

流動性リスクと株価リターン： レジームスイッチングモデルによる検証

伊東 賢二¹ 宮崎 浩一^{1,a)} 回瀬 純治²

受付日 2011年10月26日, 再受付日 2011年12月20日/2012年2月7日,
採録日 2012年2月27日

概要: 本研究では, 小型株と大型株のポートフォリオリターンを対象に, 株式売買のしやすさを表現する流動性指標 (流動性リスクの代用変数) と株価リターンの関係をレジームスイッチングモデルに基づき考察する. 特にマーケットファクタに関する回帰係数もレジームに応じて異なる値をとることができるように既存モデルを拡張したモデルを用いて検証を行う. また, いくつかの仮定をおくことになるが, 決定係数や回帰係数の t 統計量の考え方を導入したうえで検証を行う.

キーワード: 流動性リスク, 株価リターン, レジームスイッチングモデル, 決定係数, t 統計量

Empirical Analyses on the Liquidity Risk Premium in the Equity Return Using Regime-switching Model

KENJI ITO¹ KOICHI MIYAZAKI^{1,a)} JUNJI MAWARIBUCHI²

Received: October 26, 2011, Revised: December 20, 2011/February 7, 2012,
Accepted: February 27, 2012

Abstract: This research attempts to examine the influence of liquidity factor (liquidity risk), which represents smoothness in trading equity, on the small-capital and the large-capital equity portfolio returns using regime-switching model. We extend the regime-switching model so as to make the regression coefficient of the market factor also dependable on the regime. We also introduce the notions of the coefficient of determination and the t -value of the regression coefficient in the regime-switching type of regression model under some assumptions.

Keywords: liquidity risk, equity return, regime-switching model, coefficient of determination, t -value

1. はじめに

株価には様々な情報が織り込まれていると考えられ, その1つとして, 流動性リスクに関する情報があげられる. 流動性リスクは, 通常, 株式を必要ときに妥当な価格と量で売買できないリスクと定義される. 流動性リスクの増加はマーケットインパクトコスト (大量の株式売買によって生じる株価変動コスト) といった取引コストの増加として表れ,

株価リターンに影響を及ぼすため, 投資家は流動性リスクに注意を払う. また金融危機を契機に, 株価リターンにおける流動性リスクの大きさを把握する重要性は増している.

株価リターンと流動性リスクの関係を把握するためには, 流動性リスクをとらえる流動性の尺度を構築する必要がある. 米国株式市場において様々な尺度が提唱されている (Amihud [2], Pastor ら [14], Huang ら [7], Lesmond ら [12]). そのなかで Amihud [2] は個別株式ごとのマーケットインパクトコストを表す, 非流動性指標 ILLIQ を提案している. また Huberman ら [8] では, 市場全体の流動性を構築し, その変化に対して流動性リスクで説明される割合が大きい株式は期待リターンが高いという関係性を示した. さらに Acharya ら [1] では, Amihud [2] の個別企業

¹ 電気通信大学大学院
The University of Electro-Communications, Chofu, Tokyo
182-8585, Japan

² 三菱 UFJ トラスト投資工学研究所 (MTEC)
Mitsubishi UFJ Trust Investment Technology Institute Co.,
Ltd., Minato, Tokyo 107-0052, Japan

a) miyazaki@se.uec.ac.jp

ごとの非流動性指標 ILLIQ を用いて新たに市場全体の流動性指標を構築し、その流動性指標を伝統的な資産評価モデルである CAPM に加えて資産評価を行うことで、株価リターンにはマーケットリスクだけでなく市場全体の流動性リスクも存在することを示した。

株価リターンと流動性リスクの関係性を検証するために、回帰係数が検証期間を通じて一定という通常の単純な回帰分析が多く用いられる。しかし、金融市場環境は、経済状況などに応じて変わりゆくものであり、株価リターンと流動性リスクとの関係性を表す回帰係数が、検証期間を通して一定とする回帰モデルでは適切でない可能性がある。そのため、株価リターンと流動性リスクの関係性の变化を柔軟にとらえられる回帰モデルが必要となり、回帰係数がレジームに応じて異なる値をとることが可能なレジームスイッチングモデル (RSM) に注目が集まっている。

本研究が主に依拠する先行研究である Watanabe ら [16] では、回帰モデルにおける回帰係数が一定ではなく、その係数が状態に応じて2つの値をとる RSM を用いて検証を行い、米国市場における株価リターンと流動性リスクの関係は一定ではなく、時間経過にともなって変化することを示した。同研究では、株価リターンに大企業の株式 (大型株) ポートフォリオリターン、小企業の株式 (小型株) ポートフォリオリターン、流動性リスクの指標に Acharya ら [1] で提案されている流動性指標を用いることで、企業規模が異なる2種類のポートフォリオリターンと流動性リスクの関係を検証し、小型株と大型株の流動性リスクプレミアムの違いについて言及した。さらにマーケットファクタでリターンを説明する伝統的な資産評価モデル CAPM に流動性指標を加えた RSM を用いて、各々のリターンにおける流動性リスクの大きさも検証している。また、伊東ら [11] では Watanabe ら [16] の枠組みをふまえて、流動性指標、マーケットファクタの回帰係数が共通の状態に応じてそれぞれ2つの値をとる RSM を用いて、日本市場における株価リターンと流動性リスクとの関係性を検証している。しかし、流動性指標とマーケットファクタに関する状態はかならずしも同一とは考えにくい。そこで本研究では流動性指標とマーケットファクタに関する状態を同一とするのではなく、各々に状態を導入する形で RSM を拡張し、株価リターンと流動性リスクとの関係性を詳細に検証する。また、Watanabe ら [16] では、レジームスイッチングモデルにおける回帰係数の t 検定値や回帰モデルの決定係数に関してほとんど言及されていない。本研究ではいくつかの仮定をおくことにはなるが、これらについての考え方を導入したうえで、検証を試みる*1。

*1 Perez ら [15] では本研究とほぼ同様な RSM において、具体的な手法に関する記述はないものの推定量の誤差、および検定統計量の p 値が評価されている。また、石島ら [10] では、RSM における最尤推定量の精度を評価するのに一般的な誤差行列 (Fisher 情報行列) を提起している。

本研究の主な貢献は以下の2つである。第1に、RSM におけるモデルの決定係数や回帰係数の t 値の導出方法を明記したうえで、パラメータにいくつかの仮定をおくことで、RSM における決定係数や回帰係数について詳細に議論することである。その際に、各状態における回帰係数の値や状態の推移確率に関して、米国市場におけるものとの比較も行う。第2に、流動性指標とマーケットファクタに関する状態を同一とするのではなく、各々に状態を導入する形で RSM を拡張し、株価リターンと流動性リスクとの関係性を詳細に検証することである。検証においては、流動性指標とマーケットファクタに関する状態が同じとするような制約があるモデルとの比較も行う。

本研究の構成は、以下のとおりである。次章では、小型株と大型株のポートフォリオリターンおよび流動性指標を構築したのちに、本研究で提案する RSM について説明する。3章では、本研究で採用する RSM における決定係数や回帰係数の t 統計量の考え方について導入する。4章では、分析結果とその考察を与える。最終章では、まとめと結語を付す。

2. 流動性指標とレジームスイッチングモデル (RSM)

2.1 ポートフォリオのリターン

検証で用いるポートフォリオのリターンは、小型株のリターンと大型株のリターンの2通りである。通常、小型株と大型株では取引量が異なるため、これらのポートフォリオを比較すれば、個別株式固有の要因を除いたうえで株式リターンにおける流動性リスクの差異をとらえることができると考えられるからである。ポートフォリオの構築法としては、まず、月次で株式を時価総額別に4分位に分け、下位25%に分類される個別株のリターン (小型株のリターンに関する構成要素)、上位25%に分類される個別株のリターン (大型株のリターンに関する構成要素) を観測する。そして、それぞれ時価総額で加重平均をとることで、小型株のリターン $r_{S,t}$ と大型株のリターン $r_{L,t}$ を構築する。ここで、 t は時点、 S は小型株 (Small)、 L は大型株 (Large) を表す。

2.2 流動性指標 (LIQ)

本研究は、Acharya ら [1] が提唱する流動性指標を用いる。この流動性指標は市場全体の流動性を測る指標であり、Amihud [2] の非流動性指標 $APRIM$ をベースとして、市場全体の時価総額のトレンドの影響を調整し、過去の情報から予測できない流動性の変化を流動性指標とするものである。

まず Amihud [2] の指標は、単位売買代金あたりの個別株式の日次リターン $|r_{n,d,t}|/Volume_{n,d,t}$ でマーケットインパクトコストをとらえている。市場全体の流動性リスク

APRIM は、ILLIQ の市場全体平均として式 (1) で定義される。

$$APRIM_t = \frac{1}{N_t} \sum_{n=1}^{N_t} \left\{ \frac{1}{D_{n,t}} \sum_{d=1}^{D_{n,t}} \frac{|r_{n,d,t}|}{Volume_{n,d,t}} \right\} \times 10^8, \quad (1)$$

ここで、 $r_{n,d,t}$ ；第 t 月 d 日における株式 n の日次リターン、 $Volume_{n,d,t}$ ；第 t 月 d 日における株式 n の売買代金、 $D_{n,t}$ ；第 t 月における株式 n の約定が成立した営業日数、 N_t ；第 t 月における市場全体の株式銘柄数とする。

Acharya ら [1] では、市場全体の流動性指標として、APRIM をベースに、以下の 2 つのステップを経由して指標を構築する。まず APRIM_t の市場全体の時価総額のトレンドを調整する。それは、市場全体の時価総額の増加から Volume が増加することによって、意図せぬ APRIM の減少が生じることを緩和するためである。ここでは時点 $t-1$ と時点 1 の市場全体の時価総額の比 mcp_{t-1}/mcp_1 で APRIM_t の値を調整する。次に、過去の情報から予測できない流動性の変化をとらえる。具体的には、時価総額のトレンドを調整した APRIM_t の時系列データを自己回帰モデルに適応した際の攪乱項（イノベーション）の異符号を流動性指標 LIQ_t と定義している。

$$\left(\frac{mcp_{t-1}}{mcp_1} APRIM_t \right) = \alpha + \beta_1 \left(\frac{mcp_{t-1}}{mcp_1} APRIM_{t-1} \right) + \beta_2 \left(\frac{mcp_{t-1}}{mcp_1} APRIM_{t-2} \right) + (-LIQ_t), \quad (2)$$

