

## 円弧による曲線の近似表現\*

釜江尚彦\*\* 小杉 信\*\*

## Abstract

This paper discusses a smooth representation of a curve by concatenating circular arcs. Hosaka gave a method to connect given points succeedingly with circular arcs each of which has the same tangents at both ends as the adjacent ones. The weak point of this method is the oscillatory phenomena seen in the obtained curve, as pointed by Hosaka himself. The processing of general curves is divided into two aspects; encoding process and decoding process. In the encoding procedure the prevention of the oscillation is considered. Namely, the whole process consists of following steps; (1) encoding an original curve as a chain of primary sampling points which approximate the curve and of secondary sampling points which damp the oscillation, (2) restoring the curve by connecting total sampling points according to Hosaka's method. Thus, any smooth curve can be represented as a sequence of points on the curve without the loss of smoothness.

## 1. ま え が き

グラフィック・ディスプレイ装置, XY プロッタ, テレビ電話, ファクシミリ受信機などでは図形の表示が可能である。このように図形を用いるシステムでは図形データの取り扱い方法, 端末における図形の適切な表現方法などが重要な課題となる。すなわち, 一般に膨大な情報量をもつ図形を計算機で扱うため, 図形情報の処理, 記憶, 伝送などには図形の特徴をなす点を抽出する(サンプリング)適切な情報圧縮が必要であり, また端末への出力時にはサンプリング過程にふさわしい曲線で点列を結合して図形を復元することなどが必要である。

本論文は図形情報とくに曲線をそのなめらかな性質を失わないよう符号化し, 記憶または伝送する方法について考察する。なめらかな曲線は情報処理システムにおいては(1)もともと導関数が連続な曲線の記憶および伝送, (2)手書き図形あるいは実測値の平滑化などの面に登場する。

直線による曲線の近似方法, すなわち曲線の折線近似方法はすでにいくつか提示されているが<sup>1)</sup>, 直線は本質的になめらかな曲線を表現するのは困難であり,

なめらかさをもたせるためには膨大な情報量(標本点列数)を必要とする。しかし, 円弧などの曲線を用いればある程度のなめらかさ(1次導関数まで連続であるという意味で)を与えることが可能であり, また適当な点列を円弧でなめらかに結ぶアルゴリズムはすでにとりあげられた例がある<sup>2)</sup>。この文献<sup>2)</sup>の方法は標本点列から曲線を復元する過程が単純であり, しかもなめらかな曲線が再現できる利点はあるが, 復元の過程で後述するような振動を生じることが大きな欠点である。しかし, この振動はやはり後述するように標本点の選択によって防止することが可能である。

本論文では曲線の取り扱いを2つの過程——すなわち曲線からその標本点を抽出する過程と標本点列から曲線を復元する過程に分離して考える。このことは前者は曲線の符号化であり, 後者は同じく復号化の操作と考えることもできる。そして上述のような欠点のある復号法をとるときはそれを符号化の過程で補うという考え方で曲線を取り扱う。

ところで, このような目的に適合する最も基本的な曲線として  $y=f(x)$  の形式であらわされる陽関数をとりあげる。すると, 解析的な形であらわせない任意点列においても, 点列を陽関数で近似されるいくつかのセグメントに分割することにより曲線で結ぶことが可能となることは容易に理解できるであろう。

\* An approximation of a curve with circular arcs, by Takahiko Kamae and Makoto Kosugi (Musasino Electrical Communication Laboratory, N. T. T.)

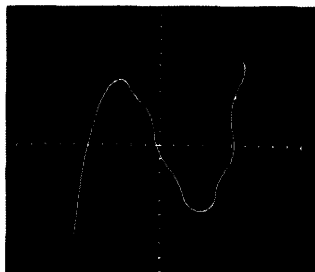
\*\* 日本電信電話公社武蔵野電気通信研究所

2. 円弧による曲線の近似

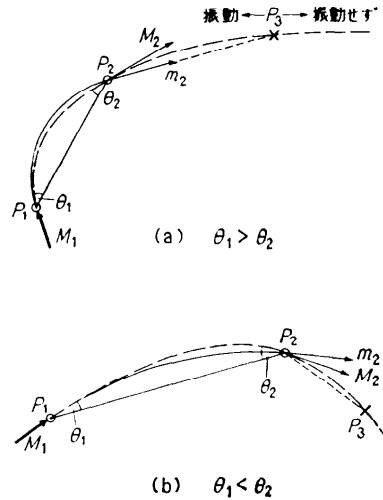
円弧による点列結合の考え方は文献2)にもみられるが、すでに指摘されているように文献2)の結合アルゴリズムにおいては Fig. 1 のような振動があらわれる。円弧を用いて点列をなめらかに結合するとき、このアルゴリズムは各セグメントの端点で接線は連続であるという条件を課す。すなわち2端点と片方の接線で円弧を結び、ついで他方の接線を求めるという操作をくりかえす。したがって点列と初期接線が全曲線形状を決定する。このため各セグメントにおける原曲線からのずれが累積して Fig. 1 にみられる振動を生じることが多い。そこで、まず振動の詳しい原因を追求し、つぎにこれを防止する手段をみいだす。

