

資産評価モデルにおける短期・長期ボラティリティの影響

小林 寛司¹ 宮崎 浩一^{1,a)}

受付日 2011年8月9日, 再受付日 2011年9月26日,
採録日 2011年10月31日

概要: 本研究では, EGARCH モデルをベースとして, 日次リターンとその長期的な平均リターンから短期・長期ボラティリティを推定するモデルを提案する. これらをリスクファクタに持つ資産評価モデルを構築し, 既存モデルのリスクファクタ (SMB, HML, 流動性指標) をコントロールしたうえでモデルの説明力を検討した. 分析結果から, 短期ボラティリティのポートフォリオリターンに対する説明力は SMB ファクタを説明変数に加えることで失われるが, 長期ボラティリティの説明力は既存モデルのリスクファクタをコントロールしても失われず, その重要性が示唆された.

キーワード: 短期・長期ボラティリティ, GARCH モデル, 資産評価モデル

On the Influences of Short-run and Long-run Volatilities in the Asset Pricing Models

HIROSHI KOBAYASHI¹ KOICHI MIYAZAKI^{1,a)}

Received: August 9, 2011, Revised: September 26, 2011,
Accepted: October 31, 2011

Abstract: This study provides the model to estimate the EGARCH based short-run and long-run volatilities from daily return and its long period average return. Constructing the asset pricing model that incorporates the two volatilities as its risk factor, we discuss the explanatory power of them after controlling the existing risk factors such as SMB, HML and Liquidity indicator. The result that the explanatory power of the short-run volatility disappears when the SMB factor is controlled, while that of the long-run volatility still exists after controlling the existing risk factors suggests that the role of the long-run volatility is important in the asset pricing model.

Keywords: short-run and long-run volatilities, GARCH model, asset pricing model

1. はじめに

株式市場において, 様々なポートフォリオの超過リターンを市場ポートフォリオの超過リターンによって説明することを試みる回帰モデルとして Sharpe (1964) [11], Lintner (1965) [7] による資本資産評価モデル (以下 CAPM と呼ぶ) がある. CAPM は, ファイナンス理論においてリスクとリターンの関係を表すモデルとして中心的な役割を果たしている. 一方で, CAPM は, 特にクロスセクションデータ

におけるリターンのバラツキに対する説明力が十分ではないという点も広く知られている. この問題点の解決策として, CAPM を連続時間に拡張した Merton (1973) [8] の Intertemporal CAPM (以下 ICAPM と呼ぶ), Ross (1976) [10] の APT 等のマルチファクタモデル, Fama ら (1993) [5] の 3 ファクタモデル (以下 FF3 と呼ぶ) 等がある.

ICAPM では市場ポートフォリオは 1 つのリスクファクタとなり, 状態変数が追加的なリスクファクタとして組み込まれる. 追加的なリスクファクタは, 将来の投資機会の変化にともなう不確実性をヘッジするための需要によって生じる. さらに, ICAPM はマルチファクタモデルと一致することが知られており, 複数のリスクファクタで株価リターンを説明するモデルである.

¹ 電気通信大学大学院情報理工学研究所総合情報学専攻
Department of Informatics, Graduate School of Informatics and Engineering, The University of Electro-Communications, Chofu, Tokyo 182-8585, Japan

a) miyazaki@se.uec.ac.jp

実証ファイナンスの分野では、どのようなリスクファクタを用いれば、リターンを説明できるのかについての検証が非常に重要視されている。実際の市場においてボラティリティと株価の間には、一般的に逆相関の関係があることが知られており、この性質を利用して市場全体のボラティリティを資産評価モデルのリスクファクタとして着目した研究では、Angら(2006)[3], Adrianら(2008)[1]等がある。Angら(2006)では、マーケットファクタとVIXと呼ばれるボラティリティインデックスの2つで資産評価モデルを構築し、米国株式市場においてボラティリティがリターンに与える影響を検証した。またAdrianら(2008)では、市場全体のボラティリティを短期的要素と長期的要素に分解し、将来の投資機会の変化を表す状態変数として短期・長期ボラティリティを仮定するICAPMの枠組みで資産評価モデルを構築し、米国株式市場において短期・長期ボラティリティが株価リターンに与える影響を検証するとともに、各ボラティリティファクタがクロスセクションデータにおけるリターンのバラツキを説明するリスクファクタとなることを示した。

日本株式市場において市場全体のボラティリティをリスクファクタとして用いる本格的な実証研究は筆者の知る限り見当たらない。また、日本市場では、VIXといったボラティリティインデックスが誕生して日が浅く、ボラティリティインデックスを用いた詳細な検証を行うことが難しい。そこで、本研究ではAdrianら(2008)のアイデアをもとに市場全体のボラティリティを短期・長期ボラティリティに分解し、各ボラティリティが株価リターンに与える影響を詳細に検証する。しかし、Adrianら(2008)において推定された短期・長期ボラティリティが具体的に指し示すファイナンス的意味合いは不明確である。本研究では、長期ボラティリティが長期的な平均リターンの変動をとらえるものであると考え、短期ボラティリティは、日次リターンの変動のうち長期的な平均リターンの変動以外の部分にあたりと仮定し、短期・長期ボラティリティを推定するとともに平均リターンをとる期間としてどの程度の期間を用いて長期ボラティリティを推定すればファイナンス的に整合的な結果が得られるかどうかについて検証を行う。また、短期・長期ボラティリティがリターンに与える影響を検証するとともに、短期・長期ボラティリティがクロスセクションデータにおけるリターンのバラツキを説明する際に有効なリスクファクタとなりうるのかについても検証を行う。

本論文の構成は次のとおりである。次章ではAdrianら(2008)で提案されたボラティリティ変動モデルについて紹介したうえで、本研究で用いるボラティリティ変動モデルを提案する。3章では、本研究で用いるリスクファクタについて詳細に説明を与えた後、本研究で用いる資産評価モデルを導入する。4章では、実証分析を行う。最終章では、まとめと結語を付す。

2. ボラティリティ変動モデル

2.1 先行研究で用いられているGARCHモデル(Adrianら(2008))

マーケット超過リターン R_{t+1}^M を t 日において予測可能な部分 μ_t^M と予測不可能な変動 $\sqrt{v_t}\varepsilon_{t+1}$ の和として以下のように表す。

$$R_{t+1}^M = \mu_t^M + \sqrt{v_t}\varepsilon_{t+1} \quad \varepsilon_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0,1) \quad (1)$$