ここで、 mcp_{t-1} ；第 $t-1$ 月における市場全体の時価総額、 α ；AR(2) における定数項、 β_1 ；AR(2) における 1 次の回帰係数、 β_2 ；AR(2) における 2 次の回帰係数とする。

2.3 レジームスイッチングモデル (RSM)

本節では、まず 2 種類の株価リターン r_t を流動性指標 LIQ_t で説明する回帰型の RSM を紹介する。式 (3) は、回帰型の RSM であり、パラメータ α 、 β が状態に応じて 2 通りの値をとる点が単純な回帰モデルと大きく異なる点である。式 (3) のモデルを M0 とする。

モデル M0；

$$(\mathbf{r}_t - \mathbf{1} \cdot r_t^f) = \alpha_{v_t} + \beta_{v_t}^{LIQ} LIQ_t + \varepsilon_t, \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_t = \begin{pmatrix} r_{S,t} \\ r_{L,t} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{v_t} = \begin{pmatrix} \alpha_{S,v_t} \\ \alpha_{L,v_t} \end{pmatrix},$$

$$\beta_{v_t}^{LIQ} = \begin{pmatrix} \beta_{S,v_t}^{LIQ} \\ \beta_{L,v_t}^{LIQ} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{S,t} \\ \varepsilon_{L,t} \end{pmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega}_{v_t}),$$

$$\mathbf{\Omega}_{v_t} = \begin{pmatrix} \sigma_{S,v_t}^2 & \rho_{v_t} \sigma_{S,v_t} \sigma_{L,v_t} \\ \rho_{v_t} \sigma_{S,v_t} \sigma_{L,v_t} & \sigma_{L,v_t}^2 \end{pmatrix},$$

ここで、 r_t ；株価リターン、 r_t^f ；無リスク金利、 $\mathbf{1}$ ；要素 1 で 2 行の列ベクトル、LIQ；流動性指標、 S ；小型株、 L ；

大型株、 α ；定数項、 β^{LIQ} ；回帰係数（以下、流動性ベータ）、 ε ；誤差項、 $\mathbf{\Omega}$ ；誤差項の分散共分散行列、 σ ；誤差項の標準偏差、 ρ ；誤差項の相関係数、 v_t ；時点 t において、1 か 2 の 2 通りの状態をとる観測されない変数（潜在変数）であり、流動性ベータの状態を表す。

モデル M0 は、流動性ベータ $\beta_{v_t}^{LIQ}$ が状態 v_t に依存して β_1^{LIQ} と β_2^{LIQ} の 2 通りの状態をとり、 β_{S,v_t}^{LIQ} が状態 1 では高い値 (high)、状態 2 では低い値 (low) をとるものとする。また、定数項、誤差項の標準偏差も状態に依存して、2 通りの値をとる。RSM では、この状態 v_t がマルコフ連鎖の推移確率行列に従い推移するようにモデル化されている。

次に、モデル M0 にマーケットファクタ MKT_t （市場ポートフォリオの無リスク金利からの超過リターン）を加えるが、マーケットファクタの回帰係数 β^{MKT} （以下、マーケットベータ）は状態に依存しない形のモデルを M1 とし、式 (4) に示す。モデル M1 の誤差項はモデル M0 と同様である。

モデル M1；

$$(\mathbf{r}_t - \mathbf{1} \cdot r_t^f) = \alpha_{v_t} + \beta_{v_t}^{LIQ} LIQ_t + \beta^{MKT} MKT_t + \varepsilon_t, \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_t = \begin{pmatrix} r_{S,t} \\ r_{L,t} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{v_t} = \begin{pmatrix} \alpha_{S,v_t} \\ \alpha_{L,v_t} \end{pmatrix},$$

$$\beta_{v_t}^{LIQ} = \begin{pmatrix} \beta_{S,v_t}^{LIQ} \\ \beta_{L,v_t}^{LIQ} \end{pmatrix}, \quad \beta^{MKT} = \begin{pmatrix} \beta_S^{MKT} \\ \beta_L^{MKT} \end{pmatrix}.$$

さらに、マーケットベータ $\beta_{v_t}^{MKT}$ が流動性ベータ $\beta_{v_t}^{LIQ}$ と同一の状態に応じて 2 つの値をとるモデルを M2(Common state) とし、式 (5) に示す。モデル M2(Common state) の誤差項はモデル M0 と同様である。

モデル M2(Common state)；

$$(\mathbf{r}_t - \mathbf{1} \cdot r_t^f) = \alpha_{v_t} + \beta_{v_t}^{LIQ} LIQ_t + \beta_{v_t}^{MKT} MKT_t + \varepsilon_t, \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_t = \begin{pmatrix} r_{S,t} \\ r_{L,t} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{v_t} = \begin{pmatrix} \alpha_{S,v_t} \\ \alpha_{L,v_t} \end{pmatrix},$$

$$\beta_{v_t}^{LIQ} = \begin{pmatrix} \beta_{S,v_t}^{LIQ} \\ \beta_{L,v_t}^{LIQ} \end{pmatrix}, \quad \beta_{v_t}^{MKT} = \begin{pmatrix} \beta_{S,v_t}^{MKT} \\ \beta_{L,v_t}^{MKT} \end{pmatrix}.$$

さらに、本研究では、M2(Common state) とは異なり、各指標の回帰係数が指標ごとに異なる状態に依存して 2 つの値をとるモデル M2(Individual state) を式 (6) で提案する。 v_t^* は時点 t において、1 か 2 の 2 通りの状態をとる観測されない変数（潜在変数）であり、マーケットベータの状態を表す。M2(Individual state) では、指標ごとに 2 つの状態 (v_t, v_t^*) を採用しているため、とりうる状態の組合せは 2×2 の 4 通りである。よって、この 4 通りを新たに 4 つの状態と定義しなおし、小型株の流動性ベータとマーケットベータのセット ($\beta_{S,v_t}^{LIQ}, \beta_{S,v_t^*}^{MKT}$) を基準として、これ

が, (high, high), (low, high), (high, low), (low, low) をとる場合の状態を順に状態 1 から状態 4 と定義する.

モデル M2(Individual state);

$$(\mathbf{r}_t - \mathbf{1} \cdot r_t^f) = \alpha_{v_t, v_t^*} + \beta_{v_t}^{LIQ} LIQ_t + \beta_{v_t^*}^{MKT} MKT_t + \varepsilon_t, \quad (6)$$

$$\mathbf{r}_t = \begin{pmatrix} r_{S,t} \\ r_{L,t} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{v_t, v_t^*} = \begin{pmatrix} \alpha_{S, v_t, v_t^*} \\ \alpha_{L, v_t, v_t^*} \end{pmatrix},$$

$$\beta_{v_t}^{LIQ} = \begin{pmatrix} \beta_{S, v_t}^{LIQ} \\ \beta_{L, v_t}^{LIQ} \end{pmatrix}, \quad \beta_{v_t^*}^{MKT} = \begin{pmatrix} \beta_{S, v_t^*}^{MKT} \\ \beta_{L, v_t^*}^{MKT} \end{pmatrix},$$

$$(v_t, v_t^*) = \begin{pmatrix} 1, 1 \\ 1, 2 \\ 2, 1 \\ 2, 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

ここで, 本研究のモデル M0, M1, M2(Common state) において採用した推移確率を市場全体の出来高によって日々変化する非斉時なものに拡張する手法について示す. ただし, 非斉時な推移確率を構築するにあたり出来高を直接用いるのではなく, 式 (7) で示される Eckbo ら [5] の取引量の指標 $STOV$ を用いる. $STOV_t$ は, 第 t 月における全銘柄の出来高の合計 $ATOV_t$ を, トレンド $ATOV_1/MATOV_t$ で調整することにより, トレンド以外の市場全体の急激な出来高の増減をとらえることができる.

$$STOV_t = \frac{ATOV_1}{MATOV_t} ATOV_t \quad (7)$$

ここで, $ATOV_t$; 第 t 月における全銘柄の出来高の平均, $MATOV_t$; 直近第 $t-25$ 月から第 $t-1$ 月における $ATOV_t$ の移動平均である.

取引量の指標 $STOV$ によって日々変化する非斉時な推移確率を式 (8) で定義する. 式 (8) で示される p_t^{ii} は, 時点 $t-1$ から時点 t において, 状態 i ($i = 1$ or 2) にとどまる確率を表す. また時点 $t-1$ から時点 t において, 状態 i から状態 j に推移する確率 p_t^{ij} ($j \neq i$) は $p_t^{ij} = 1 - p_t^{ii}$ で定義される. 式 (8) から, 推移確率は, 状態 v_t に依存するパラメータ c_{v_t} , d_{v_t} を用いて $STOV$ に応じて変化するロジット型で構成されていることが分かる. $d_1 = d_2 = 0$ の場合には, 式 (8) の右辺は定数となり, $STOV$ が推移確率に影響を与えない斉時な推移確率となる.

$$p_t^{ii} = P\{v_t = i | v_{t-1} = i; STOV_{t-1}\} = \frac{\exp(c_{v_t} + d_{v_t} STOV_{t-1})}{1 + \exp(c_{v_t} + d_{v_t} STOV_{t-1})}, \quad (8)$$

$$P_t = \begin{bmatrix} p_t^{11} & p_t^{21} \\ p_t^{12} & p_t^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_t^{11} & 1 - p_t^{22} \\ 1 - p_t^{11} & p_t^{22} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

推定パラメータセットを $\Theta \equiv \{\alpha_{S,1}, \alpha_{S,2}, \alpha_{L,1}, \alpha_{L,2}, \beta_{S,1}^{LIQ}, \beta_{S,2}^{LIQ}, \beta_{L,1}^{LIQ}, \beta_{L,2}^{LIQ}, \sigma_{S,1}, \sigma_{S,2}, \sigma_{L,1}, \sigma_{L,2}, \rho_1, \rho_2, c_1, c_2, d_1, d_2\}$ とし, EM アルゴリズム (付録 A.1) を用いて, パラ

メータの推定をする. また取引量の指標が推移確率に影響を与えるか検証するために帰無仮説を $d_1 = d_2 = 0$ において, 尤度比検定 (付録 A.2) を行う. ただし, M2(Individual state) では斉時な推移確率 (式 (10)) を採用する. その理由は, パラメータ数の増大を避けること, モデル M0, M1, M2(Common state) において推移確率を非斉時なものに拡張しても有意性が認められなかったことにある.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p^{11} & p^{21} & p^{31} & p^{41} \\ p^{12} & p^{22} & p^{32} & p^{42} \\ p^{13} & p^{23} & p^{33} & p^{43} \\ p^{14} & p^{24} & p^{34} & p^{44} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

3. 本研究で用いるレジームスイッチングモデルにおける決定係数と回帰係数の t 統計量の考え方

3.1 決定係数

観測データに対する RSM のあてはまりの良さを表す決定係数を 2 通り導入する. 1 つ目は, 各ポートフォリオリターンの時系列に対して 1 つ与えられる RSM の決定係数であり, 小型株ポートフォリオの場合に $cR^2(S)$ (大型株ポートフォリオの場合は $cR^2(L)$) と表す. 2 つ目は各ポートフォリオリターンの時系列に対して状態ごとに与えられる決定係数であり, 状態に応じてモデルの説明力を把握するための指標であり, $cR^2(S; i)$ で表す. これら 2 つの決定係数は RSM の特性である状態確率を考慮したうえで算出される. ここでは, モデル M0 における小型株のリターン $r_{S,t}$ を例にとり, 状態 v_t や推定されたパラメータの推定誤差は無視できるものと仮定して議論する.

