Vol.2012-MPS-88 No.6
2012/5/17

最適性を保証する多重解像度表現を用いた離散直線当てはめ

宮武 孝尚[1]　中力 雅人[1]　清水 郁子[1]

概要：コンピュータビジョンにおける重要な課題の一つである画像中の点に対する直線当てはめでは，一般には，画像中の点のうちどれが直線に含まれているかをあらかじめ知ることは難しいため，与えられた点群に外れ値が含まれることを考慮する必要がある．これに対し，最も多くの点が整合する最適解を求める離散直線当てはめの手法が提案されているが，計算時間がかかるという問題がある．そこで本手法では，多重解像度表現を適用し，計算の高速化を図る．このとき，最適性を保証するダウンサンプリングと直線表現を適用する．そして，解像度が深さに対応する木構造で多重解像度の問題を保持して最適解を効率よく探索する．このとき，類似度の高い点の組み合わせ (問題) を統合し，離散直線当てはめの動作を並列化することで計算時間の短縮を狙う．提案手法の有効性を示すために，2 次元実データのエッジを抽出したデータに対して，多重解像度表現を使用したものとオリジナルの解像度で離散直線当てはめを行い，計算時間を比較する．計算時間を比較したところ，大部分のデータにおいて計算時間が短縮されることを確認した．また，最適性を保証したことで同じ解が得られることも確認した．

キーワード：離散直線，直線当てはめ，多重解像度，木構造，高速化，並列処理

Optimal digital line fitting using multiresolutional representation

Takahisa MIYATAKE[1]　Masato CHURIKI[1]　Ikuko SHIMIZU[1]

Abstract: Line fitting to image points is one of the most important issues in computer vision. In general, image points includes many outliers, which do not belong to the line to be estimated and they cannot be eliminated beforhand. Therefore, it is necessary to detect outliers and to fit a line simultaneously. To solve this problem, discrete line fitting methods have been proposed in the literature. In these methods, the optimal solution is obtained which is the most consistent line among all possible combinations of image points. However, they require much computational costs. In this method, by applying the multiresolution representation, the computational time of the optimal discrete line fitting is much reduced. Our method guarantees the optimality by a linear expression and down-sampling which preserve the opitomality. In addition, we propose a efficient search algorithm for obtaining the optimal solution using a multi-resolution tree structure whose depth is corresponding to the resolution. And, by integrating similar problems and parallel processing of two the discrete line fittings, the computation time is reduced. In order to show the effectiveness of the proposed method, experimental results of a discrete line fitting were shown by changing the initial resolution and it was confirmed that the computation time was much reduced by our method for many data sets.

Keywords: digital line, line fitting, multiresolution, tree structure, acceleration, parallel operation

1. はじめに

直線当てはめは，コンピュータビジョンにおいて基本的かつ重要な問題の一つである．これは，画像上のエッジ点群，すなわち，2 次元空間上に存在する点群に最も当てはまる直線を求める問題である．直線当てはめはカメラキャリブレーションや人工物の認識など広く用いられている．