ここで、予測不可能な変動は、つねに非負の値をとるマーケットボラティリティ $\sqrt{v_t}$ と標準正規分布に従う ε_{t+1} との積で表せるものと仮定し、EGARCHモデルをもとに式(2)~(4)のようにモデル化する。

$$\ln \sqrt{v_t} = s_t + l_t \quad (2)$$

$$s_{t+1} = \theta_4 s_t + \theta_5 \varepsilon_{t+1} + \theta_6 (|\varepsilon_{t+1}| - \sqrt{2/\pi}) \quad (3)$$

$$l_{t+1} = \theta_7 + \theta_8 l_t + \theta_9 \varepsilon_{t+1} + \theta_{10} (|\varepsilon_{t+1}| - \sqrt{2/\pi}) \quad (4)$$

ここで、 s_{t+1} は短期ボラティリティ、 l_{t+1} は長期ボラティリティを表す。

EGARCHモデルでは、ボラティリティの変動を定式化するうえで考慮しなければならない、ボラティリティ・クラスタリングとボラティリティ変動の非対称性を表現できるモデルとなっている。ボラティリティ・クラスタリングとは、ボラティリティが上昇(低下)した後はボラティリティが高い(低い)期間がしばらく続くことであり、先行研究のモデルでは式(3)、(4)から $t+1$ 日のボラティリティは、 t 日のボラティリティを説明変数として加えているため、過去のボラティリティの変動の影響を次期のボラティリティに伝播させることが可能になり、ボラティリティ・クラスタリングを表現することが可能になる。また、ボラティリティ変動の非対称性とは、ボラティリティには株価が上がった日の翌日よりも株価が下がった日の翌日の方が上昇する傾向があるという性質であり、先行研究のモデルでは $\theta_5 < 0$, $\theta_9 < 0$ であれば、予期せず価格が上がった日の翌日よりも予期せず価格が下がった日の翌日の方がボラティリティがより上昇することになり、ボラティリティ変動の非対称性を表現することが可能になる。

期待リターン μ_t^M は、以下のように平均 θ_1 のまわりに短期ボラティリティと長期ボラティリティのリスクプレミアムを付加した形で表現される。

$$\mu_t^M = \theta_1 + \theta_2 s_t + \theta_3 l_t \quad (5)$$

上記のボラティリティ変動モデルのパラメータは最尤法で推定する。尤度関数については付録A.1を参照されたい。

2.2 先行研究に対する問題意識

先行研究では、推定に際して、短期ボラティリティと長期ボラティリティを分離するため、 $\theta_4 < \theta_8$ を制約条件とし

て推定を行っている。しかし、自己回帰係数の制約のみで短期・長期ボラティリティを推定した場合、推定された短期ボラティリティと長期ボラティリティの意味するところが分かりにくい。そこで、本研究では長期ボラティリティが長期的な平均リターンの変動をとらえるものであり、短期ボラティリティは全変動のうち長期的な平均リターンの変動以外の部分にあたるものと仮定し、各ボラティリティを推定する。

また、次章で詳しく説明するが、先行研究では、推定された短期・長期ボラティリティがリターンに与える影響を検証する際に、短期・長期ボラティリティのイノベーションをリスクファクタとして用いている。短期・長期ボラティリティは式(3)、(4)のようなプロセスに従っており、ボラティリティのイノベーションを求める際に、式(3)、(4)を踏襲する形で算出する必要がある。しかし先行研究では、日次で推定されたボラティリティのイノベーションを月中で足し合わせたものをリスクファクタとして用いており、本来のボラティリティプロセスから生じたイノベーションとは異なるもので検証を行っている。

2.3 本研究で提案する GARCH モデル

本研究のモデルでは、長期ボラティリティが長期的な平均リターンの変動をとらえるものであり、短期ボラティリティは、長期的な平均リターンの変動ではとらえられない部分であると考えられる。このようなモデルを考えることで、各ボラティリティをリターンの観点から考察することができ、各ボラティリティにファイナンス的に整合的な意味合いを付与することができる。

まず長期ボラティリティを推定し、その後、長期ボラティリティを既知として短期ボラティリティを日次の株価リターン系列から推定する。長期ボラティリティの過程を以下のように仮定する。

$$R_{n,t+1}^{LM} = \mu_t^{LM} + \exp(l_t)\varepsilon_{t+1}^l \quad \varepsilon_t^l \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1) \quad (6)$$

$$l_{t+1} = \theta_7 + \theta_8 l_t + \theta_9 \varepsilon_{t+1}^l + \theta_{10} (|\varepsilon_{t+1}^l| - \sqrt{2/\pi}) \quad (7)$$

$$\mu_t^{LM} = \theta_1 + \theta_3 l_t \quad (8)$$

ここで、 $R_{n,t+1}^{LM}$ は $t+1$ 日から n 日遡った n 個の日次のマーケット超過リターンの平均値 ($n = 10$ の場合、 $R_{t+1-10}^M, R_{t+1-9}^M, \dots, R_{t+1}^M$ の平均値となる)、 μ_t^{LM} は t 日における長期の期待超過リターン、 ε_t^l は誤差項を表す。本研究では、 $R_{n,t+1}^{LM}$ の n として 10 日、20 日、60 日を用いて検証を行う。また期待リターンは、平均 θ_1 まわりに長期ボラティリティのリスクプレミアム $\theta_3 l_t$ を付加した形で表す。上記のボラティリティ変動モデルのパラメータは最尤法で推定する。式(6)~(8)に基づく尤度関数については付録 A.2 を参照されたい。

次に短期ボラティリティを推定する。短期ボラティリティの過程を以下のように仮定する。

$$R_{t+1}^M = \mu_t^M + \exp(s_t)\varepsilon_{t+1}^s + \exp(l_t)\varepsilon_{t+1}^l \quad \varepsilon_t^s \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1) \quad (9)$$

$$s_{t+1} = \theta_4 s_t + \theta_5 \varepsilon_{t+1}^s + \theta_6 (|\varepsilon_{t+1}^s| - \sqrt{2/\pi}) \quad (10)$$

$$l_{t+1} = \theta_7 + \theta_8 l_t + \theta_9 \varepsilon_{t+1}^l + \theta_{10} (|\varepsilon_{t+1}^l| - \sqrt{2/\pi}) \quad (11)$$

$$\mu_t^M = \theta_1 + \theta'_1 + \theta_2 s_t + \theta_3 l_t \quad (12)$$

ここで、 R_{t+1}^M は t 日から $t+1$ 日におけるマーケット超過リターン、 μ_t^M は t 日における期待リターン、 θ'_1 は日次マーケット超過リターンから日次マーケット超過リターンの平均値を引いた部分の期待リターンの平均を表し、 ε_t^s は誤差項を表す。また、期待リターンは平均 $\theta_1 + \theta'_1$ まわりに短期ボラティリティと長期ボラティリティのリスクプレミアム $\theta_2 s_t + \theta_3 l_t$ を付加した形で表す。モデルのパラメータは最尤法で推定する。式(9)~(12)に基づく尤度関数については付録 A.2 を参照されたい。