2.1 振動の原因

この振動現象は原曲線の曲率がしだいに小さくなるような領域、すなわち Fig. 2 (a) のように  $\theta_1 > \theta_2$  の場合 ( $\theta$  は原曲線と弦のなす角) には著しい。そこで同図を用いて振動の原因を考える。この図で原曲線(破線で示す)上の点  $P_1, P_2$  が最初の2点として与えられており、 $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$  の順序で接続するものとする。また  $P_1$  における入力接線  $M_1$  (以下接続方向にしたがって、セグメント両端における接線をそれぞれ入力接線、出力接線とよぶ) も原曲線から与えられた条件である。最初のセグメントの出力接線は円弧  $\widehat{P_1P_2}$  から自動的に決定しこれを  $m_2$  とする。つぎに  $m_2$  を入力接線、 $P_3$  を新しい標本点として円弧  $\widehat{P_2P_3}$  を決定するとき、 $m_2$  の方向と弦  $P_2P_3$  の方向を比較し、弦  $P_2P_3$  が  $m_2$  の内側にむく位置に  $P_3$  をとれば円弧  $\widehat{P_1P_2}$  と  $\widehat{P_2P_3}$  は同じ方向に凸となり振動を生じない。しかし、 $P_3$  を  $m_2$  と原曲線との交点より  $P_2$  側にとれば  $m_2$  が弦  $P_2P_3$  の内側をむき、その結果円弧  $\widehat{P_2P_3}$  の出力接線は弦  $P_2P_3$  の外側をむく。したが



第1図 円弧近似曲線の振動現象  
Fig. 1 Oscillation induced by catenation of circular arcs.



第2図 円弧による点列接続

Fig. 2 Sampling method for an approximate curve with circular arcs.

って原曲線の弧のむきがわからなにかぎり、円弧による近似曲線は原曲線の内にはいることと外に出ることを交互にくりかえす。すなわち凹凸の円弧をくりかえして振動的になる。

以上より、振動の原因は接線と弦の方向のかねあいによるものといえる。したがって  $\theta_1 > \theta_2$  の場合は弦  $\overline{P_2P_3}$  がたえず  $m_2$  より内側にむくような  $P_3$  の選択ができれば振動をなくすことが可能はずである。ところが原曲線の曲率がしだいに大きくなるかぎりこのようなことは非常に困難である。さらに Fig. 2 (a) に示すように、原曲線は  $\theta_1 > \theta_2$  であるのに対して円弧では  $\theta_2 = \theta_1$  として  $m_2$  を得ている。したがって  $m_2$  は原曲線の接線  $M_2$  の内側をむき  $P_3$  の位置選択に制限を課す。一方、 $\theta_1 < \theta_2$  の場合は Fig. 2 (b) のように  $m_2$  は  $M_2$  より外側をむくため  $P_3$  の選択は大変楽になる。しかし、この場合でも  $m_3$  を接続条件として次の円弧  $\widehat{P_3P_4}$  を決定するため、 $P_3$  における接線が原曲線の内側へむきすぎると  $P_3$  以降で振動を生じうる。以上から、振動をともなうことなく逐次的に点列を抽出する方法は非常に困難であることがわかる。したがって、一般の曲線に対して振動を生じさせないような標本点抽出のアルゴリズムが必要となる。

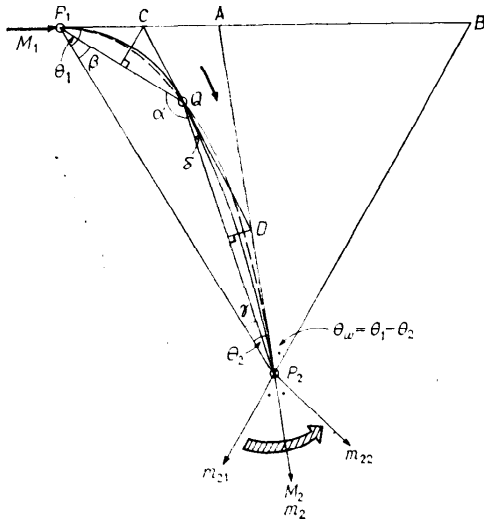
2.2 振動を防止する標本点の抽出

ここでは、まず原曲線を近似する標本点列(1次標本点とよぶ)をとり、つぎに各標本点の間に振動をおさえるための標本点(2次標本点とよぶ)をとり、結果として振動を生じさせないような標本点列を得る方