一般に，直線当てはめにおいて，画像中のエッジ点全てが 1 つの直線に含まれるとは限らない．そのためデータにノイズや誤差が含まれている可能性を考慮する必要が

[1] 東京農工大学 大学院
Graduate School, Tokyo University of Agriculture and Technology

あり，従来は統計的な最適化で直線当てはめを行う手法が提案されてきた．例えば，古典的な手法の一つである最小二乗法 [1] では，入力点と直線との距離を最小にするようにパラメータを推定することで直線当てはめを行う．しかし，入力される点（エッジ点）が推定したい直線上にないものを含む場合（外れ値を含む場合）にはノイズが正規分布に従うという前提を満たさないため，望ましい結果は得られない．それに対し，外れ値を含むデータに対しても頑健な直線当てはめができる手法として M 推定 [2] が提案されている．M 推定における誤差関数では，一定以上の誤差を持つ点の重みを低くすることで外れ値の影響を受けにくくしている．しかし，この手法であっても外れ値の割合が多い点群に対しては正しい結果が求められないという問題がある．また，統計的な手法である RANdom SAmple Consensus(RANSAC)[3] は非常によく用いられる手法である．この手法はランダムに 2 点をサンプリングし，その 2 点を通る直線を求め，残りの点の直線からの距離を計算し，直線からの距離が閾値以内の点の数を数えることを繰り返す．十分な回数のサンプリングを繰り返し，最も多くの点が直線から閾値以内になったときの直線を解とする．しかし，RANSAC においても最適な直線が求まること (最適解への収束性) は保証されていない．

一方で，離散幾何学においても直線当てはめが研究されている．離散幾何学では点は整数値で表現され，直線は一定の幅をもつを 2 本のユークリッド直線の間にある整数値の点の集合として定義される．これを離散直線と呼ぶ．従来，与えられた点群が離散直線かどうかを判定する手法 [4], [5], [6], [7]，与えられた点群が離散直線である場合に直線の幅を計算する手法 [8], [9] が提案されている．しかしこれらの手法では，点集合に外れ値を含むことを想定していない．これに対し，外れ値が含まれる場合に，あらゆる可能な点の組合せの中から直線に含まれる点の数が最大になるような組合せを求める手法 [10], [11] が提案されている．これらの手法では，一定の幅の直線に対して含まれる点の数が最大になるという意味での最適解を求めることができる．文献 [11] では，離散直線の最適解を求める問題を混合整数計画問題として定式化しているが，非常に計算時間がかかっていた．文献 [10] の手法では，双対変換を行いパラメタ空間においてトポロジカルスイープを適用することにより入力点の数 N に対し $O(N^2 \log N)$ の計算時間で最適解を求めることができる．しかしながら，点の数が増えると計算時間が増大するため，多重解像度表現により明らかな外れ値を低い解像度で除外することにより計算時間を削減する手法 [12] が提案されたが，この手法では離散直線のモデルや多重解像度表現の問題で解の最適性が保証されていなかった．

そこで本論文では，多重解像度表現により離散直線の最適解を高速に求める手法を提案する．本論文では，standard と呼ばれる離散直線のモデルでは，離散直線をダウンサンプリングしたものは必ず離散直線であるという性質 [13] を用い，低い解像度で求められた解すべてを高い解像度で解くことで最適性を保証する．このとき，多重解像度で得られた解を木構造で保持して枝刈りを行い，類似した解を統合することで効率よく探索する．さらに，独立な離散直線探索を並列化して実行することで計算時間を短縮する．

2. 離散直線と離散直線当てはめの定義

以下では $\mathbb{R}$ を実数の集合，$\mathbb{Z}$ を整数の集合とする．

2.1 離散直線の定義

まず，2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ における直線 L を以下のように定義する．

$$L = (x, y) \in \mathbb{R}^2, : ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

$a, b, c \in R$ である．次に 2 次元離散空間 $\mathbb{Z}^2$ における離散直線 $D(L)$ を以下のように定義する．

$$D(L) = (x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq ax + by + c < w \qquad (2)$$

$a, b, c, w \in \mathbb{R}^2$ である．

離散直線に含まれる座標値 (x, y) は整数値しか取らないが離散直線のパラメータは実数とする．また，w は幾何学厚み (geometrical distance) と呼ばれ，文献 [8] によると幾何学的厚みにしたがって離散直線は次の四種類に分けられるが，得られる直線の最適性を保証するため，本論文では $w = |a| + |b|$ となる standard と呼ばれるモデルを使用する．