上記のように、長期ボラティリティを推定する際、平均リターンを用いているため、本研究のモデルを用いれば、日次リターンの平均をとる期間としてどの程度の期間を用いて長期ボラティリティを推定すればファイナンス的に整合的な結果が得られるかどうかについて検証することが可能になる。

Remark

ここでは、日次のマーケット超過リターンの平均値を用いて長期ボラティリティに関するパラメータを推定した後、日次マーケット超過リターンから推定された日次マーケット超過リターンの平均値を引いた部分をデータとして用い、短期ボラティリティに関するパラメータを推定しているが、日次マーケット超過リターンから日次マーケット超過リターンの平均値を引いたもの(短期リターン)をデータとして用い、短期ボラティリティに関するパラメータを先に推定したうえで、日次マーケット超過リターンから推定された短期リターンを引いた部分を長期リターンのデータとして用い、長期ボラティリティに関するパラメータを推定する方法も考えられる。そこで、実証分析において両者の推定結果に差異が生じるか検証を行ったが、ほぼ差異が生じない結果が得られたため、本研究では推定結果として前者の推定手法による推定結果のみを掲載する。

3. 資産評価モデル

3.1 CAPM に短期・長期ボラティリティを加えた資産評価モデル

本研究では、Merton (1973) の ICAPM をもとに資産評価モデルを構築する。ICAPM では、市場ポートフォリオは 1 つのファクタとなり、将来の投資機会の変化(状態変数の変化)にともなう不確実性をヘッジするための需要によって他のリスクファクタが追加されることを考えている。本研究では、短期ボラティリティと長期ボラティリティの

2つを状態変数とする以下のような ICAPM を考える.

$$E_t[R_{t+1}^i] = \gamma_t Cov_t[R_{t+1}^i, R_{t+1}^M] + F_s Cov_t[R_{t+1}^i, s_{t+1}] + F_l Cov_t[R_{t+1}^i, l_{t+1}] \quad (13)$$

ここで, R_{t+1}^M は t 日から $t+1$ 日におけるマーケット超過リターン, R_{t+1}^i は銘柄 i の t 日から $t+1$ 日までの超過リターン, γ_t は相対的リスク回避係数, F_s, F_l は状態変数 s, l に依存する投資家の選好を表すパラメータを示している.

式 (13) を見ると, 右辺第 1 項は近視眼的な部分であり, 将来の投資機会の変化を考えていない. また, 右辺第 2 項と第 3 項は, 将来の投資機会の変化に対するヘッジを表した部分になっている.

ここで, 式 (13) から個別株式のリターンが, マーケットリターンと個別株式のリターンの共分散, 個別株式のリターンと短期・長期ボラティリティのイノベーションの共分散の 3 つのリスクプレミアムで構成されていることに着目し, 資産評価モデルを構築すると以下のように表せる.

$$R_{t+1}^i = \beta_M^i R_{t+1}^M + \beta_{sres}^i sres_{t+1} + \beta_{lres}^i lres_{t+1} + \varepsilon_{t+1}^i \quad (14)$$

ここで, $sres_{t+1}$ は短期ボラティリティのイノベーション, $lres_{t+1}$ は長期ボラティリティのイノベーション, ε_{t+1}^i は誤差項, $\beta_M^i, \beta_{sres}^i, \beta_{lres}^i$ は各ファクタに関する感応度を表す. 本研究では, 短期・長期ボラティリティを AR(1) モデルにあてはめ, そのイノベーションを $sres_{t+1}, lres_{t+1}$ とする.

3.2 比較対象となるリスクファクタと実証分析で用いる資産評価モデル

前節で説明したボラティリティファクタが株価リターンに与える影響を詳細に検討するため, マーケットファクタにボラティリティファクタを加えたものだけではなく, 他のリスクファクタを加えた際の結果の差異についても検証を行う. 具体的には, 他のリスクファクタを式 (14) に加えることで, ボラティリティファクタが株価リターンに与える影響がなくなれば, ボラティリティファクタは, 各リスクファクタに対応する株式特性を説明するファクタであることが分かる. 逆に, ボラティリティファクタが株価リターンに与える影響が残れば, 各リスクファクタが説明する株式特性とは異なるアノマリを説明するファクタであることが分かる.

先行研究では, 短期・長期ボラティリティがリターンに与える影響を SMB ファクタ, HML ファクタといったリスクファクタでコントロールしているが, 流動性ショックを表すリスクファクタを加えた検証は行われていない. そこで, 本研究では, SMB ファクタ, HML ファクタだけではなく, 流動性ショックを表す指標を新たなリスクファクタとして導入する.

・SMB_t

SMB ファクタは, 小型株リターンから大型株リターンを引いたものである. ここで, 小型株とは分析対象となる市場における上場企業を時価総額で降順に順位付けした場合にメディアン以下となる企業であり, 大型株とはメディアン以上となる企業のことである. SMB ファクタは株式市場のアノマリとして観測される小型株効果を説明しようとするファクタである.

・HML_t

割安株リターンから成長株リターンを引いたものである. ここで, 割安株とは, 分析対象となる市場における上場企業を純資産時価総額比率で降順に順位付けした場合に (ただし, 純資産が負の企業は除外する), 上位 30% に入る企業のことであり, 成長株とは下位 30% に該当する企業のことである. HML ファクタは株式市場のアノマリとして観測される割安株効果を説明しようとするファクタである.