法を考える。

各標本点において1次導関数が連続であるように標本点を円弧で結合するアルゴリズムにおいて、振動を防止するための点(2次標本点)としては、2次標本点を含む全標本点を結合して得られた曲線が1次標本点において原曲線の1次導関数と等しい導関数を有するように点を選択することである。こうすることによって本アルゴリズムによる曲線の復元の過程で2次標本点より以前に復元した部分の影響をストップさせることができる。問題点としては、隣接する1次標本点の間にこのような2次標本点が存在するかどうか、およびもし存在すればそれをいかにしてみいだすかである。

上記の考え方にもとづき、Fig. 3 に示すような原曲線(破線)の1セグメント  $P_1P_2$  ( $P_1, P_2$  は1次標本点)内に1点  $Q$  (2次標本点)をとり、 $P_1$  における入力接線として原曲線の接線  $M_1$  をあてはめて3点  $P_1, Q, P_2$  を円弧で順に結合し、 $Q$  を原曲線に沿って  $P_1$  から  $P_2$  まで移動させたとき、 $P_2$  における出力接線  $m_2$  のうち原曲線の接線  $M_2$  (以下最適出力接線とよぶ)に一致するものが存在するかどうかを調べる。このため  $m_2$  を  $Q$  の動きを決定するパラメータを用いて表示することが必要となる。また、最適出力接線を導びく点  $Q$  が得られても円弧  $\widehat{P_1Q}, \widehat{QP_2}$  が互いに



第3図 振動抑止点  $Q$  の選択 ( $\theta_1 > \theta_2$ )  
ただし、点  $Q$  は最適出力接線  $M_2$  を導びく位置を示す

Fig. 3 Secondary sampling points which prevent the oscillation ( $\theta_1 > \theta_2$ ).

逆方向をむく可能性がある。点列間隔が狭い場合はそれほど問題とはならないが、この区間内振動と最適出力接線との関係についてもふれる。

まずはじめに  $m_2$  と  $Q$  の関係の数式化をはかる。

Fig. 3 で原曲線はセグメント  $P_1P_2$  において少なくとも2次導関数まで連続、かつ曲率は  $P_1$  から  $P_2$  にむかって減少し、この間曲率符号は不変とする。したがって  $\theta_1 > \theta_2$  あり、さらに

$$0 < \theta_2 < \theta_1 < \pi/2 \tag{1}$$

とする。これらの条件は原曲線を1次サンプリングするとき、セグメント内に変曲点と曲率の極大、極小点を含まないことを意味するがなんら一般性を失うことはない。ただし曲率がしだいに増大する場合 ( $\theta_2 > \theta_1$ ) については後述する。

$P_1, P_2, Q$  を含む面内において  $P_1$  から  $P_2$  へむかう方向を基準として反時計方向の回転角を正とすると、Fig. 3 で  $P_1, P_2$  における接線  $M_1, M_2$  は

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \tan \theta_1 \\ M_2 &= -\tan \theta_2 \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

ただし式(1)より  $\tan \theta_1 > \tan \theta_2 > 0$

さらに  $\angle QP_1P_2 = \beta, \angle QP_2P_1 = \gamma$ , 弦  $\overline{P_1Q}, \overline{QP_2}$  の勾配を  $n_1, n_2$  とすると

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \tan \beta \\ n_2 &= -\tan \gamma \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

$P_1$  で  $M_1$  なる入力接線を持ち、 $P_1, Q, P_2$  を円弧を用いて順に結合したときの  $P_2$  における出力直線  $m_2$  は、上記  $M_1, n_1, n_2$  を用いて次式で表わされる(付録参照)。

$$m_2 = \frac{-2(n_2 - n_1)(n_1 n_2 + 1) + M_1 \{ (n_1 - n_2)^2 - (n_1 n_2 + 1)^2 \}}{(n_1 - n_2)^2 - (n_1 n_2 + 1)^2 + 2 M_1 (n_2 - n_1)(n_1 n_2 + 1)} \tag{4}$$