2.2 離散直線当てはめの定義

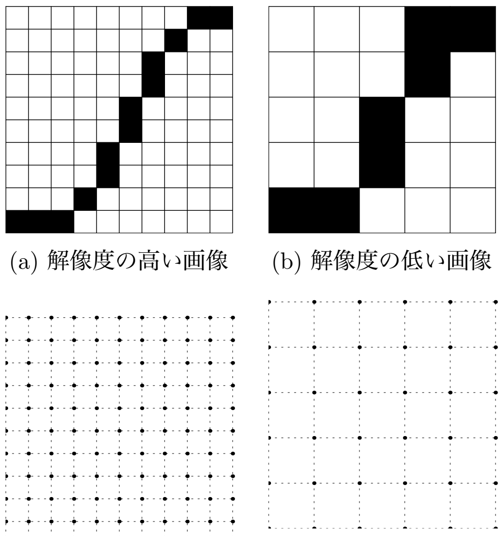
前節での離散直線の定義から離散直線当てはめを次のように定義する．与えられた離散点の集合を S とする. すなわち，

$$S = x_i \in \mathbb{Z}^2 : i = 1, 2, ..., N \qquad (3)$$

を離散点の集合 S と定義し，S にふくまれる点を最も多く含む離散直線 $D(L)$ を求めるということである．ここで $x \in S \cap D(L)$ となるような点 $x \in S$ が内部点であり，それ以外の点が外れ値である．離散直線当てはめの従来手法 [10] では，双対変換を行いパラメタ空間においてトポロジカルスイープを適用することにより入力点の数 N に対し $O(N^2 \log N)$ の計算時間で最適解を求めることができる．

3. 多重解像度表現とダウンサンプリング

本手法では，あらかじめ低解像度で明らかに外れ値である点を除外し，効率よく探索を行う．低解像度での計算で得られた結果を高解像度での計算に反映させることを繰り返すことで計算時間を短縮するために，複数の解像度で表



(a) 解像度の高い画像　(b) 解像度の低い画像

(c) $\mathbb{Z}^2$ の点集合の一部　(d) $S(2,2)$ の点集合の一部

図 1　ダウンサンプリング
Fig. 1　Downsampling

現することを，多重解像度表現と呼ぶ．

最適性を保証するためには，低解像度での離散直線が高解像度での離散直線を必ず含んでいる必要がある．そこで，本手法では文献 [13] でこれを保証することが示されているオリジナルの解像度の画像から低解像度の画像を得るためのダウンサンプリングと standard な離散直線モデルを用いる．

まず，低い解像度のグリッドを意味する $\mathbb{Z}^2$ の部分集合 $S(h,v) = \{(Xh, Yv) : \forall(X,Y) \in \mathbb{Z}^2, h, v \in \mathbb{Z}\}$ を考える (図 1(d))．$[0,h) \times [0,v)$ は基本領域であり，ベクトル $X(h,0) + Y(0,v)$ によって平行移動させることでタイル状に並べられ，それぞれのタイルは $S(h,v)$ の点を必ず一つ含む．ここで $D(L)$ と $S(h,v)$ の共通部分に着目する．これを，部分集合 $S(h,v)$ における $D(L)$ のダウンサンプリングとする．図 1(a) と図 1(d) の共通部分が図 1(b) といえる．

ここで，$\left[\frac{x}{h}\right]$ を x を h で割った商，$\left\{\frac{x}{h}\right\}$ をその除算の余りとすると，$\mathbb{Z}^2$ 上で $S(h,v)$ によって生成された新しい座標系 (X,Y) は次のようになる．

$$X = \left[\frac{x}{h}\right] \qquad Y = \left[\frac{y}{v}\right]$$

$$x = hX + \left\{\frac{x}{h}\right\} \qquad y = vY + \left\{\frac{y}{v}\right\}$$