• 決定係数 $cR^2(S)$

小型株ポートフォリオリターンの時系列データに関する RSM の決定係数 $cR^2(S)$ は, 式 (11) で与えられる. 式 (11) を見ると, 右辺の分母は, 単純な回帰モデルの決定係数の定義と同様にリターンの総変動を表す. 一方, 分子は, 状態ごとに観測されるリターンとモデル値との誤差項 $(r_{S,t} - \hat{r}_{S,t,i})$ を EM アルゴリズム (付録 A.1) で推定された状態確率で重み付け, 状態ごとに足し合わせることで, 2 つの状態を同時に考慮したモデルの誤差項の変動を表す. このように RSM の決定係数 $cR^2(S)$ は, 状態確率を考慮する点で単純な回帰モデルのものとは異なる. 自由度はサンプル数と回帰に使ったパラメータ数によって決定される. モデル M0 において, 状態数は $n = 2$, 回帰係数の数は $k = 1$ とする.

$$cR^2(S) = 1 - \frac{\left\{ \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n (r_{S,t} - \hat{r}_{S,t,i})^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} \right\}}{\sum_{t=1}^T (r_{S,t} - \bar{r}_S)^2 / (T-1)}, \quad (11)$$

ここで、 $cR^2(S)$; 自由度調整済み決定係数、 r ; リターン、 \hat{r} ; リターンのモデル値 $\hat{\alpha} + \hat{\beta}^{LIQ} LIQ$ 、 \bar{r} ; リターンの平均、 $P\{\bullet\}$; 状態確率、 \mathbf{R}_t ; 第 t 月までに利用可能な観測データ、 Θ ; 推定パラメータセット、 T ; サンプル数、 n ; モデルの状態数、 k ; 回帰係数の個数である。

- 決定係数 $cR^2(S; i)$ (RSM の枠組みにおいて、状態に応じたモデルの説明力を把握)

小型株ポートフォリオリターンの時系列データに関する RSM の状態に応じた決定係数は、式 (12) で与えられる。式 (12) を見ると、右辺の分子は状態 i におけるモデルの誤差項の変動を表し、1 つの状態のみに着目している点が式 (11) とは異なる。一方、分母は状態 i における小型株のリターンの総変動を表す。状態ごとに分子の誤差項の変動やリターンの総変動を表すことで、決定係数 $cR^2(S; i)$ では RSM の枠組み内における、状態に応じたモデルの説明力を把握することが可能となる。

$$cR^2(S; i) = 1 - \frac{\left\{ \sum_{t=1}^T (r_{S,t} - \hat{r}_{S,t,i})^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} \right\} / (T - nk - n)}{\sum_{t=1}^T (r_{S,t} - \bar{r}_S)^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} / (T - 1)}, \quad (12)$$

ここで、 $cR^2(S; i)$ は、状態 i における自由度調整済み決定係数である。

3.2 回帰係数の t 統計量

RSM の枠組みにおいて回帰係数の有意性を検証するために必要となる、t 統計量を紹介する。ここではモデル M0 の状態 i における小型株の流動性ベータ $\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ}$ を例にとり、状態 v_t や推定パラメータの推定誤差は無視できるものと仮定して議論する*2。

帰無仮説が $\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} = 0$ である場合の t 統計量 $|\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} - 0| / \sqrt{V[\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ}] | v_t = i}$ は $t(T - nk - n)$ に従う。このとき、式 (13) の流動性ベータの推定値 $\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ}$ は付録 A.1 の EM アルゴリズムの M ステップにおいて導出される。式 (13) の右辺には状態確率が含まれており、従来の t 統計量とは異なるため、単純な回帰モデルにおける t 検定ができないことが分かる。本研究では状態 i で条件付けられた流動性ベータの分散 $V[\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} | v_t = i]$ (式 (14)) を導入することで、t 検定を可能とした。帰無仮説が棄却されれば、各々の回帰係数が有意に値を持つと考えられる。式 (13)、(14) の導出過程は付録 A.3、A.4 を参照されたい。

$$\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ}$$

*2 推定値の推定誤差を無視して分散を計算した場合には、回帰係数の分散を過小評価する恐れがあるので、帰無仮説が棄却されやすくなることには注意を要する。

$$= \frac{\sum_{t=1}^T \{ \sigma_{L,i}^2 (r_{S,t} - \alpha_{S,i}) - \rho_i \sigma_{S,i} \sigma_{L,i} (r_{L,t} - \hat{r}_{L,t,i}) \} LIQ_t P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}{\sum_{t=1}^T \sigma_{L,i}^2 LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}, \quad (13)$$

$$V[\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} | v_t = i] = \frac{\hat{\sigma}_{S,i}^2 \sigma_{L,i}^2 + \rho_i^2 \sigma_{S,i}^2 \hat{\sigma}_{L,i}^2 - 2\rho_i \sigma_{S,i} \sigma_{L,i} \cdot \hat{\rho}_i \hat{\sigma}_{S,i} \hat{\sigma}_{L,i}}{\sigma_{L,i}^2 \sum_{t=1}^T LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}, \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}_{S,i}^2 = \frac{1}{T - nk - n} \sum_{t=1}^T (r_{S,t} - \hat{r}_{S,t,i})^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}, \quad (15)$$

$$\hat{\sigma}_{L,i}^2 = \frac{1}{T - nk - n} \sum_{t=1}^T (r_{L,t} - \hat{r}_{L,t,i})^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}, \quad (16)$$

$$\hat{\rho}_i \hat{\sigma}_{S,i} \hat{\sigma}_{L,i} = \frac{1}{T - nk - n} \sum_{t=1}^T (r_{S,t} - \hat{r}_{S,t,i})(r_{L,t} - \hat{r}_{L,t,i}) P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}, \quad (17)$$

ここで、 $\hat{\beta}^{LIQ}$; 流動性ベータの推定値、 $V[\bullet]$; 分散、 T ; サンプル数、 n ; モデルの状態数、 k ; 回帰係数の個数、 r ; リターン、 \hat{r} ; リターンのモデル値、 σ ; モデルの誤差項の標準偏差、 ρ ; 誤差項の相関係数、 $\hat{\sigma}$; モデルの誤差項の標準偏差の不偏推定量、 $\hat{\rho}$; 相関係数の不偏推定量、 i ; 状態 ($i = 1, 2$)、 $P\{\bullet\}$; 状態確率、 S ; 小型株、 L ; 大型株である。

4. 実証分析

4.1 データと分析モデル設定、分析対象

実証分析に用いるデータは、東証一部で取得可能な日次の株価の終値、調整後終値、出来高、月次の TOPIX、無担保コールレート翌日物、年次の発行済み株式枚数である。データ期間は 1999 年 9 月から 2010 年 8 月の 11 年間である。また 2.3 節の MATOV の構築に 2 年分のデータを用いるため、分析期間は 2001 年 9 月から 2010 年 8 月の 9 年間である。市場ポートフォリオは、東証一部上場銘柄の時価総額で加重平均をとった株価指数 (TOPIX) を用いる。これらの基礎データを用いて、式 (2) に基づき推定した流動性指標 LIQ_t の推移を図 1 に、非斉時な推移確率を構築する際に必要な取引量の指標 $STOV_t$ の推移を図 2 に示し

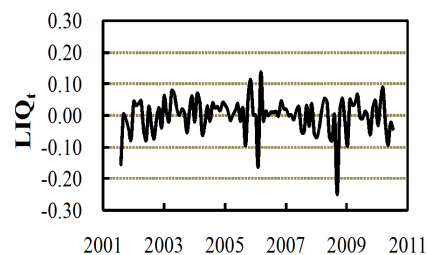


図 1 流動性指標の時系列推移

Fig. 1 Time series of the liquidity factor.

表 1 モデル M0 における回帰分析の結果

Table 1 A result of regression analysis on Model M0.

AIC: -755.2		$cR^2(S) : 0.45, cR^2(L) : 0.29$					
Small Size Stock's Parameters				Common Parameters			
State	cR^2	α	β^{LIQ}	σ	ρ	c	d
1	0.69	0.000	1.292***	0.036	0.630	-0.585	4.464
2	0.22	0.006	0.442***	0.049	0.759	-1.056	15.096
Large Size Stock's Parameters							
State	cR^2	α	β^{LIQ}	σ			
1	0.38	0.001	0.517***	0.028			
2	0.25	0.006	0.524***	0.053			
LR-test	$d_1 = d_2 = 0$		1.58(accept)				

小型株の流動性ベータ β_{S,v_t}^{LIQ} が high, low をとる場合を順に状態 1, 状態 2 とする. *, **, *** はそれぞれ t 検定における 10%, 5%, 1% 有意を表す. LR-test は尤度比検定の結果である.

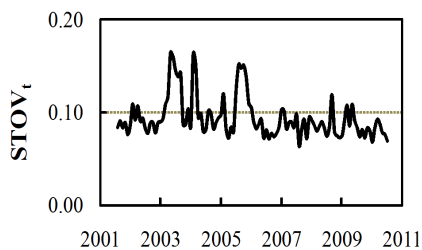


図 2 取引量の指標の時系列推移

Fig. 2 Time series of the turnover factor.