ところで  $\angle P_1QP_2 = \alpha$  とすれば、 $\alpha$  は Fig. 3 から開区間  $P_1 < Q < P_2$  で明らかに連続に変化し、また  $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$  より

$$\tan \alpha = -\tan(\beta + \gamma) = \frac{n_2 - n_1}{1 + n_1 n_2} \tag{5}$$

ここで点  $Q$  の動きに対する  $\alpha$  の変化を調べる。まず  $\theta_2 < \theta_1 < \pi/2$  より  $Q$  は弦  $\overline{P_1P_2}$  を直径とする半円の内側に存在すること、 $Q \Rightarrow P_1$  のとき  $\alpha$  は最小となり  $\alpha \Rightarrow (\pi - \theta_1)$ ,  $Q \Rightarrow P_2$  のとき  $\alpha$  は最大となり  $\alpha \Rightarrow (\pi - \theta_2)$  であるから、 $P_1 < Q < P_2$  において

$$\pi/2 < \pi - \theta_1 < \alpha < \pi - \theta_2 < \pi \tag{6}$$

したがって開区間  $(P_1, P_2)$  で  $\tan \alpha (< 0)$  は連続関数となる。ここで、 $(\pi - \theta_1)$  は  $\overline{P_1B}, \overline{P_2B}$  に点  $P_1, P_2$  で

内接する円上の点から弦  $\overline{P_1P_2}$  をみこむ角である。ただし  $\angle BP_1P_2 = \angle BP_2P_1 = \theta_1$ 。 ( $\pi - \theta_2$ ) も同様に得られる。

式(5)を用いれば  $m_2$  は  $m_1, m_2$  のかわりに  $\tan \alpha$  を変数とする式で表わせる。

$$m_2 = \frac{-2 \tan \alpha + M_1(\tan^2 \alpha - 1)}{\tan^2 \alpha - 1 + 2 M_1 \tan \alpha} \quad (7)$$

ここで

$$t = \tan \alpha - 1 / \tan \alpha \quad (8)$$

とおけば

$$m_2 = \frac{-2 + M_1 t}{t + 2 M_1} \quad (9)$$

$\tan \alpha \neq 0$  ( $\tan \alpha < 0$ ) より

$$t'(\tan \alpha) = \frac{\tan^2 \alpha + 1}{\tan^2 \alpha} > 0$$

したがって、式(9)の変数  $t$  は  $\tan \alpha$  に関して単調増加する。また  $t$  の変域は式(6)より

$$-M_1 = -\tan \theta_1 < \tan \alpha < -\tan \theta_2 = M_2$$

$$\therefore -M_1 + \frac{1}{M_1} < t < M_2 - \frac{1}{M_2} \quad (10)$$

さらに  $M_1 = \tan \theta_1 > 0$  より

$$-2 M_1 < -M_1 + \frac{1}{M_1}$$

$$m_2'(t) = \frac{2(1 + M_1^2)}{(t + 2 M_1)^2} > 0$$

以上から式(9)の  $m_2(t)$  は式(10)で示す開区間において連続かつ単調増加関数 ( $t$  すなわち  $\tan \alpha$  について) となる。

$$f(t) = m_2(t) - M_2 \quad (11)$$

とおけば、 $f(t)$  も  $m_2(t)$  と同じ区間で連続かつ単調増加関数であり、この区間に  $f(t) = 0$  なる根の存在が証明できれば  $m_2(t)$  は  $M_2$  に等しい値をとりうるということがいえる。

ここで  $t_1 = -M_1 + 1/M_1$ ,  $t_2 = M_2 - 1/M_2$  とおくと  $t_1, t_2$  はそれぞれ  $\alpha \Rightarrow (\pi - \theta_1)$ ,  $\alpha \Rightarrow (\pi - \theta_2)$  すなわち点  $Q$  が  $P_1, P_2$  へ接近したときの極限值に対応する。したがって

$$\lim_{t \rightarrow t_1+0} f(t) = -(M_1 + M_2) = -(\tan \theta_1 - \tan \theta_2) \quad (12)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_2-0} f(t) = \frac{-(1 + M_2^2)(M_1 + M_2)}{M_2^2 - 1 + 2 M_1 M_2} = \frac{(1 + M_2^2)(M_1 + M_2)}{(M_1 + M_2) \left( -M_2 + \frac{1 - M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right)}$$

$$= \frac{1 + M_2^2}{\tan \theta_2 + \frac{1}{\tan(\theta_1 - \theta_2)}} \quad (13)$$

(ただし、 $\tan \theta_2, \tan(\theta_1 - \theta_2) > 0$ )