文献 [13] によると，standard な離散直線をダウンサンプリングしたものは standard な離散直線になることが証明されている．すなわち，オリジナルの点集合をダウンサンプリングした点集合には，必ずオリジナルの点集合における最適解を含むような standard な離散直線が存在すると言える．つまり，低解像度で得られる standard な離散直線は，オリジナルの解像度での standard な離散直線を含む．ここで，低解像度での離散直線のうち，最も内部点が多かったものが必ずしもオリジナルな解像度の最適解であるとは限らないことに注意しておく．しかし，低解像度で得られた離散直線のうち，どれかは必ずオリジナルな解像度での離散直線の最適解を含んでいる．

4. 提案手法

4.1 離散直線探索の手法

与えられた点群から離散直線を見つける離散直線当てはめを行う手法として，トポロジカルスイープに基づく手法 [10] を適用する．この離散直線探索の手法は，最適解だけではなく，すべての組合せの解を得ることができる．そのため，最適性を保証するダウンサンプリングを行い，低解像度で全ての離散直線の解を得ることができ，低解像度で得られた解で内部点の候補を絞り，高解像度で再度探索を行うことで，最適性を保証しつつ効率よく離散直線当てはめが可能となる．なお，文献 [10] では standard な離散直線ではなく naive と呼ばれる離散直線モデルを使用しているが，最適性保証の観点から本手法では standard な離散直線に変更する．

トポロジカルスイープによる手法では，離散直線の探索は x 軸方向と y 軸方向の 2 方向により行う．

$$D(L) = (x,y) \in \mathbb{Z}^2, : 0 \leq ax + (1-a)y + c < 1 \quad (4)$$

$$D(L) = (x,y) \in \mathbb{Z}^2, : 0 \leq ax + (1+a)y + c < 1 \quad (5)$$

これら 2 つのモデルは表現したい直線の傾きにより使い分けられる．しかし，与えられた点群の直線の傾きはあらかじめ知ることはできないため，一つの点群に対してそれぞれのモデルで離散直線当てはめを行う必要がある．よって，一つに点群に対し，2 つのモデルを用いて離散直線探索を行うことになる．

4.2 多重解像度表現の適用と処理の流れ

多重解像度表現を用いる場合には，まずダウンサンプリングの定義に従い，入力点をある解像度まで下げる．このある解像度を初期解像度と呼ぶことにする．初期解像度は現段階ではヒューリスティックに指定している．そして，解像度を下げた点集合について，離散直線当てはめを行う．このときに，最適解だけではなく得られるすべての解を保存しておくことで，こうすることで一部の解を破棄することなく，最適性を保証することができる．

ここで，本手法では多重解像度探索における最適性が保証されているため，どの解像度から探索を開始しても，得られる解は同一である，すなわち，最適解が得られることに注意しておく．ただし，計算時間は探索を開始する解像度により異なる．

多重解像度表現による解の絞込みを説明する．例えば，図 2 の最も低い解像度では，図中の黒い点が内部点，ピン

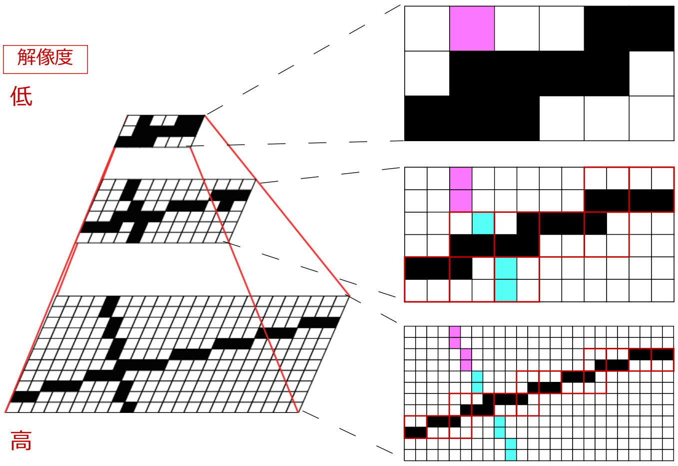


図 2　多重解像度表現による離散直線の探索
Fig. 2　Descrete line recognition using multiresolutional representation