た. 図 1 から, 流動性指標 LIQ_t が 2008 年から 2009 年にかけて大きなマイナスの値をとっているが, これはリーマンショックの影響が日本株式市場にも波及し流動性リスクが高まったことを反映している. 一方, 図 2 に示した取引量は 2003 年から 2007 年にかけて多くなっているが, この時期は日本経済が好景気であった時期である.

検証に用いるモデルは, 以下に示す 4 つのレジームスイッチングモデル (RSM) である.

モデル M0: 流動性指標 LIQ_t のみを説明変数とし, 流動性ベータが状態に依存して 2 つの値をとるモデル

モデル M1: 流動性指標とマーケットファクタ MKT_t を説明変数とし, 流動性指標の回帰係数は状態に応じて 2 つの値をとるが, マーケットファクタの回帰係数は状態に依存しないモデル

モデル M2(Common state): 流動性指標とマーケットファクタを説明変数とし, 流動性指標とマーケットファクタの回帰係数が共通の状態に応じてそれぞれ 2 つの値をとるモデル

モデル M2(Individual state): 流動性指標とマーケットファクタを説明変数とし, 流動性指標とマーケットファクタに関して各々 2 つの状態を仮定し, 各回帰係数が 2 つの値をとるモデル

また, 分析対象は以下の 3 つである.

- 第 1 に, 説明変数が流動性指標のみのモデル M0 を採用した場合に, 小型株 (S) と大型株 (L) のリターン

に対する説明力を検討する. また, 推定された RSM の流動性ベータに関する時系列推移や状態推移確率の取引量への依存性などを米国における結果と時系列的に比較する.

- 第 2 に, 回帰係数が状態に依存しない形でマーケットファクタを説明変数としてモデル M0 に加えた場合に, モデルの説明力がどの程度まで向上するかについて検討する. 特に, 小型株 (S) と大型株 (L) のリターンに対する流動性指標の説明力に焦点を当てる. また, 状態推移確率の取引量への依存性についても確認する.
- 第 3 に, マーケットファクタの与え方によって流動性ベータの推定値がどのように異なるかについて比較検討する. また, マーケットファクタを柔軟な形で与えるに従って, 小型株や大型株のリターンが流動性指標による部分とマーケットファクタによる部分にどのような形で分かれるかについても考察する.

4.2 モデル M0 に基づく流動性ベータの検証

小型株 (S), 大型株 (L) のリターンを流動性指標のみで説明する RSM であるモデル M0 を採用した場合に, どちらのリターンに対する説明力が高くなるかについて確認する. 表 1 を見ると, 式 (11) の小型株と大型株のリターンに対する決定係数 $cR^2(S)$, $cR^2(L)$ は, それぞれ 0.45, 0.29 である. この結果から, 大型株よりも小型株の方が流動性リスクで説明できる割合が大きいことが分かる. 次に流動性ベータについて見ると, すべての流動性ベータが正で 1% 有意であることから, 流動性指標が正で大きい時期には, 株価リターンも正で大きな値をとると分かる. 流動性指標が正の値であることは取引のしやすさが増大する (流動性リスクは低減) ことを表すため, 流動性ベータが正で有意である場合, 流動性リスクの低減は株価が上昇するように反映されるので株式リターンは増大する. よって, 推定された流動性ベータはファイナンス理論と整合的である.

表 1 から, 状態に応じたモデルの説明力について詳細

に議論する。 $cR^2(S; 1)$, $cR^2(S; 2)$, $cR^2(L; 1)$, $cR^2(L; 2)$ は、順に 0.69, 0.22, 0.38, 0.25 であり、小型株では、状態 1 における決定係数が状態 2 における決定係数の 3 倍程度と高く、状態に応じてモデルの説明力が大きく異なるのに対し、大型株では、モデルの説明力はほとんど状態に依存しないことが分かる。また、小型株の流動性ベータの値は、状態 1 において 1.292 であり、状態 2 における 0.442 の 3 倍程度となっている。これに対して、大型株においては、状態 1, 2 における流動性ベータの値はそれぞれ 0.517, 0.524 と同程度である。これらのことから、株価リターンと流動性リスクの関係をとらえるうえで、大型株よりも小型株の方が RSM の必要性は高いと考えられる。

RSM では、各状態に関する状態確率が時系列的に得られるので、各状態に関する流動性ベータを状態確率で重み付けした RSM の流動性ベータの時系列も求めることができる。図 3, 図 4 には、小型株、大型株に関するこのような流動性ベータの推移を示した。

図 3 と図 4 を見比べると、小型株の流動性ベータは 1.3 と 0.4 の間で日々大きく変化しているのに対して、大型株の流動性ベータは 0.52 付近で安定的に推移している。小型株の流動性ベータが大型株のものより概して高いのは、小型株の出来高が一般に大型株よりも少ないため同じ量を取引する際の価格インパクトが大きいからである。ただし、これは、米国株式市場に関して報告されているような小型株の流動性ベータが 0.053 から 0.192 の範囲で推移し、大型株の流動性ベータが 0.021 から 0.085 の範囲で推移するものとは異なり、大型株の流動性ベータの変動がきわめて小さいことが分かる。また、米国株式市場と日本株式市場との相違点は、状態の推移確率についても見られる。前者

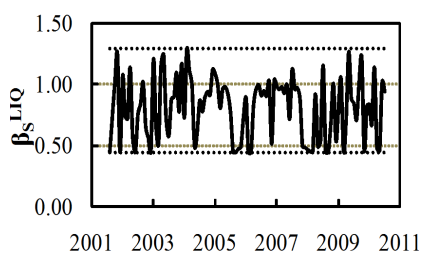


図 3 モデル M0 の小型株の流動性ベータの時系列推移

Fig. 3 Time series of the small-cap equity's liquidity beta (M0).

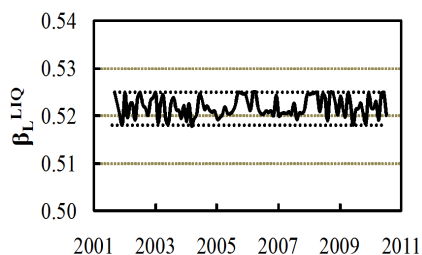


図 4 モデル M0 の大型株の流動性ベータの時系列推移

Fig. 4 Time series of the large-cap equity's liquidity beta (M0).

が非斉時な推移確率を導入する必要性が高いのに対して、後者では斉時的な推移確率でも問題ない。実際、取引量の指標が推移確率に与える影響についての尤度比検定 (帰無仮説を $d_1 = d_2 = 0$) において、自由度 2 の有意水準 10% の $\chi^2(2)$ 分布のパーセント点は 4.61 であるが、表 1 を見ると日本株式市場において尤度比統計量は 1.58 であり、帰無仮説は有意水準を 10% としても棄却されないことが分かる。

4.3 モデル M0 と M1 を用いたマーケットファクタの影響をコントロールした流動性ベータの検証

モデル M0 の説明変数にマーケットファクタ MKT を加えたモデル M1 とモデル M0 の説明力について比較検討する。表 2 を見ると、AIC, 小型株と大型株に関する決定係数 $cR^2(S)$, $cR^2(L)$ は、それぞれ -1,113.8, 0.74, 0.97 である*3。表 1 のモデル M0 の AIC や決定係数の値と比較すると、すべての値が改善していることが分かる。小型株、大型株のいずれのリターンに関してもモデルにマーケットファクタを加えることで説明力が増すことが確認された。より詳細に見ると、小型株よりも大型株において決定係数の増加幅が大きいことが分かる。このことから、大型株のリターンはマーケットリスクで説明される割合が大きいことが確認された。

モデル M1 に関する状態ごとの決定係数 $cR^2(S; 1)$, $cR^2(S; 2)$, $cR^2(L; 1)$, $cR^2(L; 2)$ は、表 2 によると、順に 0.80, 0.67, 0.95, 0.98 である。この結果をモデル M0 の 0.69, 0.22, 0.38, 0.25 と比較すると、小型株、大型株を問わず、また、どちらの状態に関してもマーケットファクタをモデルに追加することで、モデルの説明力が増すことが分かる。より詳細に比較すると、いずれの状態であっても、大型株の方がマーケットファクタを追加することによるモデルの説明力の向上が大きいことも分かる。

次に、流動性ベータの状態ごとの値は、小型株で 0.696 (状態 1), 0.086 (状態 2), 大型株で 0.068 (状態 1), -0.012 (状態 2) である。小型株、大型株や状態によらず、モデル M1 の流動性ベータはモデル M0 の流動性ベータよりも値が小さいことから、モデル M0 の流動性ベータには本来マーケットベータとしてとらえられるべきものがいくらか加わっていることも分かる。また、流動性ベータに関する t 検定の結果は、小型株、大型株ともに状態 1 において 1% 有意である。このことから、状態 1 では、各ポートフォリオリターンにおいてマーケットリスクだけでなく流動性リスクによる部分も大きいと考えられる。また、状態 2 では、各ポートフォリオリターンにおいてマーケットリスクがきわめて大きいと考えられる。ただし、小型株の流動性ベータに関しては、状態 2 においても 10% 有意であるた

*3 決定係数が 0.97 と大きい値をとるのは、検証に用いた TOPIX リターンと大型株ポートフォリオリターンがかなり類似した変動をしていることに起因する。

表 2 モデル M1 における回帰分析の結果

Table 2 A result of regression analysis on Model M1.

AIC: -1,113.8		$cR^2(S) : 0.74, cR^2(L) : 0.97$						
Small Size Stock's Parameters					Common Parameters			
State	cR^2	α	β^{LIQ}	β^{MKT}	σ	ρ	c	d
1	0.80	0.007	0.696***	0.775***	0.033	-0.553	0.067	-5.816
2	0.67	0.006	0.086*	0.775***	0.030	-0.348	0.173	8.728
Large Size Stock's Parameters								
State	cR^2	α	β^{LIQ}	β^{MKT}	σ			
1	0.95	0.003	0.068***	0.990***	0.012			
2	0.98	0.001	-0.012	0.990***	0.007			
LR-test	$d_1 = d_2 = 0$		4.10(accept)					

小型株の流動性ベータ β_{S,v_t}^{LIQ} が high, low をとる場合を順に状態 1, 状態 2 とする. *, **, *** はそれぞれ t 検定における 10%, 5%, 1%有意を表す. LR-test は尤度比検定の結果である.