であるから各極限値は有限確定値をもつ。そこで

$$\left. \begin{aligned} f(t_1) &= \lim_{t \rightarrow t_1+0} f(t) \\ f(t_2) &= \lim_{t \rightarrow t_2-0} f(t) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

と定義すれば、 $f(t)$  は閉区間  $t_1 \leq t \leq t_2$  で連続かつ単調増加関数となる。

さらに、式(1), (12), (13)より

$$f(t_1) < 0, f(t_2) > 0 \quad (15)$$

であるから  $f(t) = 0$  なる根が  $t_1 < t < t_2$  に存在すること、いいかえれば  $f(\alpha) = 0$  なる根が  $\pi - \theta_1 < \alpha < \pi - \theta_2$  に存在することが証明された。

以上の事実を Fig. 3 を用いて幾何学的に考察する。ただし Fig 3 の点  $Q$  は最適出力接線  $M_2$  を導く位置を示している。この図で  $M_1, M_2$  のなす交点を  $A$ , また  $P_2$  において弦  $\overline{P_1P_2}$  と  $\theta_1$  の角度をなす直線と  $\overline{AP_1}$  の延長との交点を  $B$  とする。

まず、 $Q \Rightarrow P_1$  のとき  $\angle AP_1P_2 = \angle BP_2P_1 = \theta_1$  から  $m_{21} = \overline{BP_2}$  が出力接線となり、前述の  $\alpha \Rightarrow \pi - \theta_1$  における極限値に一致する。  $\theta_0 = \angle BP_2A$  とおくと  $m_{21}$  は  $\theta_0 = \theta_1 - \theta_2 (> 0)$  だけ  $M_2$  の内側にはいり込む。

つぎに  $P_1 < Q < P_2$  のとき、弦  $\overline{P_1Q}$  の垂直二等分線と  $\overline{AP_1}$  との交点を  $C$  とすれば、 $\overline{CP_1}, \overline{CQ}$  に点  $P_1, Q$  で接する円弧  $\overline{P_1Q}$  が第1の円弧となり、 $\overline{CQ}$  が  $Q$  におけるこの円弧の出力接線となる。さらにこの接線を連続条件として円弧  $\overline{QP_2}$  を求める。すなわち弦  $\overline{QP_2}$  の垂直二等分線と  $\overline{CQ}$  の延長との交点を  $D$  とすれば、 $\overline{QD}, \overline{DP_2}$  に点  $Q, P_2$  で接する円弧  $\overline{QP_2}$  が求めるものである。したがって、円弧  $\overline{QP_2}$  の出力接線  $\overline{DP_2}$  がセグメント  $P_1P_2$  の出力接線  $m_2$  となる。

$m_2$  と  $Q$  の関係を調べるため、 $m_2$  と弦  $\overline{P_1P_2}$  のなす角  $\theta_x = \angle DP_2P_1$  の点  $Q$  の移動に対する変化を求め

$$\begin{aligned} \theta_x &= \angle DP_2Q + \angle QP_2P_1 \\ &= \angle DQP_2 + \angle QP_2P_1 \\ &= \{\pi - (\alpha + \theta_1 - \beta)\} + \{\pi - (\alpha + \beta)\} \\ &= 2\pi - \theta_1 - 2\alpha \end{aligned} \quad (16)$$

前述のとおり  $\pi - \theta_1 < \alpha < \pi - \theta_2$  より

$$2\theta_2 - \theta_1 < \theta_x < \theta_1$$

$$\therefore \theta_2 - \theta_1 < \theta_x - \theta_2 < \theta_1 - \theta_2$$

$$\therefore -\theta_0 < \theta_x - \theta_2 < \theta_0 \quad (17)$$

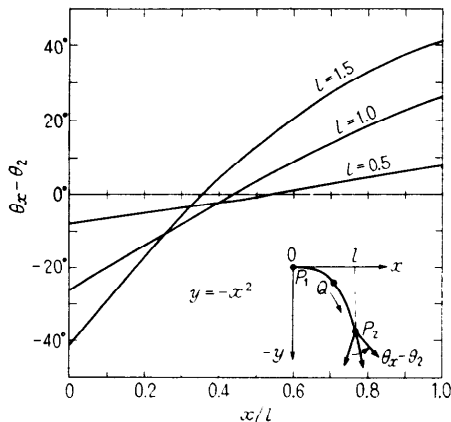
すなわち  $Q$  が  $P_1$  から  $P_2$  へと原曲線上を移動するにつれ、 $m_2$  は Fig. 3 の  $m_{21}$  から  $m_{22}$  へと回転する。したがって、 $m_2$  は最適出力接線  $M_2$  を中心として  $\pm\theta_0$  ( $=\theta_1-\theta_2$ ) の範囲を移動する。このことは前述の  $m_2(t)$  の式からも容易に証明できる。Fig. 4 はこの例として  $y=-x^2$  の  $0 < x < l$  の区間を選択し、 $x=l$  における原曲線の接線と円弧の接線のなす角  $(\theta_x-\theta_2)$  を示したものである。さらにこの事実は、逆に出力側から入力側をみたとき、最適出力接線を得るため、最適入力接線に対し  $\pm\theta_0$  までの入力接線の誤差がこの区間で修正可能であることを示している。