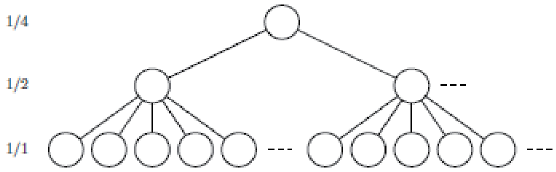


図 3　多重解像度表現を適用した離散直線当てはめの木構造
Fig. 3　Tree structure of a discrete straight line fitting to apply the multiresolution representation

クの点が外れ値という直線が得られたとする．すると，2番目の解像度ではピンクの点に相当する点群はあらかじめ外れ値であることが分かっているので，入力から除外できる．そして，2 番目の解像度では図中の黒い点が内部点，水色の点が外れ値であるという直線が得られると，最も高い解像度での入力は，ピンクの点および水色の点を除外した点群になる．こうすることで，低い解像度で，荒く離散直線当てはめが行われ，明らかな外れ値が除かれるため，高い解像度での入力点が少なくなる．

これを，解像度を上げながら得られたすべての解について繰り返し行うと，最終的にはオリジナルの解像度で離散直線当てはめを行うことになるが，このときに入力とされる点は，低い解像度での離散直線当てはめの結果を元に限定された点集合であるため，オリジナルの解像度で解くよりも入力点数は少なくなり，計算時間が削減されるはずである．

このとき，探索を行う順番が重要である．直線当てはめを行うべき点群は，図 3 のように，初期解像度での問題を根とした木構造に保持し，効率よく探索を行う．

4.3　問題統合

離散直線当てはめの最適性を保証するためには全ての点の組合せについて考える必要があるが，問題を全て保持し，全ての問題に対して離散直線探索を行うと計算時間と使用メモリが莫大なものになる．さらに，低い解像度で得られる解は，互いに非常に類似した点集合であることが多く，重複して探索を行うことで計算時間が増大になる．そこで計算時間とメモリ使用量を削減するためによく似た問題を一つの問題として扱う問題統合を行う．

ある解像度で得られた解を内部点の数でソートすると，その解像度での最適解と 2 番目の解を比べるとほとんど差異がない場合がある．つまり，内部点の組合わせがほとんど同じだったり，最適解の点を一つだけ除いたような解が 2 番目に得られたりする．似たような点群をそのまま次の解像度の入力とすると，次の解像度では同じような入力点の問題を何度も解くことになり，非常に効率が悪い．そこで，解 C_A と解 C_B に対し，共通部分 $C_A \cap C_B$ が，それぞれの解の点の数の閾値以上あるとき，これらの問題を統合する．これにより，共通の点を内部点として持つ似たような問題は一つとして扱われ，何度も重複して解くことがなくなる．また，得られた解 C_A と C_B について，それらを統合する解 $C_{A \cup B} = C_A \cup C_B$ は，当然 $C_A \subseteq C_{A \cup B}$ かつ $C_B \subseteq C_{A \cup B}$ であるから，得られるべき解を失うことはない．これらのことから，最適性を損ねることなく，解くべき問題数の増加を抑えることにより計算時間とメモリ使用量を削減できることがわかる．

本論文ではそれぞれの問題の共通部分を問題の類似率と呼ぶ．ここで問題統合は類似率の閾値の設定方法が重要になる．閾値が低くなりすぎたり，高くなりすぎたりすると，問題統合による計算時間短縮が効率的に行われない．そこで我々は適応的に閾値が変化するような閾値を設定する．このとき，得られた解を内部点の数でソートすると，似たような点集合は，連続して出現することに着目している．まず，統合の閾値の初期値はヒューリステックに設定する．そして，その閾値で問題を統合していき，直前に統合された問題同士の類似率を保持する．統合が起こらなかった場合には，そこから点集合が大きく変化していると仮定し，閾値を変更する．すなわち，それまでに統合された問題の類似率のうち最低の類似率を次の統合閾値とする．