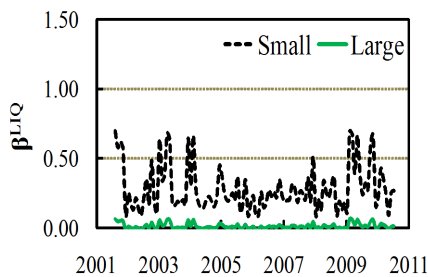


図 5 モデル M1 の流動性ベータの時系列推移
Fig. 5 Time series of the liquidity betas (M1).

め、マーケットリスクが大きな時期においても、流動性リスクが相応に残るものと考えられる。なお、モデル M0 と同様に、モデル M1 においても、非斉時な推移確率を導入する必要性を尤度比検定によって検討したところ、帰無仮説が棄却されないことが分かる (表 2)。よって、日本株式市場において非斉時な推移確率を導入する必要性は小さいといえる。

4.2 節と同様に、各状態に関する流動性ベータを状態確率で重み付けした RSM の流動性ベータの時系列を求め、図 5 に示した。図 5 を見ると、大型株の流動性ベータが 0 付近を推移しているのに対して、小型株の流動性ベータは 0.1~0.7 の間で、日々大きく変化していることが分かる。また、モデル M0 の流動性ベータの水準 (図 3, 図 4) と比較すると、大型株、小型株を問わず、分析期間を通して 0.5 程度低くなっていることが分かる。さらに、大型株において、マーケットリスクが状態に依存せず大きいこと (表 2) をふまえると、モデル M0 の大型株の流動性ベータはその大部分が、本来マーケットファクタで説明されるべきものであったと考えられる。これに対して、小型株の流動性ベータの値は、マーケットリスクを考慮した場合においても比較的高い水準である。このことから、日本市場においては、マーケットリスクプレミアムを除いた流動性リスクプレミアムに関しては、小型株において大型株よりも大きいことがうかがえる。

4.4 モデル M1, M2(Common state), M2(Individual state) を用いたマーケットファクタの与え方による流動性ベータの検証

本節では、マーケットファクタの与え方によって流動性ベータの推定値がどのように異なるかについて比較検討する。マーケットファクタ MKT_t をモデルの説明変数として加える際に、マーケットベータが状態に依存しない形で与えたものがモデル M1、マーケットベータが流動性ベータと同じ状態に依存する形で与えたものがモデル M2(Common state)、マーケットベータに流動性ベータとは個別の状態に依存する形で与えたものがモデル M2(Individual state) である。つまり、マーケットファクタをモデルに加える際に、モデル M1 から、モデル M2(Common state)、モデル M2(Individual state) となるに従って柔軟な形で与えている。マーケットファクタをより柔軟な形で与えるに従って、小型株や大型株のリターンを流動性指標による部分とマーケットファクタによる部分により的確に分けることができると考えられる。

モデル M2(Common state) とモデル M2(Individual state) に関する回帰分析の推定・検定結果をそれぞれ、表 3, 表 4 に示した。表 3 によると、モデル M2(Common state) の AIC は -1,118.4 であり、モデル M1 の -1,113.8 からほとんど改善していないことが分かる。また、小型株、大型株の決定係数 $cR^2(S), cR^2(L)$ も、モデル M2(Common state) の 0.72, 0.98 はモデル M1 の 0.74, 0.97 とおおむね同じである。このことは、状態別に決定係数を比較した場合でも同様である。また、流動性ベータの大きさも小型株、大型株を問わず、またいずれの状態においても、M2(Common state) と M1 とではほとんど違いは見られず、違いを述べるなら小型株の流動性ベータの有意水準が状態 2 において 10%有意から 5%有意へと向上したことがうかがえる。取引量の指標が状態の推移確率に与える影響についての尤度比検定もモデル M1 と同様に、モデル M2(Common state) においても帰無仮説は棄却されなかつ

表 3 モデル M2(Common state) における回帰分析の結果
Table 3 A result of regression analysis on Model M2(Common state).

AIC: -1,118.4		$cR^2(S) : 0.72, cR^2(L) : 0.98$						
Small Size Stock's Parameters					Common Parameters			
State	cR^2	α	β^{LIQ}	β^{MKT}	σ	ρ	c	d
1	0.80	0.004	0.671***	0.734***	0.031	-0.559	1.678	-22.081
2	0.65	0.007	0.103**	0.798***	0.032	-0.465	-2.180	32.523
Large Size Stock's Parameters								
State	cR^2	α	β^{LIQ}	β^{MKT}	σ			
1	0.98	0.004	0.040***	1.095***	0.009			
2	0.98	0.001	0.002	0.937***	0.007			
LR-test	$d_1 = d_2 = 0$		1.28(accept)					

小型株の流動性ベータ β_{S,v_t}^{LIQ} が high, low をとる場合を順に状態 1, 状態 2 とする. *, **, *** はそれぞれ t 検定における 10%, 5%, 1%有意を表す. LR-test は尤度比検定の結果である.

表 4 モデル M2(Individual state) における回帰分析の結果
Table 4 A result of regression analysis on Model M2(Individual state).

AIC: -1,128.0		$cR^2(S) : 0.71, cR^2(L) : 0.97$				
Small Size Stock's Parameters				Common Parameters		
State	cR^2	α	β^{LIQ}	β^{MKT}	σ	ρ
1	0.97	-0.018	0.580***	0.732***	0.010	0.997
2	0.62	0.014	0.245***	0.732***	0.037	-0.321
3	0.98	0.026	0.580***	0.730***	0.010	0.659
4	0.82	-0.008	0.245***	0.730***	0.020	0.959
Large Size Stock's Parameters						
State	cR^2	α	β^{LIQ}	β^{MKT}	σ	
1	0.98	0.001	0.161***	0.993***	0.009	
2	0.97	0.003	-0.008	0.993***	0.010	
3	1.00	-0.001	0.161***	0.989***	0.001	
4	0.98	0.003	-0.008***	0.989***	0.006	

小型株の流動性ベータ, マーケットベータのセット ($\beta_{S,v_t}^{LIQ}, \beta_{S,v_t}^{MKT}$) がそれぞれ (high, high), (low, high), (high, low), (low, low) をとる場合の状態を順に状態 1 から状態 4 と定義する. *, **, *** はそれぞれ t 検定における 10%, 5%, 1%有意を表す.

た. このことから, マーケットファクタをモデルに加える際に, マーケットベータが状態に依存する形で与えてもその状態を流動性ベータの依存する状態と共通のものを利用するのであれば, 状態に依存しない形で与えるのとほとんど違いが見られないことが分かる.

次に, モデル M2(Individual state) をモデル M1 やモデル M2(Common state) と比較する. 先に, モデル M1 とモデル M2(Common state) には違いがほとんど見られないことを確認したので, ここでは, モデル M2(Individual state) とモデル M1 との比較に焦点を当てる. 表 4 によると, モデル M2(Individual state) の AIC は -1,128.0 であり, モデル M1 の -1,113.8 からある程度の改善が見られる. 小型株, 大型株の決定係数 $cR^2(S)$, $cR^2(L)$ は, モデル M2(Individual state) の 0.71, 0.97 はモデル M1 の 0.74, 0.97 と小型株において説明力が若干低下しているが, 状態別に決定係数を見たときに, 状態 2 (流動性ベータが低く, マーケットベータが高い状態) 以外の 3 つの状態にお

ける決定係数はモデル M1 の 2 つの状態における決定係数のいずれよりも高くなっている. 流動性ベータに関してもモデル M2(Individual state) とモデル M1 とは大きく異なる. 小型株に関して, モデル M2(Individual state) では流動性ベータが低い状態であったとしても 0.245 となり, これは 1%有意な水準である. また, 大型株に関して, モデル M2(Individual state) では, 状態 1 や状態 3 のように流動性ベータが高い状態では, 0.161 とモデル M1 の場合の 0.068 と比較すると相対的に大きな流動性リスクプレミアムを確認することができた.

モデル M2(Common state), モデル M2(Individual state) における小型株と大型株の流動性ベータの推移をそれぞれ図 6, 図 7 に示した. 図 6 と図 7 を比較すると, モデル M2(Individual state) では大型株に関して, しばしば流動性ベータは 0 からある程度まで乖離するが, モデル M2(Common state) では大型株の流動性ベータはどの時期においてもおおむね 0 であることが確認される. また, 小

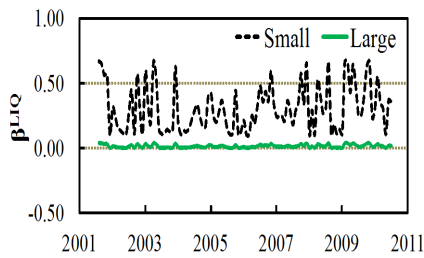


図 6 モデル M2(Common state) の流動性ベータの時系列推移
Fig. 6 Time series of the liquidity betas (M2(Common state)).

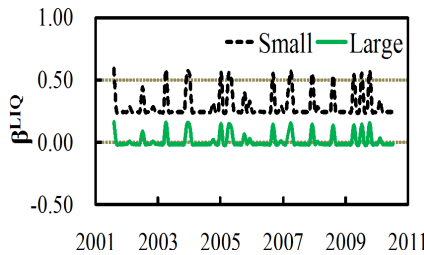


図 7 モデル M2(Individual state) の流動性ベータの時系列推移
Fig. 7 Time series of the liquidity betas (M2(Individual state)).