・APRIM_t

まず, 株式の流動性に関する指標である Amihud (2002) [2] の非流動性指標 ILLIQ について説明する. Amihud (2002) の指標は, 単位売買代金あたりの個別株式の日次リターン ($|r_{i,t}|/volume_{i,t}$) と表され, この値が大きい銘柄は流動性が低い銘柄であると考えられる. また, 市場全体の流動性リスク APRIM は, ILLIQ の市場全体平均として式 (15) で定義される.

$$APRIM_t = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \frac{|r_{i,t}|}{volume_{i,t}} \times 10^8 \quad (15)$$

ここで, $|r_{i,t}|$ は銘柄 i の $t-1$ 日から t 日における日次リターンの絶対値, $volume_{i,t}$ は銘柄 i の t 日における売買代金, N_t は t 日における銘柄数を表す.

本研究では, 小型株効果を説明する SMB ファクタの比較対象として APRIM を用いるため, 大型株と小型株の 2 つに分けてそれぞれの APRIM を算出し, 小型株の APRIM から大型株の APRIM の差をとったもの ($APRIM_t^{sml} = APRIM_t^{small} - APRIM_t^{large}$) を用いる. ここで, $APRIM_t^{small}$ は小型株の t 日の APRIM, $APRIM_t^{large}$ は大型株の t 日の APRIM を表す. この指標は市場全体の流動性ではなく, 小型株と大型株間の流動性の違いを表現できるため, SMB ファクタと比較することが可能となっており, 先行研究では用いられていない新しいリスクファクタである. また, 本研究では $APRIM_t^{sml}$ をそのまま用いるのではなく, AR(1) モデルにあてはめたときのイノベーション ($APRIM_t'$) をリスクファクタとして用いる.

次に実証分析で用いる 3 つの資産評価モデルについて説明する.

モデル 1:

$$R_{t+1}^i = \alpha^i + \beta_M^i R_{t+1}^M + \beta_{sres}^i sres_{t+1} + \beta_{lres}^i lres_{t+1} + \varepsilon_{t+1}^i \quad (16)$$

モデル 2:

$$R_{t+1}^i = \alpha^i + \beta_M^i R_{t+1}^M + \beta_{sres}^i sres_{t+1} + \beta_{lres}^i lres_{t+1} + \beta_{SMB}^i SMB_{t+1} + \beta_{HML}^i HML_{t+1} + \varepsilon_{t+1}^i \quad (17)$$

モデル 3:

$$R_{t+1}^i = \alpha^i + \beta_M^i R_{t+1}^M + \beta_{sres}^i sres_{t+1} + \beta_{lres}^i lres_{t+1} + \beta_{APRIM'}^i APRIM'_{t+1} + \beta_{HML}^i HML_{t+1} + \varepsilon_{t+1}^i \quad (18)$$

モデル 1 は、マーケットファクタに短期・長期ボラティリティファクタを加えたモデルとなっており、モデル 2 は、短期・長期ボラティリティがリターンに与える影響をコントロールするリスクファクタとして SMB ファクタと HML ファクタを加えたモデルとなっている。モデル 3 は、コントロールするリスクファクタとして SMB ファクタの代わりに $APRIM'$ を加えたモデルである。

4. 実証分析

4.1 データ

実証分析において利用するデータは、2001 年 6 月から 2010 年 8 月までの日次の東証株価指数 (TOPIX)、無担保オーバーナイトコールレートと 2010 年 8 月末までに東証一部に上場していた個別銘柄の日次の株価および売買額を用いる。なお、市場ポートフォリオとして、TOPIX、無リスク金利には無担保オーバーナイトコールレートを用いる。

4.2 実証分析の目的と手法

短期・長期ボラティリティが株式特性の異なるポートフォリオに対してどのような影響を与えるのかについて検証するため、式 (16)~(18) の左辺のリターンとして株式時価総額と簿価時価比率でソーティングした 25 個のポートフォリオリターンを用いる。また、日次平均リターンをとる期間としてどの程度の期間 ($R_{n,t}^M$ の n) を想定して長期ボラティリティを推定すればファイナンス的に整合的な結果が得られるかについても検証する。さらに、短期・長期ボラティリティと前項で導入したリスクファクタとの比較検証を行う。

まず、短期・長期ボラティリティのポートフォリオリターンに対する感応度をモデル 1 を用いて推定する。本研究では、日次リターンの平均をとる期間を適宜設定して長期ボラティリティを推定することが可能であり、どの程度の期間を想定して長期ボラティリティを推定すればファイナンス的に整合的な結果が得られるかについて、ボラティリティのファクタ感応度をもとに検討する。

ここで、短期・長期ボラティリティの実際の市場において予想される役割として、短期ボラティリティは、短期的なショックを表しており、短期ボラティリティの上昇に

よって小型株よりも比較的安定している大型株や安全資産への選好が高まることが想定される。また長期ボラティリティは、長期的な平均リターンの変動をとらえたものであるため、ファンダメンタルズの変化として考えることができる。そのため、長期ボラティリティの上昇によって、割安に放置されている銘柄の株価は、さらに下方に乖離するよりも修正される方向に動くことが想定される。

検証結果が上記のようなファイナンス的に整合的な意味合いを得られるのは、日次リターンの平均をとる期間として 10 日、20 日、60 日のどの期間を用いて長期ボラティリティを推定した場合であるかについて検証を行う。

次に、本研究では、短期・長期ボラティリティが割安株や成長株、小型株や大型株のポートフォリオリターンに対して影響を持つ場合、SMB ファクタと HML ファクタを加えたモデル 2 においても短期・長期ボラティリティがリターンに与える影響が残るかどうかについて検証する。

ここで、結果を先回りして述べると、短期ボラティリティは SMB ファクタや HML ファクタを加えることでリターンに与える影響がなくなるため、本研究では小型株効果を説明する SMB ファクタの代わりとして小型株の特徴の 1 つである流動性に関する指標 $APRIM'$ を用いたモデル 3 から、 $APRIM'$ を加えたとしても、短期・長期ボラティリティがリターンに与える影響が残るかどうかについて検証する。

4.3 分析結果とその考察

4.3.1 GARCH モデルのパラメータ推定結果

先行研究のモデルと本研究のモデルのパラメータ推定結果を表 1、表 2 にそれぞれ示した。ここで、表 2 の結果は、日次リターンの平均をとる期間として 60 日間を用いて長期ボラティリティを推定した場合の結果を表している。

表 1 先行研究の GARCH モデルにおけるパラメータ推定結果
Table 1 Estimated parameters of the GARCH model in the preceding study.