統合閾値が低くなりすぎると入力点数が増大するので，計算時間が増加する危険性がある．一方で，統合閾値が高すぎると解くべき問題数が増加し，計算時間が増加する．前者に比べ，後者の弊害は大きい．したがって，本手法では閾値が比較的低くくなるよう閾値 -5 %の範囲内の類似率の問題は統合するようにする．この提案手法で多くの問題の場合に適切な問題統合が行えるようになり，問題数の増加が抑えられ，計算時間が抑えられることが期待できる．

4.4　幅優先探索と枝刈り

図 3 のように木構造になった多重解像度表現を用いた

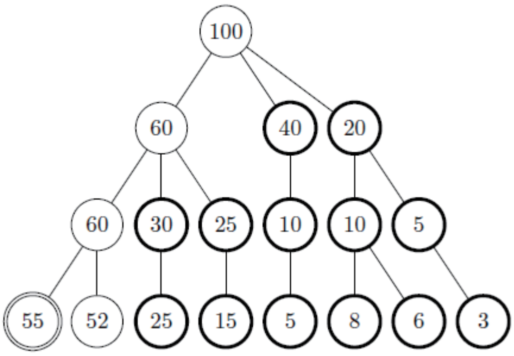


図 4　枝刈り (数字はオリジナルの解像度相当の点の数)
Fig. 4　Pruning (the number is the number of points equivalent to the resolution of the original)

離散直線当てはめ問題は，各階層における問題は，入力の点の数の降順にソートしておき，幅優先探索で探索する．このとき，明らかに最適解でない問題のノードは枝刈りを行う．

まず，最も低い解像度での全ての点を入力とし，離散直線当てはめを行う．そして，解像度を上げながら問題を解いていき，オリジナルの解像度の問題を一つ解いたときに，その最適解のオリジナルの解像度相当の内部点の点の数が得られる．このオリジナルの解像度相当の内部点の点の数に対して，これから解く離散直線，平面当てはめの問題の入力点のオリジナルの解像度相当の点の数が少ない場合は，この問題を枝刈りでき，解く必要がない．なぜなら，解像度を上げながら解いた場合にも，オリジナルの解像度相当の点の数で換算すると，その数が増えることは絶対にないからである．つまり，オリジナルの解像度で見れば，解像度を上げるということは離散直線の幅を小さくすることであり，もともと離散直線に入っていなかった点が増えることはない．幅を狭くしても外れ値になる点がない場合には，点の数が同じということはあり得るが，増えるということはない．つまり，まだ解いてない離散直線当てはめの問題を解いたところで，オリジナルの解像度で解いた内部点の数より少ない入力点であれば，結果は必ずその解より少ないと言える．

図 4 の例で説明する．左下の点の数 55 の問題を解いて最適解 52 が得られたとすると，点の数が 52 より少ない太い線の問題はすべて枝刈りできる．この枝刈りにより最適解が失われる可能性がないことは図 4 を見ても確認できる．

4.5　離散直線探索の並列化

本手法では入力となる点群に対し，式 (4) と式 (5) の 2 つの離散直線のモデルを用いて離散直線を探索する．この 2 つのモデルは独立であり，片方のモデルでの結果がもう一方に影響を及ぼすことはない．そこで我々は 2 つのモデルによる離散直線探索は並列に実行する．まず，親プロセスでそれぞれのモデルでの離散直線認識を行う子プロセスを 2 つ作成する．子プロセスはそれぞれのモデルで多重解像度表現を使用し，離散直線認識を行い解を求める．親プロセスはその間，待ち状態となって子プロセスが終了するのを待つ．子プロセスは解が求まり次第，親プロセスに解を送りプロセスごと消去される．親プロセスは 2 つの子プロセスから解を受けとるとよりよいものを選び最適解として出力する．なお，この並列化はマルチコア CPU のみで行っている．