型株に注目すると、モデル M2(Common state) では流動性ベータが高い状態の値と低い状態の値との中間的な水準をとることが多いのに対して、モデル M2(Individual state) では通常は低い状態の値をとり、しばしば、高い状態の値をとるようなことが多い。流動性リスクは、通常の市場環境ではそれほど大きく織り込まれるものではなく、大きな負のニュースが発生して円滑な市場取引が困難になるような時期に顕在化するものであることを勘案すると、モデル M2(Individual state) による流動性ベータの方がより市場参加者の直感に合致するものと考えられる。

図 8、図 9 はモデル M0、M1 の流動性ベータが高い値(状態 1) をとる状態確率を示した。また図 10 はモデル M2(Individual state) の流動性ベータが高い値(状態 1 と 3) をとる状態確率の和を示した。図 8 のモデル M0 の状態確率を見ると、頻繁に流動性ベータの状態のスイッチングが起こることが分かる。また継続的に状態確率が 0 に張り付く状態分けがなされず、状態確率が 0.5 付近といったどちらの状態にも属する場合があると分かる。一方で、モデル M1 の状態確率(図 9) を見ると、頻繁に生じたスイッチングや 0.5 近傍の状態確率が解消されると分かる。これは、モデル M1 でマーケットファクタを加えマーケットリスクの影響を取り除くことで、通常は安定的に低いベータをとり、まれに生じるショックをとらえたものと考えられる。さらに、モデル M2(Individual state)(図 10) ではマーケットリスクのレジームスイッチングを考慮しマーケットリスクの状態に依存する部分も取り除くことで、状態確率の分かれ方が顕著になると分かった。

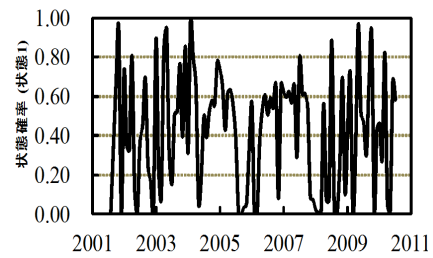


図 8 モデル M0 の状態 1 の状態確率の時系列推移
Fig. 8 Time series of the state probability being in state 1 (M0).

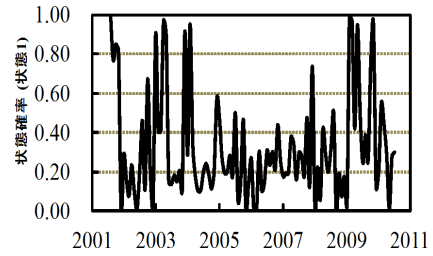


図 9 モデル M1 の状態 1 の状態確率の時系列推移
Fig. 9 Time series of the state probability being in state 1 (M1).

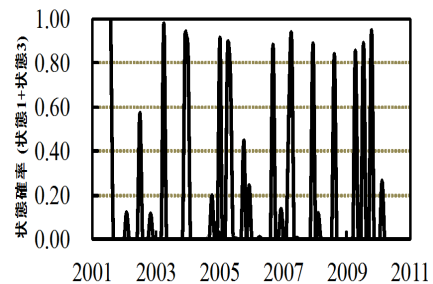


図 10 モデル M2(Individual state) の状態 1 と状態 3 の状態確率の和の時系列推移
Fig. 10 Time series of the state probability being in state 1 or state 3 (M2(Individual state)).

5. まとめと結語

本研究は、小型株ポートフォリオや大型株ポートフォリオのリターンにおける流動性リスクを、レジームスイッチングモデル(RSM)を用いて検証した。第1に、説明変数が流動性指標のみのモデル M0 を採用した場合に、小型株(S)と大型株(L)のリターンに対する説明力を検討した。また、推定された RSM の流動性ベータに関する時系列推移や状態推移確率の取引量への依存性などを米国における結果と時系列的に比較した。分析結果から、モデルの説明力は小型株の方が大型株よりも大きいことが確認された。また、小型株では状態に応じて流動性ベータの値が大きく異なるが大型株ではほとんど同じとなる結果が得られ、米国とは異なるものとなった。小型株リターンは大型株リターンと比較して、流動性リスクプレミアムが大きいことが分

かった。市場全体の取引量の増減が状態推移確率に大きく影響しない点も、米国株式市場とは異なる結果となった。

第2に、回帰係数が状態に依存しない形でマーケットファクタを説明変数としてモデルM0に加えたモデルM1を導入することで、モデルの説明力がどの程度まで向上するかについて検討した。分析結果から、説明力の向上は大型株において顕著に見られ大型株のリターンはマーケットリスクで説明される割合が大きいこと、マーケットリスクプレミアムを除いた流動性リスクプレミアムは小型株の方が大型株よりも大きいことが分かった。また、モデルM0と同様に市場全体の取引量の増減は状態推移確率にそれほど影響しなかった。

第3に、マーケットファクタの与え方によって流動性ベータの推定値がどのように異なるかについて比較検討した。マーケットファクタをモデルに加える際に、マーケットベータが状態に依存する形で与えてもその状態を流動性ベータの依存する状態と共通のものを利用するのであれば、状態に依存しない形で与えるのとほとんど違いが見られないこと、これに対して、個別の状態を導入した場合には、小型株、大型株ともに、流動性ベータの値が大きくなり、株式リターンにおける流動性リスクプレミアムをとらえることができた。

謝辞 匿名の2人のレフリーからは本論文の改訂に際して有益なコメントをいただき、ここに記して感謝いたします。また、本研究は科学研究費補助金（基盤研究（C）22510143）の助成を受けている。

参考文献

- [1] Acharya, V.V. and Pedersen, L.H.: Asset Pricing with Liquidity Risk, *Journal of Financial Markets*, Vol.77, pp.375-410 (2005).
- [2] Amihud, Y.: Illiquidity and Stock Returns, *Journal of Financial Markets*, Vol.5, pp.31-35 (2002).
- [3] Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D.B.: Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, Vol.39, pp.1-38 (1977).
- [4] Diebold, F.X., Lee, J.H. and Weinbach, G.: Regime switching with time-varying transition probabilities, *Nonstationary Time Series Analysis and Cointegration (Advanced Texts in Econometrics)*, Oxford University Press (1994).
- [5] Eckbo, E.B. and Norli, O.: Pervasive Liquidity Risk, *Working Paper*, Dartmouth College (2002).
- [6] Hamilton, J.D.: *Modeling Times Series with Changes in Regime*, Time Series Analysis, Princeton University Press (1994).
- [7] Huang, W., Liu, Q., Rhee, S.G. and Zhang, L.: Return Reversals, Idiosyncratic Risk and Expected Returns, *Journal of Financial Economics*, Vol.82, pp.631-671 (2006).
- [8] Huberman, G. and Halka, D.: Systematic Liquidity, *Journal of Financial Research*, Vol.24, pp.161-178 (2001).

- [9] 石島 博：レジームスイッチングモデルとファイナンス理論・実証, *Working Paper Series*, Waseda University Institute of Finance, Vol.WIF-05-005, pp.19-31 (2005).
- [10] 石島 博, 松島純之介：レジーム・スイッチング因子分析とJ-REIT市場のリスク・ファクタの検出への応用, *統計数理*, Vol.59, No.1, pp.41-65 (2011).
- [11] 伊東賢二, 宮崎浩一, 回測純治：レジームスイッチングモデルを用いた株価リターンと流動性リスクの関係に関する実証研究, *数理解析研究所講究録*, Vol.1734, pp.117-124 (2010).
- [12] Lesmond, D.A., Ogden, J.P. and Trzcinka, C.A.: A new estimate of transaction costs, *Review of Financial Studies*, Vol.12, pp.1113-1141 (1999).
- [13] Mizrach, B. and Watkins, J.: A Markov Switching Cookbook, *Nonlinear Time Series Analysis of Economic and Financial Data*, Vol.1, pp.33-43 (2000).
- [14] Pastor, L. and Stambaugh, R.F.: Liquidity Risk and Expected Stock Returns, *Journal of Political Economy*, Vol.111, pp.642-685 (2003).
- [15] Perez-Quiros, G. and Timmermann, A.: Firm Size and Cyclical Variations in Stock Returns, *Journal of Finance*, Vol.55, No.3, pp.1229-1262 (2000).
- [16] Watanabe, A. and Watanabe, M.: Time Varying Liquidity Risk and the Cross Section of Stock Returns, *The Review of Financial Studies*, Vol.21, pp.2449-2487 (2008).

付 録

A.1 推定方法（EM アルゴリズム）

本研究で用いるレジームスイッチングモデル（RSM）のモデルパラメータはEM アルゴリズムを用いて推定する。EM アルゴリズムとはEステップとMステップを繰り返すことで、非観測の変数である状態確率を含んだモデルの最適化を行うアルゴリズムである。Eステップでは初期パラメータと観測データから状態確率を求め、尤度関数を構築する。Mステップでは尤度関数を偏微分することで極値を求め、パラメータを更新する。ここではモデルM0を例にとりEM アルゴリズムについて説明する。M2(Individual state)において、流動性ベータの状態 v_t とマーケットベータの状態 v_t^* との組合せで構成される 2×2 の4つの状態に関する斉時的な推移確率（式(10)）を用いるが、推定方法は他のモデルと同様である。

まずEM アルゴリズムを実行するにあたって、以下の準備を行う。パラメータの推定には、観測可能なデータとして、2種類（本研究では、小型株と大型株）の時系列のポートフォリオのリターン \mathbf{r}_t 、流動性指標 LIQ_t 、取引量の指標 $STOV_t$ を用いる。第 t 月において利用可能なデータは、 $\mathbf{R}_t = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_t, LIQ_1, LIQ_2, \dots, LIQ_t, STOV_1, STOV_2, \dots, STOV_t\}$ であり、推定パラメータセットは $\Theta \equiv \{\alpha_{S,1}, \alpha_{S,2}, \alpha_{L,1}, \alpha_{L,2}, \beta_{S,1}^{LIQ}, \beta_{S,2}^{LIQ}, \beta_{L,1}^{LIQ}, \beta_{L,2}^{LIQ}, \sigma_{S,1}, \sigma_{S,2}, \sigma_{L,1}, \sigma_{L,2}, \rho_1, \rho_2, c_1, c_2, d_1, d_2\}$ 、サンプルサイズは T とする。ここで、第 t 月までのデータ \mathbf{R}_t とパラメータ Θ が与えられたときに、潜在変数 v_t が状態 $i = 1, 2$ と推測される状態確率 $P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}$ を縦に2つ並べた、状態確率ベクトル

表 A.1 モデルごとのパラメータ数と AIC
Table A.1 Each model's number of parameter and AIC.