Market Excess Returns				
	$R_{t+1}^M = \mu_t^M + \sqrt{v_t} \varepsilon_{t+1}$		$\mu_t^M = \theta_1 + \theta_2 s_t + \theta_3 l_t$	
	θ_1	θ_2	θ_3	
Coefficient	0.006 ***	-0.009 ***	0.001 ***	
Short-run Volatility				
	$s_{t+1} = \theta_4 s_t + \theta_5 \varepsilon_{t+1} + \theta_6 (\varepsilon_{t+1} - \sqrt{2/\pi})$			
	θ_4	θ_5	θ_6	
Coefficient	0.362 ***	-0.072 ***	0.005 ***	
Long-run Volatility				
	$l_{t+1} = \theta_7 + \theta_8 l_t + \theta_9 \varepsilon_{t+1} + \theta_{10} (\varepsilon_{t+1} - \sqrt{2/\pi})$			
	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}
Coefficient	-0.165 ***	0.963 ***	-0.039 ***	0.096 ***
p-value of $\theta_8 = 1$				0.000

*** 1%有意水準

表 2 本研究の GARCH モデルにおけるパラメータ推定結果

Table 2 Estimated parameters of our GARCH-type model in this study.

Market Excess Returns				
$R_{t+1}^M = \mu_t^M + \exp(s_t)\varepsilon_{t+1}^s + \exp(l_t)\varepsilon_{t+1}^l$	$\mu_t^M = \theta_1 + \theta_1' + \theta_2 s_t + \theta_3 l_t$			
	θ_1	θ_1'	θ_2	θ_3
Coefficient	-0.076 ***	-0.007 ***	-0.001 ***	-0.011 ***
Short-run Volatility				
	$s_{t+1} = \theta_4 s_t + \theta_5 \varepsilon_{t+1}^s + \theta_6 (\varepsilon_{t+1}^s - \sqrt{2/\pi})$			
	θ_4	θ_5	θ_6	
Coefficient	0.995 ***	-0.049 ***	0.081 ***	
p-value of $\theta_4 = 1$	0.017			
Long-run Volatility				
	$l_{t+1} = \theta_7 + \theta_8 l_t + \theta_9 \varepsilon_{t+1}^l + \theta_{10} (\varepsilon_{t+1}^l - \sqrt{2/\pi})$			
	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}
Coefficient	-0.417 ***	0.936 ***	-0.195 ***	0.138 ***
p-value of $\theta_8 = 1$	0.000			

*** 1%有意水準

表 1, 表 2 を見ると, 両モデルともに θ_5, θ_9 の値が負で有意となっていることが分かる. これらの係数は, ボラティリティショックの非対称性を表現するパラメータであり, 負の値をとっていることから分析期間において, ボラティリティが負の非対称性を持っていることが分かる. 次に, 表 1, 表 2 を見比べてみると, 大きく異なる部分はボラティリティプロセスの自己回帰係数の大小である. 表 1 を見ると, 先行研究で提案されているモデルでは推定の際に制約条件として $\theta_4 < \theta_8$ を加えて推定されているため, $\theta_4 < \theta_8$ となっているのに対し, 本研究で提案したモデルでは $\theta_4 > \theta_8$ となっていることが分かる. これは, 先行研究では早く平均回帰したボラティリティが短期のボラティリティであると仮定しているためであるが, 本研究では, 異なるリターンの時系列データから短期・長期ボラティリティを推定しており, 平均リターンを用いた場合, 短期的なショックの影響が平均化され小さくなるため, ショックの持続性も小さくなり長期ボラティリティの平均回帰スピードが速くなっていると考えられる.

4.3.2 モデル 1 に基づく分析結果

まず, 短期・長期ボラティリティがリターンに与える影響について割安株, 成長株の観点から考察しよう. 表 3, 表 4, 表 5 には, それぞれ日次リターンの平均をとる期間として 10 日, 20 日, 60 日を用いて長期ボラティリティを推定した場合の短期・長期ボラティリティファクタの感応度を 25 ポートフォリオのうち, 割安株と成長株に関して抜き出したものを表している. ここで, 割安株とは表中の Value に相当し, 成長株とは表中の Growth に相当する. また, ここでは, 短期・長期ボラティリティが割安株, 成長株のリターンに与える影響を検証するため, 表 3~表 5 には 25 ポートフォリオのうち株式時価総額が 1 番大きいものと 1 番小さいものを取り除いて掲載した.

表 3 sres と lres の感応度 (平均リターン 10 日)

Table 3 The sensitivities of sres and lres (10 days average).

Loadings on the Short-run Volatility Factor			
	Size2	Size3	Size4
Growth	0.23	0.79 ***	0.29
Value	0.54	0.42	0.73 ***

Loadings on the Long-run Volatility Factor			
	Size2	Size3	Size4
Growth	-1.17 ***	-0.42	-0.88 ***
Value	-1.87 ***	-0.95 **	0.14

*** 1%有意水準 ** 5%有意水準

表 4 sres と lres の感応度 (平均リターン 20 日)

Table 4 The sensitivities of sres and lres (20 days average).

Loadings on the Short-run Volatility Factor			
	Size2	Size3	Size4
Growth	-0.55	0.42	-0.12
Value	-0.32	-0.03	0.66 **

Loadings on the Long-run Volatility Factor			
	Size2	Size3	Size4
Growth	1.42 ***	1.73 ***	1.13 ***
Value	1.79 ***	1.34 **	1.03 ***

*** 1%有意水準 ** 5%有意水準

表 3 を見ると短期ボラティリティの係数は正の値をとり有意となるケースが少なく, 長期ボラティリティの係数は負で有意な値となることが多いのに対して, 表 5 を見ると短期ボラティリティの係数が負の値になり, 長期ボラティリティの係数が正の値であることが分かる. 短期・長期ボラティリティはリターンに何らかの影響を与えるものであると考えられるが, 日次リターンの平均をとる期間として 10 日のような短い期間を採用して長期ボラティリティ推定

表 5 sres と lres の感応度 (平均リターン 60 日)

Table 5 The sensitivities of sres and lres (60 days average).