ここで、前述の最適出力接線を導く点  $Q$  と区間内振動との関係を考える。Fig. 3 において  $\delta = \angle DQP_2 = 0$  が区間  $P_1P_2$  内における振動の限界である。しかし、このときの出力接線  $m_{21}(=\overline{QP_2})$  の弦  $\overline{P_1P_2}$  に対する角度  $\angle QP_2P_1$  は常に  $\theta_2$  より小であるから、 $\delta=0$  なる限界点では  $m_{21}$  はすでに最適値  $M_2$  を通過している。以上から、このアルゴリズムを用いて  $M_2$  を導く点  $Q$  を求めても区間  $P_1P_2$  内での振動は起こりえないことが明らかになった。

逆に曲率がしだいに大きくなる ( $\theta_1 < \theta_2$ ) 場合を Fig. 5 を用いて考える。Fig. 3 と同様に  $\theta_1, \theta_2, \theta_x$  をとると  $\theta_x$  は

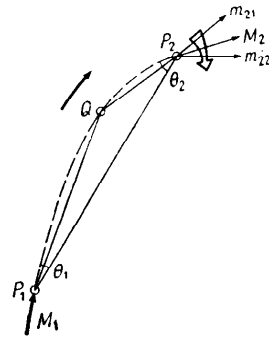
$$-(\theta_2 - \theta_1) < \theta_x - \theta_2 < \theta_2 - \theta_1 \quad (18)$$

すなわちこの場合も、 $m_2$  は  $M_2$  を中心に  $\pm(\theta_2 - \theta_1)$  の範囲を移動する。ただし、 $\theta_1 < \theta_2$  であるため  $Q$  の移動 ( $P_1 \rightarrow P_2$ ) につれて  $m_2$  は原曲線の外側から内側へ



第4図 円弧による近似曲線と原曲線の接線のなす角  $(\theta_x - \theta_2)$ 、ただし  $y = -x^2$

Fig. 4 Angles  $(\theta_x - \theta_2)$  between tangents of an original curve and of an approximate curve ( $y = -x^2$ ).



第5図 振動抑止点  $Q$  の選択 ( $\theta_1 < \theta_2$ )

Fig. 5 Secondary sampling points which prevent the oscillation ( $\theta_1 < \theta_2$ )

回転する。これらの事実は前述の  $m_2(t)$  から導くことができる。したがって、 $\theta_x = \theta_2$  すなわち  $m_2 = M_2$  なる点  $Q$  は必ず存在する。さらにこの場合は Fig. 2(b) からわかるように、いかなる点  $Q$  をとって区間内振動を生じることはない。

以上から、振動を防止するための点の存在が証明されたが、実際にこの点を得る方法は証明よりはぼ明らかである。すなわち式(11)~(15)において、 $t_1 \leq t \leq t_u$  で連続な関数  $f(t)$  が  $f(t_1) \cdot f(t_u) < 0$  より  $t_1 < t < t_u$  に  $f(t) = 0$  なる根を有することが証明された。したがって、両端で関数符号の異なる閉区間を逐次二等分しながら追跡するといういわゆる区間縮小法により根を容易に得ることができる。

### 2.3 具体的手順と表示例

2.1, 2.2 から、任意関数を円弧列で近似するには次の手順が必要となる。

- (i) 原曲線から変曲点、曲率の極大、極小点の抽出。
  - (ii) 原曲線を近似する標本点列の抽出。
- 以上、1次標本点列の抽出。
- (iii) 1次標本点列の間に振動を防止するための2次標本点の挿入。
- すなわち、1次標本点と2次標本点は原曲線から交互に算出される。
- (iv) 原曲線から初期接線を与え、全標本点列を円弧で順次結合。

