=L THEN LET(A3=GG(I,L);B3=X(I);B4=X(L));
       ELSE LET(A3=GG(L,I);B3=X(L);B4=X(I));
     IF J<=L THEN LET(A4=GG(J,L);B1=X(J);B2=X(L));
       ELSE LET(A4=GG(L,J);B1=X(L);B2=X(J));
     LET(R(I,J,K,L)=1/2*(DERIV(A1,B1,1,B2,1)-DERIV(A2,B3,1,B4,1)
         -DERIV(A3,B5,1,B6,1)+DERIV(A4,B7,1,B8,1)));
     PRINT_OUT(R(I,J,K,L));
 LOOP1:END;END;END;END;END;
     DO I=1 TO 3;DO J=1 TO 3;DO K=1 TO 3;DO L=1 TO 3 WHILE(I>K);
     LET(I="I";J="J";K="K";L="L");
     LET(R(I,J,K,L)=R(K,L,I,J));
                  PRINT_OUT(R(I,J,K,L));
     END;END;END;END;
     DO J=1 TO 3;DO K=1 TO 3;
     LET(J="J";K="K");
     LET(RR(J,K)=R(1,J,K,1)+R(2,J,K,2)+R(3,J,K,3));
     LET(RR(J,K)=EXPAND(RR(J,K)));      RR(J,K)の分子に分配則を適用せよ
     PRINT_OUT(RR(J,K));
     END;END;
     LET(RRR=RR(1,1)+RR(2,2)+RR(3,3));
  /* R=RRR */
     PRINT_OUT(RRR);
  /* RIN=THE 1ST. TERM */
     DO I=1 TO 3;DO J=1 TO 3;DO K=1 TO 3;DO L=1 TO 3;
     LET(I="I";J="J";K="K";L="L");
    LET(C(I,J,K,L)=R(I,J,K,L)-(RR(J,K)*G(I,L)-RR(J,L)*G(I,K)
     +RR(I,L)*G(J,K)-RR(I,K)*G(J,L))
     +RRR/2*(G(J,K)*G(I,L)-G(J,L)*G(K,I)));
     LET(C(I,J,K,L)=EXPAND(C(I,J,K,L)));
   IF IDENT(C(I,J,K,L);0) THEN LET(IBIT=1);ELSE LET(IBIT=0);
     LET(MOON=MOON*IBIT);
    END;END;END;END;
     IF IDENT(MOON;1) THEN PUT SKIP EDIT('THE PROOF OF THIS EXERCISE
  IS SUCCESSFUL')(A);
     ELSE PUT SKIP EDIT('THE PROOF OF THIS EXERCISE IS NOT SUCCESSFUL')
   (A);
 END WEYL;
```

$g_{ij}=g_{ji}$, $\dfrac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l}=\dfrac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^l \partial x^i}$ の対称性の処理

$R(I,J,K,L)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial^2 A1}{\partial B1\,\partial B2}-\dfrac{\partial^2 A2}{\partial B3\,\partial B4}-\dfrac{\partial^2 A3}{\partial B5\,\partial B6}+\dfrac{\partial^2 A4}{\partial B7\,\partial B8}\right\}$ の計算

$R_{ijkl}=R_{klij}$ の処理

かえ，$\partial^2 g_{jk}/\partial x^i \partial x^l$ においては常に $i \leqq l$ であるように入れかえを行なう．

17行目および29～31行では $R_{ijkl}=R_{klij}$ の対称性の性質を用いる。

プログラム言語　PL/I FORMAC

演算時間　Compile 0.08 mins.　Elapse time 0.39 mins.　Core time 1.2 mins.

Core Size　200 K バイト

機　種　IBM 360/75

§4 結　果

Riemann 幾何は指標の変化が複雑なため，手計算ではおうおうにして誤りやすい．こうしたものはできるだけ計算機にやらせたいわけであるが，§0 で述べた理由から，問題によっては実用にならない場合も多い．

しかし，指標の変化にだけ注目して計算のできる場合も多いので，そういう所に数式処理言語による計算を利用すれば，かなり実用的になると思われる．実際 Cambridge 大のシステムは，Riemann テンソル等の計算にむくよう作られており，使用例やそれらの計算の機種間の演算時間の比較の報告がある．

参考文献

1) 朝長康郎：リーマン幾何学入門，pp. 41～131. 共立出版，1970.

2) D. Barton 他：An Algebra System, The Comp. J., Vol. 13, No. 1, pp. 32～38.

3) D. Barton 他：The Structure of the Cambridge Algebra system, The Comp. J., Vol. 13, No. 3, pp. 243～247.

4) 立花俊一：リーマン幾何学演習，pp. 1～57, 朝倉書店，1968.