Loadings on the Short-run Volatility Factor			
	Size2	Size3	Size4
Growth	-1.07 ***	-0.15	-0.48 **
Value	-1.08 ***	-0.50	0.31
Loadings on the Long-run Volatility Factor			
	Size2	Size3	Size4
Growth	0.33	0.43 **	0.27
Value	0.60 ***	0.46 **	0.48 ***

*** 1%有意水準 ** 5%有意水準

した場合、短期ボラティリティが果たす役割がほとんどなく、長期ボラティリティの役割が大きくなっている。

日次リターンの平均をとる期間として 60 日を採用して推定された長期ボラティリティは、割安株のリターンに対して有意に正の影響を与えていることが分かる。これは、割安株が市場参加者から注目されずに適正価格から乖離し割安な水準にあるため、長期ボラティリティが上昇し、長期的に見て株価の変動が大きくなる際に、株価が見直され割安さが再評価される影響の方が強く働くためであると考えられる。一方、短期ボラティリティは、成長株のリターンに対して有意に負の影響を与えていることが分かる。これは、短期的なショックによって、市場参加者は今まで成長性が評価され割高な水準にあるものに対する見方を改め、適正価格に近付くためだと考えられる。

次に大型株、小型株の観点から各ボラティリティの係数を比較する。表 6、表 7、表 8 には、それぞれ日次リターンの平均をとる期間として 10 日、20 日、60 日を採用して長期ボラティリティを推定した場合の短期・長期ボラティリティファクタの感応度を 25 ポートフォリオのうち、大型株と小型株に関して抜き出したものを表している。ここで、大型株とは表中の Large に相当し、小型株とは表中の Small に相当する。また、ここでは、短期・長期ボラティリティが大型株、小型株のリターンに与える影響を検証するため、表 6~表 8 には 25 ポートフォリオのうち簿価時価比率が 1 番大きいものと 1 番小さいものを取り除いて掲載した。

まず、短期ボラティリティが小型株、大型株のリターンに与える影響について考察しよう。表 8 を見ると、短期ボラティリティの係数が小型株のリターンに対して負の値であり、大型株のリターンに関しておおむね正の値であることが分かる。通常、小型株は、株式時価総額が小さく、少数の投資家が株価に与える影響が大きいとともに、大型株と比べると流動性が低い銘柄であると考えられる。そのため、リーマンショックといった短期的ショックが起きた場合に、小型株の性質から少数の投資家が小型株から安全資産等に資金移動を行うため、短期ボラティリティの係数が

表 6 sres と lres の感応度 (平均リターン 10 日)

Table 6 The sensitivities of sres and lres (10 days average).

Loadings on the Short-run Volatility Factor			
	B/M2	B/M3	B/M4
Small	0.34	0.65 ***	0.68 ***
Large	0.68 ***	0.84 ***	0.03
Loadings on the Long-run Volatility Factor			
	B/M2	B/M3	B/M4
Small	-1.02 ***	-0.89 ***	-1.93 ***
Large	-0.23	0.17	-0.28

*** 1%有意水準 ** 5%有意水準

表 7 sres と lres の感応度 (平均リターン 20 日)

Table 7 The sensitivities of sres and lres (20 days average).

Loadings on the Short-run Volatility Factor			
	B/M2	B/M3	B/M4
Small	-0.15	0.09	-0.06
Large	0.69 ***	0.90 ***	-0.06
Loadings on the Long-run Volatility Factor			
	B/M2	B/M3	B/M4
Small	1.29 ***	1.33 ***	1.27 ***
Large	0.74 **	0.54	0.49

*** 1%有意水準 ** 5%有意水準

表 8 sres と lres の感応度 (平均リターン 60 日)

Table 8 The sensitivities of sres and lres (60 days average).

Loadings on the Short-run Volatility Factor			
	B/M2	B/M3	B/M4
Small	-0.66 **	-0.56 **	-0.85 ***
Large	0.38	0.56 **	-0.18
Loadings on the Long-run Volatility Factor			
	B/M2	B/M3	B/M4
Small	0.28	0.54 ***	0.54 ***
Large	0.29	0.31	0.18

*** 1%有意水準 ** 5%有意水準

有意に負の値となったと考えられる。逆に、長期ボラティリティは小型株のリターンに対して有意に正の影響を与えていることが分かる。これは、ファンダメンタルズの変化が起こり、大型株、小型株ともにリターンは上昇するが、小型株は大型株に比べて少数の投資家が及ぼす影響が大きいため、長期ボラティリティが有意に小型株のリターンに正の影響を与えると考えられる。

このように日次リターンの平均をとる期間として 60 日を採用して長期ボラティリティを推定した際、実際の市場で起こりうる解釈を与えることができ、短期・長期ボラティリティがリターンに与える影響についてファイナンス的に整合的な意味合いを付与することができる。以後日次平均

表 10 各リスクファクタの感応度 (平均リターン 60 日)
 Table 10 The sensitivity of each risk factor (60 days average).

Loadings on the Short-run Volatility Factor				Loadings on the Long-run Volatility Factor			
	B/M2	B/M3	B/M4		B/M2	B/M3	B/M4
Small	-0.56 **	-0.46	-0.72 ***	Small	0.28	0.53 ***	0.54 ***
Large	0.44 **	0.60 ***	-0.16	Large	0.27	0.30	0.19
	Size2	Size3	Size4		Size2	Size3	Size4
Growth	-0.96 ***	-0.06	-0.40	Growth	0.31	0.41 **	0.26
Value	-0.92 ***	-0.44	0.32 ***	Value	0.61 ***	0.47 ***	0.49 ***

Loadings on the APRIM Innovation				Loadings on the HML Factor			
	B/M2	B/M3	B/M4		B/M2	B/M3	B/M4
Small	-1.03 ***	-1.02 ***	-1.34 ***	Small	0.10 ***	0.16 ***	0.31 ***
Large	-0.61 **	-0.43	-0.24	Large	-0.29 ***	0.00	0.27 ***
	Size2	Size3	Size4		Size2	Size3	Size4
Growth	-1.22 ***	-0.90 ***	-0.85 ***	Growth	-0.14 ***	-0.11 ***	-0.13 ***
Value	-1.59 ***	-0.59 **	-0.03	Value	0.49 ***	0.48 ***	0.42 ***

*** 1%有意水準 ** 5%有意水準

表 11 各モデルのクロスセクション回帰における自由度調整済み決定係数の時系列平均
 Table 11 Time series average of the adjusted R square in the cross-sectional regression.