4.6　アルゴリズム

離散直線当てはめ全体のアルゴリズムを述べる．あらかじめ，オリジナルの解像度での解を入れる解リストと，これから解くべき問題を入れる問題リストを作っておく．問題リストの問題が持っておくべき情報は，解像度，直線のモデルの種類，内部点の集合の 3 つである．まず親プロセスのアルゴリズムを示す．

- 初期問題を 2 つの直線のモデルそれぞれについて問題を生成する．この初期問題は，解像度は初期解像度に設定し，すべての点が内部点である．
- 作成された 2 つの問題についてそれぞれ子プロセスを作成する．
- 親プロセスは 2 つのプロセスが終了するまで待機する．
- 2 つのプロセスが終了し解が送られてきたらよいよいものを最適解として出力する．

次に子プロセスのアルゴリズムを示す．

- 問題リストが空でない間，問題リストから最も入力点の数が多い問題を一つ取ってくる．
- 問題リストを元に，入力となる点を限定し，解像度を落とした点集合を生成する．
- 生成した点集合に対して，問題を解く．
- 解いた問題の解像度が 1/1 であり，解が既にあるものよりよいものであれば，解を解リストに追加する．それ以外の場合は，問題リストに追加する．このとき，重複は削除し，似た問題は統合し (問題統合)，点の数の降順にソートしておく．
- 解リストに解を追加したときは，その内部点の数より入力点の数が少ない問題を，問題リストから削除する (枝刈り)．
- 問題リストが空になるまで繰り返し，空になったら親プロセスに解を送りプロセスを破棄する．

5.　実験と考察

提案手法を評価するため，実画像からエッジを抽出したデータに対して離散直線当てはめを行った．使用したデータの一例を図 5 に示す．

多重解像度表現を使用したものとオリジナルの解像度で離散直線当てはめを行ったものの計算時間を計測し比較し

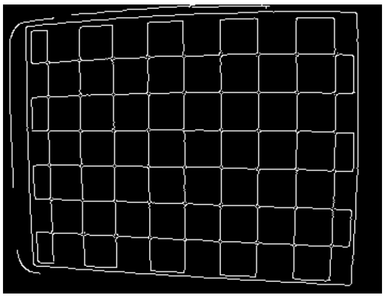


図 5　実験に使用したデータの一例
Fig. 5　An examplme of the edge points for experiments

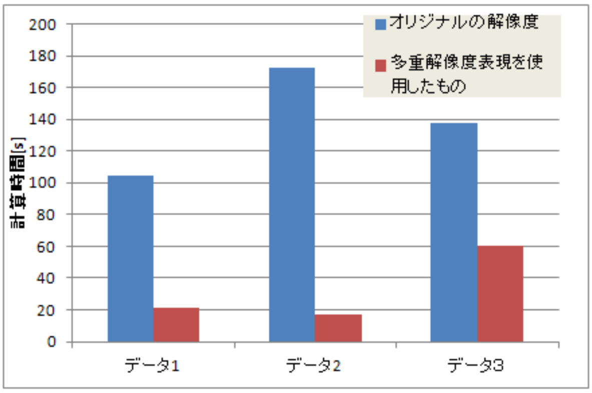


図 6　離散直線当てはめの計算時間
Fig. 6　Computation time of fitting digital line

提案手法の評価を行った．結果を図 6 に示す．全てのデータにおいて，多重解像度表現により得られた解は，オリジナルの解像度で解いた場合と同一の最適解であった．これにより，提案手法により最適解が得られることを確認した．また，多重解像度表現により離散直線当てはめを行うことで，計算時間が大幅に短縮されることが分かった．しかし，一部のデータでは計算時間の短縮の効果があまり大きくない場合もあった．これは，我々の手法では解像度を落としたときに，オリジナルの解像度での最適解の離散直線の点群を含む離散直線が，低い解像度での最適解，もしくはそれに近いものであるときに最大の効果を発揮する問題探索で問題木を探索しているためである．したがって，オリジナルの解像度での最適解の離散直線の点群を含む離散直線が，低い解像度で内部点の数が少ない解に含まれていた場合は，計算時間があまり短縮できないことがある．