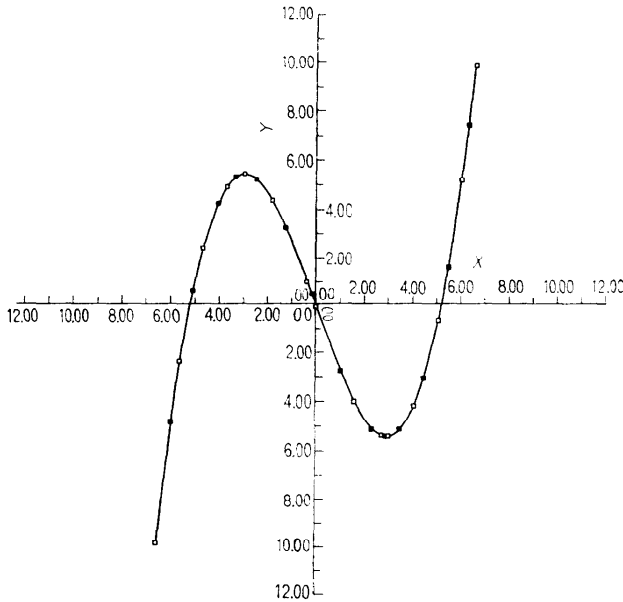
ここで(ii)については原曲線の曲率の変化、あるいは原曲線と円弧のなす面積などによりサンプリングする方法が考えられる。しかしながら、これらの方法により得られた1次標本点列がそのまま近似曲線をあらわすわけではなく、近似のよさはむしろ近似度を考慮

しない2次標本点の位置に依存する。したがってここでは、原曲線を近似する円弧と弦のなす面積を一定値におさえるという近似の方法を取り入れるにとどめた。(ii)において、2次標本点を求めるための解の精度は、近似曲線の振動現象と結びつくため安全係数を高くとり高精度の解を得る手段をとり入れた。しかし高精度化は高速処理と相反するため、今後検討すべき

重要な問題である。

上記の手順にしたがって、円弧による近似曲線の表示例を Fig. 6, 7 に示す。

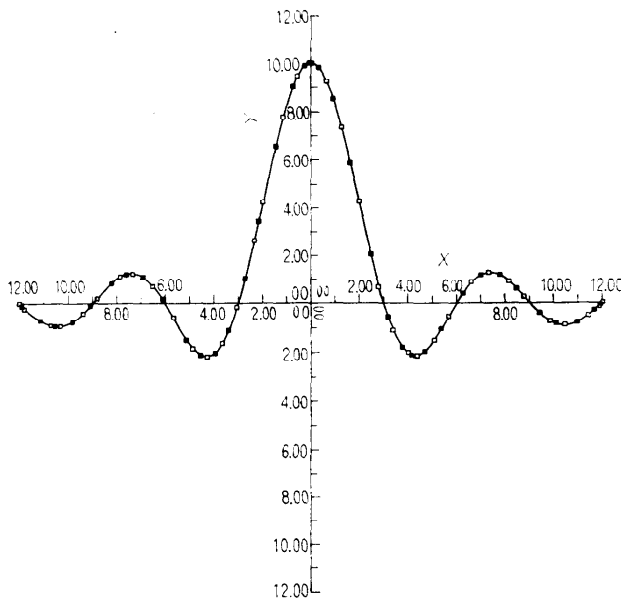
Fig. 6 は  $y=0.1x(x^2-27)$  の表示例である。原曲線から抽出された標本点数は29点、1次標本点抽出のための面積の閾値  $\epsilon$  は単位目盛に対し0.25、2次標本点を求める解の精度に対応する出力接線の最適値に対



$y=0.1x(x^2-27)$   
 全標本点数 29点 (□: 1次標本点 15点, ■: 2次標本点 14点)

第6図 表示例(1)

Fig. 6 Example of a curve restored in the proposed method (1)  
 $y=0.1x(x^2-27)$   
 Number of sampling point: 29



$y=10 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) / \left(\frac{\pi x}{3}\right)$   
 全標本点数 75点 (□: 1次標本点 38点, ■: 2次標本点 37点)

第7図 表示例(2)

Fig. 7 Example of a curve restored in the proposed method (2)  
 $y=10 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) / \left(\frac{\pi x}{3}\right)$   
 Number of sampling points: 75

する回転角の許容誤差  $\sigma$  は 0.001 ラジアン、処理時間は約 25 秒であった。

Fig. 7 は  $y=10 \sin(\pi x/3)/(\pi x/3)$  の表示例である。標本点数は 75 点、上記  $\varepsilon=0.05$ ,  $\sigma=0.001$  ラジアン、処理時間は約 35 秒であった。