	CAPM	CAPM+Short-run Volatility	CAPM+Long-run Volatility	モデル 1
<i>AdjustedR</i> ² (This study)	18.09%	19.62%	23.74%	25.39%
<i>AdjustedR</i> ² (The preceding study)	18.09%	18.48%	17.93%	19.41%

	FF3	FF3+Short-run Volatility	FF3+Long-run Volatility	モデル 2
<i>AdjustedR</i> ² (This study)	32.66%	33.19%	35.38%	37.13%
<i>AdjustedR</i> ² (The preceding study)	32.66%	33.39%	32.78%	33.67%

4.4 クロスセクションでの説明力分析

4.4.1 説明力分析の分析手法

本節では, Fama ら (1973) [6] のクロスセクション回帰分析を用いることで, 各モデルのクロスセクションデータに対する説明力分析を行う. これは, 分析期間内のデータから推定したベータリスクが個別株式のリターンのバラツキをどの程度説明しているかを分析するものである. まず Fama ら (1973) のクロスセクション回帰分析手法について簡単に説明する.

Step1: ここでは, マーケットファクタに短期・長期ボラティリティファクタを加えたボラティリティファクタモデルを例にとって説明する. まず, 式 (19) のように分析期間内の時系列データをモデルに回帰させて各リスクファクタに対する回帰係数を推定する.

$$R_{t+1}^i = \alpha^i + \beta_M^i R_{t+1}^M + \beta_{sres}^i sres_{t+1} + \beta_{lres}^i lres_{t+1} + \varepsilon_{t+1}^i \quad (t = 1, \dots, T, i = fix) \quad (19)$$

Step2: 分析期間において, 式 (20) のようにクロスセクションデータに対して回帰分析を行う. ここで, 説明変数のベータ値は Step1 で推定した値を用いる. この回帰を

$t = 1, \dots, T$ で行い, その自由度調整済み決定係数の時系列平均を求める.

$$R_{t+1}^i = \gamma_{t+1} + \gamma_{M,t+1} \beta_M^i + \gamma_{sres,t+1} \beta_{sres}^i + \gamma_{lres,t+1} \beta_{lres}^i + \eta_{t+1}^i \quad (t = fix, i = 1, \dots, N) \quad (20)$$

4.4.2 説明力分析の分析結果 (先行研究の短期・長期ボラティリティとの比較)

ここでは, 本提案モデルの短期・長期ボラティリティの有効性を検証するため, 本提案モデルの短期・長期ボラティリティと先行研究の短期・長期ボラティリティを用いた場合の各モデルのクロスセクション回帰分析における自由度調整済み決定係数の時系列平均を表 11 に示す. 表 11 の上側が本提案モデル, 下側が先行研究のモデルにおける決定係数を表している. 表 11 の下側を見ると, CAPM に短期ボラティリティを加えたモデルは 18.48% となっており多少決定係数が上昇しているが, CAPM に長期ボラティリティを加えたモデルは 17.93% となっており, 長期ボラティリティを加えることによる決定係数の上昇が見られない. 一方で, 表 11 の上側を見ると, CAPM に短期・長期ボラ

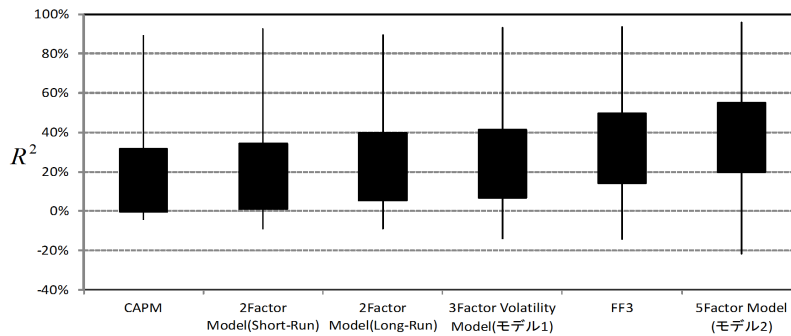


図 1 各モデルの自由度調整済み決定係数の箱髷図

Fig. 1 The boxplot of adjusted R square for each model in this study.

ティリティを加えたモデルは決定係数が上昇しており、先行研究の短期・長期ボラティリティよりも本提案モデルの短期・長期ボラティリティの方が有効性が高いことが分かる。また FF3 に短期・長期ボラティリティを加えたモデルについて見ると、FF3 に短期ボラティリティを加えたモデルは本提案モデルと先行研究のモデルにはほぼ差異はないが、FF3 に長期ボラティリティを加えたモデルでは本提案モデルの方が決定係数が高いことが分かる。またモデル 1 とモデル 2 の結果からも本研究で提案したモデルの有効性を確認することができる。

次に、本提案モデルから推定されるボラティリティを用いた場合の各モデルの自由度調整済み決定係数の上位 25%までと下位 25%までを誤差とする箱髷図を図 1 に示す。

図 1 を見ると、ファクタの数を増やすことで決定係数が上昇していることが見てとれる。このことから、マーケットファクタに加えたリスクファクタがクロスセクションデータを説明する際に、有効であることが分かる。

最後にどのリスクファクタがクロスセクションデータにおけるリターンのパラッキを説明する際に大きな影響を及ぼすのかについて検証する。表 11 の上側を見ると、モデル 1 の決定係数が 25.39%であり、CAPM に比べてかなり決定係数が上昇していることが分かる。また、CAPM に短期ボラティリティを加えたモデルでは、19.62%であり、CAPM に長期ボラティリティを加えたモデルでは、23.74%となっている。つまり、モデル 1 における決定係数の上昇は、短期ボラティリティよりも長期ボラティリティによるところが大きいことが分かる。次に、FF3 との比較を行う。FF3 における決定係数は、32.66%となっており、モデル 1 よりも高いことが分かる。さらにモデル 2 では、37.13%となっており、FF3 における決定係数よりも上昇している。このことから、ボラティリティファクタは SMB ファクタや HML ファクタほどではないが、株価リターンを説明する際に重要なリスクファクタであり、特に長期ボラティリティに関してその傾向が顕著であり、前節で示した結果と整合的な結果となった。

5. まとめと結語

本研究では、長期ボラティリティが長期的な平均リターンの変動をとらえるものであると考え、短期ボラティリティは、日次リターンの変動のうち長期的な平均リターンの変動以外の部分にあたと仮定し、短期・長期ボラティリティを推定した。また、短期・長期ボラティリティが株価リターンに与える影響を検証し、短期・長期ボラティリティにファイナンス的意味合いを与えると同時に、各ボラティリティファクタと SMB ファクタ、HML ファクタ、流動性指標である APRIM との比較検証を行った。