6. おわりに

本論文では最適性を保証した多重解像度表現を用いた離散直線当てはめを提案した．離散直線当てはめの計算量は入力点の数が多くなればなるほど増大する．そこで，低い解像度で離散直線当てはめを行い，あらかじめ明らかに外れ値である点を除外することで，入力となる点の数を減らして離散直線当てはめを行うことで，計算時間を削減した．このとき，高い解像度で得られる離散直線はより低い解像度で得られる離散直線に必ず含まれるようなモデルを適用することにより最適性を保証した．具体的には，standard と呼ばれる離散直線モデルとダウンサンプリングの手法を適用した．さらに，問題の枝刈りや，似たような問題の統合により計算時間を削減した．また，2 つのモデルにより離散直線当てはめを並列化した．実験により，提案手法は多重解像度表現を用いない手法に比べて，計算時間を短縮していることを確認した．

今後の展望としては，今回提案した手法を 3 次元離散平面当てはめに応用することが挙げられる．

参考文献

[1] Kenichi Kanatani: Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice, Elsevier Science Inc.(1996).

[2] Peter J. Huber:Finite sample breakdown of M- and P-estimators, The Annals of Statistics,Vol.12,pp119-126(1996).

[3] Martin A. Fischler,Robert C. Bolles:Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography, Communications of the ACM,Vol.24,Issue.6(1981).

[4] David Coeurjolly and Valentin Brimkov：Computational aspects of Digital Plane and Hyperplane Recognition, Lecture Notes in Computer Science vol.4040,pp.291-306(2006).

[5] Ivan Stojmenović and Ratko Tošić：Digitaization schemes and the recognition of digital straigh lines, hyperplanes and flats in arbitrary dimensions, Vision Geometry, contemporary Mathematics Series vol.119,pp.197-212(1991).

[6] Yan Gérard：A fast and elementary algorithm for digital plane recognition, Electronic Notes in Discrete Mathematics vol.12,pp.142-153(2003).

[7] Yan Gérard and Isabelle Debled-Renesson and Paul Zimmermann：An elementary digital plane recognition algorithm, Discrete Applied Mathematics and Combinatorial Operations Research and Computer Science vol.151,pp.169-183(2005).

[8] Isabelle Debled-Rennesson and Jean-Luc Remy and Jocelyne Rouyer-Degli：Linear segmentation of discrete curves into blurred segments, Discrete Applied Mathematics vol.151,pp.122-137(2005).

[9] Provot, Laurent and Buzer, Lilian and Debled-Rennesson, Isabelle：Recognition of blurred pieces of discrete planes, Discrete Geometry for Computer Imagery,Lecture Notes in Computer Science vol.4245,pp.65-76(2006).

[10] Yukiko Kenmochi and Lilian Buzer and Hugues Talbot：Efficiently computing optimal consensus of digital line fitting, ICPR 2010,pp.1064-1067(2010).

[11] Rita Zrour and Yukiko Kenmochi and Hugues Talbot and Ikuko Shimizu and Akihiro Sugimoto：Combinatorial optimization for robust digital line and plane detection, WCVIM of PSIVT09(2009).

[12] Masato Churiki,Ikuko Shimizu,Rita Zrour,Hugues Talbot,Yukiko Kenmochi,Akihiro Sugimoto:Digital line and plane recognition using combinatorial optimization by multiresolutional representation, IEVC 2010(2010).

[13] Mouhammad Said and Jacques-Olivier Lachaud and Fabien Feschet：Multiscale Discrete Geometry, DGCI 2009 vol.5810,LNCS,pp.118-131(2009).