ただし、上記の近似曲線の表示例はすべて電子計算機 NEAC-2200/500 とこれに付属するデジタルプロッタおよびグラフィック・ディスプレイを用いたシミュレーションにより得た結果で、プロッタの表示精度は 1 ステップにつき 0.2 mm である。

### 3. むすび

一般曲線の基本的な形である陽関数をディスプレイ端末、XY プロッタなどへ表示するため円弧列による曲線近似法を述べた。この円弧列による曲線近似法に関しては、点列接続条件の不足に帰因する振動現象を追求し、振動を防止するための適当な点を各セグメントに挿入するという方法を導いて接続が連続な曲線の表示を可能とした。

また、いくつかの点列が与えられてそれらを曲線で結ぶというような形の問題に対しては、まず点列間を陽関数の形に近似してからサンプリングすることにより、この円弧による近似法を適用できる。

上記の方法は、図形を計算機で処理し、伝送回線を介して出力端末へ表示するため、なめらかな曲線の実現ばかりでなく、図形データを圧縮して記憶するための有効な一手段であると考えられる。

しかしながら、本論文では 1 次標本点を逐次的に抽出したため、標本点数が曲線の複雑さに依存して予想がつかないという欠点を生じた。したがって、とくにデータ量が問題とされる表示図形に対しては、はじめに全標本点数を与え、適当な近似手段に基づいた標本点列を同時に決定すべしようなアルゴリズムの開発も重要であると考えられる。

謝辞 日ごろご指導いただいた電電公社武蔵野電気通信研究所表示機器研究室大和淳二室長、ならびに終始有益な助言をいただいた同研究室村上伸一研究主任に深く感謝する次第である。

### 参考文献

- 1) たとえば、B. D. Fried: "Solving Mathematical Problems, On-Line Computing", pp. 131~178, McGRAW-HILL, 1967; H. Freeman:

"On the Encoding of Arbitrary Geometric Configurations", I. R. E. Trans. on EC, Vol. EC-10, No. 2, pp. 260~268, June 1961.

- 2) 穂坂 衛: "図形の発生、記憶と処理について", 情報処理, Vol. 6, No. 3, pp. 129~139, May 1965.

### 付 録

Fig. A. 1 において入力接線を  $M_1$ , 弦  $\overline{P_1Q}$ ,  $\overline{QP_2}$  の勾配をそれぞれ  $n_1, n_2$  とし,  $P_1, Q, P_2$  を円弧で接線が連続になるように結合したときの出力接線  $m_2$  を求める。

まず  $P_1$  において  $M_1$  と直角をなす直線と  $n_1$  の垂直二等分線の交点から円弧  $\overline{P_1Q}$  の中心  $O_1$  が求まる。したがって、 $\overline{O_1Q}$  の勾配が既知となるから  $Q$  点において  $\overline{O_1Q}$  と直交する直線、すなわち円弧  $\overline{P_1Q}$  の  $Q$  点における接線  $m_Q$  は次式で表わせる。

$$m_Q = \frac{2n_1 + (n_1^2 - 1)M_1}{-(n_1^2 - 1) + 2n_1M_1} \quad (A-1)$$

この式は初期接線と 2 点間を結ぶ弦による出力接線の表示式である。したがって、次のセグメント  $QP_2$  についても  $M_1 \rightarrow m_Q, n_1 \rightarrow n_2$  なるおきかえにより、 $P_2$  における出力接線  $m_2$  は

$$m_2 = \frac{-2(n_2 - n_1)(n_1n_2 + 1) + M_1\{(n_1 - n_2)^2 - (n_1n_2 + 1)^2\}}{(n_1 - n_2)^2 - (n_1n_2 + 1)^2 + 2M_1(n_2 - n_1)(n_1n_2 + 1)} \quad (A-2)$$

となり、 $M_1, n_1, n_2$  による  $m_2$  の表示式が得られる。

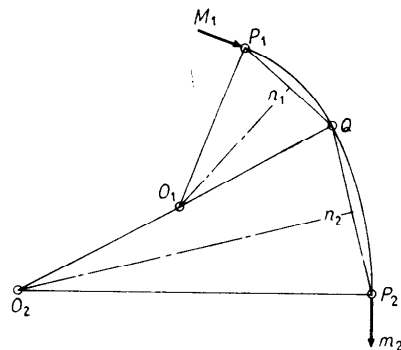


図 A. 1 円弧接続における 3 点と入出力接線の関係

Fig. A. 1 Determination of outgoing tangent  $m_2$  from incoming tangent  $M_1$  and three points  $P_1, Q, P_2$ .