Adrian ら (2008) のモデルと本研究のモデルを比較したところ、短期・長期ボラティリティプロセスにおける自己回帰係数の違いが見られた。また、短期・長期ボラティリティが株価リターンに与える影響に関しては、短期ボラティリティが、小型株のリターンに対して負の影響を与える一方で、長期ボラティリティは、割安株のリターンに対して正の影響を与えており、各ボラティリティが株価リターンに与える影響が異なることが分かった。さらに、短期・長期ボラティリティがリターンに与える影響を他のリスクファクタでコントロールした結果、短期ボラティリティは、SMB ファクタに内包されている可能性があり、流動性指標とは異なることが分かった。長期ボラティリティは、他のリスクファクタを加えたとしても株価リターンに影響を与えることから、長期ボラティリティファクタのリスクファクタとしての重要性が示唆された。最後に、クロスセクション分析において、短期・長期ボラティリティがモデルの説明力向上に寄与すること、特にその傾向は長期ボラティリティにおいて顕著であることを確認した。今後の課題として、市場環境の変化（リーマンショック等）の前後で提案モデルのパラメータがどのように変わるのか等、市場環境の変化においてモデルの有効性にどの程度のロバスト性があるかを確認することがあげられる。

謝辞 初稿を改善するために有益なコメントをくださった 2 人の査読者には心から感謝いたします。また、本研究は科研費 (22510143) の助成を受けたものである。

参考文献

[1] Adrian, T. and Rosenberg, J.: Stock Returns and Volatility: Pricing the Short-Run and Long-Run Components of Market Risk, *Journal of Finance*, Vol.6, pp.2997-3027 (2008).

[2] Amihud, Y: Illiquidity and Stock Returns, *Journal of Financial Markets*, Vol.5, pp.31-35 (2002).

[3] Ang, A., Hodrick, R.J., Xing, Y. and Zhang, X.: The cross section of volatility and expected returns, *Journal of Finance*, Vol.51, pp.259-299 (2006).

[4] Engle, R.F.: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, Vol.50, pp.987-1006 (1982).

[5] Fama, E.F. and French, K.R.: Common Risk Factor in the Returns on Stock and Bonds, *Journal of Financial Economics*, Vol.33, pp.3-56 (1993).

[6] Fama, E.F. and MacBeth, J.D.: Risk, return, and equilibrium: Empirical tests, *Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.607-636 (1973).

[7] Lintner, J.: The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets, *Review of Economics and Statistics*, Vol.47, pp.13-37 (1965).

[8] Merton, R.C.: An intertemporal asset pricing model, *Econometrica*, Vol.41, pp.867-887 (1973).

[9] Nelson, D.: Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica*, Vol.59, pp.347-370 (1991).

[10] Ross, S.: The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, *Journal of Economic Theory*, Vol.13, pp.341-360 (1976).

[11] Sharpe, W.F.: Capital Asset Pricing: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk, *Journal of Finance*, Vol.19, pp.425-442 (1964).

付 録

A.1 先行研究のモデルにおける尤度関数

Adrian ら (2008) で提案されているモデルの推定法について説明する。まず、マーケット超過リターンの式である式 (1) を変形すると

$$\sqrt{v_t}\varepsilon_{t+1} = R_{t+1}^M - \mu_t^M \tag{A.1}$$

となり、 $\varepsilon_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1)$ であるため、式 (1)~(4) から尤度関数は以下のように表される。

$$\begin{aligned} f(\theta; s_t, l_t | R_t^M) &= \ln \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi v_{t-1}}} \exp \left(-\frac{(R_t^M - \mu_{t-1}^M)^2}{2v_{t-1}} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - (s_{t-1} + l_{t-1}) \\ &\quad - \frac{(R_t^M - \theta_1 - \theta_2 s_{t-1} - \theta_3 l_{t-1})^2}{2v_{t-1}} \end{aligned} \tag{A.2}$$

この尤度関数を最大化することでパラメータ推定を行うことが可能となる。

A.2 本研究のモデルにおける尤度関数

まず、長期ボラティリティの推定法から説明する。長期のマーケット超過リターンの式である式 (6) を変形すると

$$\exp(l_t)\varepsilon_{t+1}^l = R_{n,t+1}^{LM} - \mu_t^{LM} \tag{A.3}$$

となり、 $\varepsilon_t^l \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1)$ であるため、式 (6)~(8) から尤度関数は以下ようになる。

$$\begin{aligned} f(\theta; l_t | R_{n,t}^{LM}) &= \ln \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi \exp(2l_{t-1})}} \exp \left(-\frac{(R_{n,t}^{LM} - \mu_{t-1}^{LM})^2}{2 \exp(2l_{t-1})} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - l_{t-1} - \frac{(R_{n,t}^{LM} - \theta_1 - \theta_3 l_{t-1})^2}{2 \exp(2l_{t-1})} \end{aligned} \tag{A.4}$$

この尤度関数が最大となるようにパラメータ推定を行う。次に、短期ボラティリティの推定法を説明する。長期ボラティリティはすでに推定されているため、短期ボラティリティを推定する際に、長期ボラティリティの値を用いることができる。マーケット超過リターンの式である式 (9) を変形すると

$$\begin{aligned} \exp(s_t)\varepsilon_{t+1}^s &= R_{t+1}^M - \theta_1 - \theta'_1 - \theta_2 s_t \\ &\quad - \theta_3 l_t - \exp(l_t)\varepsilon_{t+1}^l \end{aligned} \tag{A.5}$$

となり、 $\varepsilon_t^s \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1)$ であるため、式 (9)~(12) から尤度関数は以下ようになる。

$$\begin{aligned} f(\theta; s_t | R_t^M, l_{t-1}) &= -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - s_{t-1} \\ &\quad - \frac{(R_t^M - \theta_1 - \theta'_1 - \theta_2 s_{t-1} - \theta_3 l_{t-1} - \exp(l_{t-1})\varepsilon_t^l)^2}{2 \exp(2s_{t-1})} \end{aligned} \tag{A.6}$$

この尤度関数が最大となるようにパラメータ推定を行う。



小林 寛司

昭和 62 年生。平成 22 年電気通信大学システム工学科卒業。同年電気通信大学大学院情報理工学研究科総合情報学専攻修士課程入学、現在に至る。



宮崎 浩一

昭和 42 年生．平成 12 年筑波大学大学院経営・政策科学研究科博士課程修了．博士（経営学）．電気通信大学システム工学科専任講師等を経て，平成 23 年度から電気通信大学大学院情報理工学研究科教授，現在に至る．日本

オペレーションズ・リサーチ学会，JAFEE，日本応用数理学会，応用統計学会等各会員．