Model	Log Likelihood	The Number of Parameter	AIC
M0	359.6	18	-755.2
M1	576.9	20	-1,113.8
M2(Common state)	581.2	22	-1,118.4
M2(Individual state)	604.0	40	-1,128.0

$\hat{\xi}_{t|t}$ を式 (A.1) で与える.

$$\hat{\xi}_{t|t} = \begin{bmatrix} P\{v_t = 1 | \mathbf{R}_t; \Theta\} \\ P\{v_t = 2 | \mathbf{R}_t; \Theta\} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

同様に, 予測状態確率ベクトル $\hat{\xi}_{t+1|t}$ (ベクトルの各成分は, 第 t 月から予測される, 第 $t+1$ 月の潜在変数 v_{t+1} が状態 $i = 1, 2$ である確率 $P\{v_{t+1} = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}$) は式 (A.2) で示される.

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = \begin{bmatrix} P\{v_{t+1} = 1 | \mathbf{R}_t; \Theta\} \\ P\{v_{t+1} = 2 | \mathbf{R}_t; \Theta\} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

また, 第 t 月の潜在変数 v_t が状態 i , 第 t 月の流動性指標 LIQ_t が与えられたときのリターン \mathbf{r}_t の尤度は,

$$f(\mathbf{r}_t | v_t = i, LIQ_t; \Theta) = \frac{1}{2\pi |\Omega_i|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{r}_t - \alpha_i - \beta_i^{LIQ} LIQ_t)' \Omega_i^{-1} (\mathbf{r}_t - \alpha_i - \beta_i^{LIQ} LIQ_t) \right\}, \quad (\text{A.3})$$

であり, 状態ごとのモデルの誤差項が小さいほど, 式 (A.3) の尤度が大きくなる. これを縦に 2 つ並べた第 t 月における尤度ベクトルを

$$\eta_t = \begin{bmatrix} f(\mathbf{r}_t | v_t = 1, LIQ_t; \Theta) \\ f(\mathbf{r}_t | v_t = 2, LIQ_t; \Theta) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

とする.

EM アルゴリズムとして, まず E ステップを行う. 初期値として先頭の状態確率 $\hat{\xi}_{1|0}$, モデルのパラメータ Θ を与える. そして各月における最適な状態への更新は, 式 (A.5), (A.6) で示される 2 つの方程式をベアとして繰り返して適用することで得られる.

$$\hat{\xi}_{t|t} = \frac{(\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t)}{\mathbf{1}'(\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \eta_t)} \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = \mathbf{P}_{t+1} \hat{\xi}_{t|t}, \quad (\text{A.6})$$

ここで, \odot ; 要素ごとの積, $\mathbf{1}$; 要素が 1 の 2×1 ベクトルとする.

次に第 T 月までの状態確率が得られたら, 式 (A.7) を用いて, 第 T 月から第 1 月へ遡ることで第 T 月の情報を含んだ各月の状態確率を求め, 先頭の状態確率 $\hat{\xi}_{1|T}$ の更新を行う.

$$\hat{\xi}_{t|T} = \hat{\xi}_{t|t} \odot \left\{ \mathbf{P}'_{t+1} \cdot [\hat{\xi}_{t+1|T} (\div) \hat{\xi}_{t+1|t}] \right\}, \quad (\text{A.7})$$

ここで, (\div) ; 要素ごとの商とする.

さらに予測状態確率を用いて, 2 つの状態を考慮した第 t 月における尤度を式 (A.8) で構成する. そして, 第 t 月から第 T 月まで時点ごとの尤度を掛け合わせ, 自然対数をとることで, 対数尤度関数が得られる. ここまでが E ステップの流れである.

$$f(\mathbf{r}_t | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta) = \sum_{i=1}^2 f(\mathbf{r}_t | v_t = i, LIQ_t; \Theta) \mathbf{P}\{v_t = i | \mathbf{R}_{t-1}; \Theta\}, \quad (\text{A.8})$$

$$L(\Theta) = \sum_{t=1}^T \ln f(\mathbf{r}_t | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta). \quad (\text{A.9})$$

次に M ステップを行う. M ステップでは, 対数尤度関数をパラメータ Θ や推移確率のパラメータで偏微分し, 極値となるパラメータを得ることで新たに推定値 $\hat{\Theta}$ を得る. M ステップの詳細は, Hamilton [6], Mizrach ら [13], Diebold ら [4], 石島 [9], Dempster ら [3] を参照されたい.

以後, E ステップと M ステップを繰り返すことで尤度を大きくし, 最適なパラメータを推定する. ただし, 初期値によっては局所最適解となり, 大域的最適解ではない可能性があるため, 初期値となるパラメータセットを少なくとも 1,000 セット用意したうえで, 対数尤度が最大となるパラメータセットを採用する. また, EM アルゴリズムにおけるオーバフローやアンダフロー問題は Hamilton [6] が公開しているプログラム (Programs for estimation of Markov switching models by numerical optimization の PROC) を参考にして対応した. さらに, モデルごとのパラメータ数と AIC を表 A.1 に示した.

A.2 尤度比検定

市場全体の取引量の指標 $STOV$ が, 2.3 節における非斉時な推移確率を構成する際に有意であるのか, 尤度比検定を用いて検証する. 検定モデルが式 (A.8) の時点 t における尤度 $f(\mathbf{r}_t | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta)$, 帰無仮説が $d_1 = d_2 = 0$ である場合において, 尤度比統計量 $-2[L(\hat{\Theta}_0) - L(\hat{\Theta})]$ は, $\chi^2(2)$ 分布に従う. 帰無仮説が棄却されれば, 市場全体の取引量の増減が推移確率に影響を与えたと考えられる. ここで, $\hat{\Theta}$; 推定パラメータセット, $\hat{\Theta}_0$; 帰無仮説における

推定パラメータセット, $L(\bullet)$; 対数尤度, d ; 式 (8) における取引量の指標の係数である.

A.3 流動性ベータの導出過程

モデル M0 における回帰係数の推定値 $\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ}$ を導出する. 対数尤度関数の最大化問題は, 対数尤度のパラメータ $\beta_{S,i}^{LIQ}$ による 1 階微分で構成される尤度方程式 (式 (A.10)) を解く問題ととらえられる.

$$\frac{\partial L(\Theta)}{\partial \beta_{S,i}^{LIQ}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{S,i}^{LIQ}} \sum_{t=1}^T \ln f(\mathbf{r}_t | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta) = 0. \quad (A.10)$$

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{r}_t | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta) \\ &= \ln \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2\pi |\Omega_i|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{r}_t - \alpha_i - \beta_i^{LIQ} LIQ_t)' \right. \\ & \quad \left. \Omega_i^{-1} (\mathbf{r}_t - \alpha_i - \beta_i^{LIQ} LIQ_t) \right\} P\{v_t = i | \mathbf{R}_{t-1}; \Theta\}. \end{aligned} \quad (A.11)$$

これより, $a_i = 1/2\pi |\Omega_i|^{1/2}$, $b_i = -\frac{1}{2} (\mathbf{r}_t - \alpha_i - \beta_i^{LIQ} LIQ_t)' \Omega_i^{-1} (\mathbf{r}_t - \alpha_i - \beta_i^{LIQ} LIQ_t)$ と置き換え, 式 (A.10) の対数尤度関数を偏微分する.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L(\Theta)}{\partial \beta_{S,i}^{LIQ}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_{S,i}^{LIQ}} \sum_{t=1}^T \ln f(\mathbf{r}_t | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta) \\ &= \sum_{t=1}^T \frac{1}{f(\mathbf{r}_t | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta)} \frac{\partial}{\partial \beta_{S,i}^{LIQ}} f(\mathbf{r}_t | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta) \\ &= \sum_{t=1}^T \frac{1}{f(\mathbf{r}_t | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta)} \frac{\partial}{\partial \beta_{S,i}^{LIQ}} f(\mathbf{r}_t | v_t = i, LIQ_t; \Theta) \\ & \quad P\{v_t = i | \mathbf{R}_{t-1}; \Theta\} \\ &= \sum_{t=1}^T \frac{1}{f(\mathbf{r}_t | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta)} \frac{\partial}{\partial \beta_{S,i}^{LIQ}} \{a_i \exp(b_i)\} \\ & \quad P\{v_t = i | \mathbf{R}_{t-1}; \Theta\} \\ &= \sum_{t=1}^T \frac{1}{f(\mathbf{r}_t | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta)} \left(\frac{\partial b_i}{\partial \beta_{S,i}^{LIQ}} \right) a_i \exp(b_i) \\ & \quad P\{v_t = i | \mathbf{R}_{t-1}; \Theta\} \\ &= \sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial b_i}{\partial \beta_{S,i}^{LIQ}} \right) \frac{f(\mathbf{r}_t | v_t = i, LIQ_t; \Theta) P\{v_t = i | \mathbf{R}_{t-1}; \Theta\}}{f(\mathbf{r}_t | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta)} \\ &= \sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial b_i}{\partial \beta_{S,i}^{LIQ}} \right) \frac{f(\mathbf{r}_t, v_t = i | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta)}{f(\mathbf{r}_t | \mathbf{R}_{t-1}, LIQ_t; \Theta)} \\ &= \sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial b_i}{\partial \beta_{S,i}^{LIQ}} \right) P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} \\ &= \sum_{t=1}^T \left[\frac{\partial}{\partial \beta_{S,i}^{LIQ}} \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{r}_t - \alpha_i - \beta_i^{LIQ} LIQ_t)' \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. \left. \Omega_i^{-1} (\mathbf{r}_t - \alpha_i - \beta_i^{LIQ} LIQ_t) \right\} \right] P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} \quad (A.12)$$

ここで, 誤差項をそれぞれ $\varepsilon_{S,t,i} \equiv r_{S,t} - \alpha_{S,i} - \beta_{S,i}^{LIQ} LIQ_t$, $\varepsilon_{L,t,i} \equiv r_{L,t} - \alpha_{L,i} - \beta_{L,i}^{LIQ} LIQ_t$ と定義すると, 式 (A.10) が式 (A.12) を用いて式 (A.13) で与えられる.

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{S,i}^{LIQ}} \sum_{t=1}^T \{ \sigma_{L,i}^2 \varepsilon_{L,t,i}^2 - 2\rho_i \sigma_{S,i} \sigma_{L,i} \varepsilon_{S,t,i} \varepsilon_{L,t,i} + \sigma_{S,i}^2 \varepsilon_{S,t,i}^2 \} P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} = 0. \quad (A.13)$$

式 (A.13) の中括弧内で $\beta_{S,i}^{LIQ}$ に依存する部分 $\varepsilon_{S,t,i}$ に対して偏微分を行い, $\beta_{S,i}^{LIQ}$ について整理すると,

$$\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} = \frac{\sum_{t=1}^T \{ \sigma_{L,i}^2 (r_{S,t} - \alpha_{S,i}) - \rho_i \sigma_{S,i} \sigma_{L,i} \varepsilon_{L,t,i} \} LIQ_t P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}{\sum_{t=1}^T \sigma_{L,i}^2 LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}. \quad (A.14)$$

したがって, 極値となるパラメータ $\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ}$ は式 (13) で与えられる.

$$\begin{aligned} & \hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^T \{ \sigma_{L,i}^2 (r_{S,t} - \alpha_{S,i}) - \rho_i \sigma_{S,i} \sigma_{L,i} (r_{L,t} - \hat{r}_{L,t,i}) \} LIQ_t P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}{\sum_{t=1}^T \sigma_{L,i}^2 LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}. \end{aligned} \quad (13)$$

A.4 流動性ベータの分散の導出過程

モデル M0 における流動性ベータ $\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ}$ は状態 i のもとでの回帰係数であるので, その分散は $v_t = i$ のもとで評価されるべきである. よって, レジーム過程で条件付けた流動性ベータの分散 $V[\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} | v_t = i]$ を導出する. 式 (13) の推定値 $\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ}$ は EM アルゴリズムにおける 1 つ前の推定値 $\beta_{S,i}^{LIQ}$ を用いることで, 式 (A.15) で表される.

$$\begin{aligned} & \hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^T \{ \sigma_{L,i}^2 (r_{S,t} - \alpha_{S,i}) - \rho_i \sigma_{S,i} \sigma_{L,i} (r_{L,t} - \hat{r}_{L,t,i}) \} LIQ_t P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}{\sum_{t=1}^T \sigma_{L,i}^2 LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^T \{ \sigma_{L,i}^2 (\beta_{S,i}^{LIQ} LIQ_t + \varepsilon_{S,t,i}) - \rho_i \sigma_{S,i} \sigma_{L,i} \varepsilon_{L,t,i} \} LIQ_t P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}{\sum_{t=1}^T \sigma_{L,i}^2 LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}} \end{aligned}$$

$$= \beta_{S,i}^{LIQ} + \frac{\sum_{t=1}^T (\sigma_{L,i} \varepsilon_{S,t,i} - \rho_i \sigma_{S,i} \varepsilon_{L,t,i}) LIQ_t P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}{\sum_{t=1}^T \sigma_{L,i} LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}. \quad (\text{A.15})$$

次に、状態 i のもとで得られた $\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ}$ の期待値 $E[\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} | v_t = i]$ は

$$E[\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} | v_t = i] = E \left[\beta_{S,i}^{LIQ} + \frac{\sum_{t=1}^T (\sigma_{L,i} \varepsilon_{S,t,i} - \rho_i \sigma_{S,i} \varepsilon_{L,t,i}) LIQ_t P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}{\sum_{t=1}^T \sigma_{L,i} LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}} \middle| v_t = i \right]$$

$$= \beta_{S,i}^{LIQ} + \frac{\sum_{t=1}^T (\sigma_{L,i} E[\varepsilon_{S,t,i} P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} | v_t = i] - \rho_i \sigma_{S,i} E[\varepsilon_{L,t,i} P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} | v_t = i]) LIQ_t}{\sum_{t=1}^T \sigma_{L,i} LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}$$

$$= \beta_{S,i}^{LIQ}. \quad (\text{A.16})$$

これより、式 (A.15), (A.16) を用いてレジーム過程によって条件付けられた流動性ベータの分散 $V[\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} | v_t = i]$ は式 (A.17) で与えられる。

$$V[\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} | v_t = i] = E[(\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} - E[\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} | v_t = i])^2 | v_t = i]$$

$$= E[(\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} - \beta_{S,i}^{LIQ})^2 | v_t = i]$$

$$= E \left[\left(\frac{\sum_{t=1}^T (\sigma_{L,i} \varepsilon_{S,t,i} - \rho_i \sigma_{S,i} \varepsilon_{L,t,i}) LIQ_t P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}{\sum_{t=1}^T \sigma_{L,i} LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}} \right)^2 \middle| v_t = i \right]$$

$$= \frac{E \left[\left\{ \sum_{t=1}^T (\sigma_{L,i} \varepsilon_{S,t,i} - \rho_i \sigma_{S,i} \varepsilon_{L,t,i}) LIQ_t P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} \right\}^2 \middle| v_t = i \right]}{\left(\sum_{t=1}^T \sigma_{L,i} LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} \right)^2}. \quad (\text{A.17})$$

レジーム過程を通じて得られた誤差項は状態 v_t で条件付けた場合には異時点における誤差どうして無相関となることを留意しつつ、式 (A.17) の分子を展開し、整理する。

$$E \left[\left\{ \sum_{t=1}^T (\sigma_{L,i} \varepsilon_{S,t,i} - \rho_i \sigma_{S,i} \varepsilon_{L,t,i}) LIQ_t P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} \right\}^2 \middle| v_t = i \right]$$

$$= E \left[\sum_{t=1}^T (\sigma_{L,i} \varepsilon_{S,t,i})^2 LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}^2 + \sum_{t=1}^T (\rho_i \sigma_{S,i} \varepsilon_{L,t,i})^2 LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}^2 - 2 \sum_{t=1}^T \rho_i \sigma_{S,i} \sigma_{L,i} \varepsilon_{S,t,i} \varepsilon_{L,t,i} LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}^2 | v_t = i \right]$$

$$= \sum_{t=1}^T \sigma_{L,i}^2 LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} E[\varepsilon_{S,t,i}^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} | v_t = i] + \sum_{t=1}^T \rho_i^2 \sigma_{S,i}^2 LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} E[\varepsilon_{L,t,i}^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} | v_t = i] - 2 \sum_{t=1}^T \rho_i \sigma_{S,i} \sigma_{L,i} LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} E[\varepsilon_{S,t,i} \varepsilon_{L,t,i} P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} | v_t = i]. \quad (\text{A.18})$$

ここで、サンプル数 T 、状態数 n 、回帰係数の個数 k の場合には、誤差項の分散、共分散の不偏推定量は

$$\hat{\sigma}_{S,i}^2 = \frac{1}{T - nk - n} \sum_{t=1}^T (r_{S,t} - \hat{r}_{S,t,i})^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}, \quad (\text{15})$$

$$\hat{\sigma}_{L,i}^2 = \frac{1}{T - nk - n} \sum_{t=1}^T (r_{L,t} - \hat{r}_{L,t,i})^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}, \quad (\text{16})$$

$$\hat{\rho}_i \hat{\sigma}_{S,i} \hat{\sigma}_{L,i} = \frac{1}{T - nk - n} \sum_{t=1}^T (r_{S,t} - \hat{r}_{S,t,i})(r_{L,t} - \hat{r}_{L,t,i}) P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}, \quad (\text{17})$$

であり、これら式 (15), (16), (17) を式 (A.18) に代入することで、式 (A.19) を得る。

$$\sum_{t=1}^T \sigma_{L,i}^2 LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} \hat{\sigma}_{S,i}^2 + \sum_{t=1}^T \rho_i^2 \sigma_{S,i}^2 LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} \hat{\sigma}_{L,i}^2 - 2 \sum_{t=1}^T \rho_i \sigma_{S,i} \sigma_{L,i} LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\} \cdot \hat{\rho}_i \hat{\sigma}_{S,i} \hat{\sigma}_{L,i} = (\sigma_{L,i}^2 \hat{\sigma}_{S,i}^2 + \rho_i^2 \hat{\sigma}_{L,i}^2 \sigma_{S,i}^2 - 2 \rho_i \sigma_{S,i} \sigma_{L,i} \cdot \hat{\rho}_i \hat{\sigma}_{S,i} \hat{\sigma}_{L,i}) \sum_{t=1}^T LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}. \quad (\text{A.19})$$

これより、式 (A.17) の分子に式 (A.19) を代入することで、レジーム過程で条件付けた流動性ベータの分散 $V[\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} | v_t = i]$ は式 (14) で与えられる。

$$V[\hat{\beta}_{S,i}^{LIQ} | v_t = i]$$

$$= \frac{\hat{\sigma}_{S,i}^2 \sigma_{L,i}^2 + \rho_i^2 \sigma_{S,i}^2 \hat{\sigma}_{L,i}^2 - 2\rho_i \sigma_{S,i} \sigma_{L,i} \hat{\rho}_i \hat{\sigma}_{S,i} \hat{\sigma}_{L,i}}{\sigma_{L,i}^2 \sum_{t=1}^T LIQ_t^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}}, \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}_{S,i}^2 = \frac{1}{T - nk - n} \sum_{t=1}^T (r_{S,t} - \hat{r}_{S,t,i})^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}, \quad (15)$$

$$\hat{\sigma}_{L,i}^2 = \frac{1}{T - nk - n} \sum_{t=1}^T (r_{L,t} - \hat{r}_{L,t,i})^2 P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}, \quad (16)$$

$$\hat{\rho}_i \hat{\sigma}_{S,i} \hat{\sigma}_{L,i} = \frac{1}{T - nk - n} \sum_{t=1}^T (r_{S,t} - \hat{r}_{S,t,i})(r_{L,t} - \hat{r}_{L,t,i}) P\{v_t = i | \mathbf{R}_t; \Theta\}. \quad (17)$$



伊東 賢二 (学生会員)

昭和 63 年生. 平成 23 年電気通信大学システム工学科卒業. 同年電気通信大学大学院情報理工学研究科総合情報学専攻修士課程入学, 現在に至る.



宮崎 浩一

昭和 42 年生. 平成 12 年筑波大学大学院経営・政策科学研究科博士課程修了. 博士(経営学). 電気通信大学システム工学科専任講師等を経て, 平成 23 年から電気通信大学大学院情報理工学研究科教授, 現在に至る. 日本オペレーションズ・リサーチ学会, JAFEE, 日本応用数理学会, 応用統計学会等各会員.



回瀬 純治

昭和 61 年生. 平成 23 年電気通信大学大学院電気通信学研究科システム工学専攻修士課程修了. 同年(株)三菱UFJトラスト投資工学研究所(MTEC)入社, 現在に至る.