BiCGStab(L) 法と IDR(s) 法との複合反復法の前処理の多様な役割

藤 野 清 次[†1]　　関 本 幹[†2]　　村 上 啓 一[†2]

本研究では，研究対象として IDR(s) 法と BiCGStab(L) 法との複合反復法である GBiCGStab(s, L) 法と IDR(s)Stab(L) 法を取り上げる．そして，その収束特性について，(i) 収束の速さ，(ii) 収束の安定性，(iii) 収束の頑強性，(iv) 得られた近似解の精度などについて議論を行う．特に，(iv) 近似解の精度の向上に関して，前処理が果たす役割と効果について再考し，前処理の多様な役割と働きについて考察する．

A rich variety of role of preconditioning for hybrid-typed IDR(s) and BiCGStab(L) methods

Seiji Fujino ,[†1] Takashi Sekimoto [†2]
and Keiichi Murakami [†2]

This paper treats with a rich variety of role of preconditioning for hybrid-typed IDR(s) and BiCGStab(L) methods. We consider on convergence rate, stability and robustness of convergence and precision of the approximate solutions. In particular, on improvement of precision of the approximate solutions, we discuss with roles and effect of preconditioning.

1. はじめに

本研究では，GBiCGStab(s, L) 法[16)17)18)] と IDR(s)Stab(L) 法[14)13)2)3)4)] の収束性について，比較方法の妥当性，テスト行列の選び方そしてその指標などについて議論を行う．

†1 九州大学情報基盤研究開発センター
Research Institute for Information Technology, Kyushu University
†2 九州大学大学院システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

通常，これらの反復法を比較評価するとき，それらの反復法に含まれる二つのパラメータ s, L を変化させ，収束解が得られるまでの計算時間が最も少ないどうしを比較することが多い．結果を一目見ればどちらが収束性がよいかはすぐに判明することが多い[5)6)9)10)12)]．また，行列によっては収束性が大きく変動することも多いので，調べる行列の個数を増やしたり，統計数字やランキングなどを行えば，比較結果に対する信頼性はさらに増すものと思われる．当然，調べる行列の個数もある程度の個数は必要になる．さらに，実験結果は単に結果を並べた 1 次資料だけでなく，大局的なあるいは高所からの判断を取入れて纏めた 2 次資料の作成なども効果的であると思われる．以上の現状を鑑みて，本研究では次の二つの観点から議論をすることにする．

(1) **第 1 の観点：** 収束解に対する要求精度，すなわち反復法の収束判定条件の大きさの決め方について考察する．工学上の問題では，相対残差で 10^{-7} 程度と比較的低いことがあるが，数値解析上の問題では，相対残差で $10^{-10}, 10^{-12}$ と厳しく設定することがあるためである．

(2) **第 2 の観点：** 得られた収束解の信頼度の指標の一つである，すなわち,「**真の相対残差** (True Relative Residual，以下 TRR と略す)」の大きさについて考察する．ここで，収束 (近似) 解を $\boldsymbol{x}_k$ とするとき，TRR とは $\log_{10}(||\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_k||_2/||\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_0||_2)$ を指す．反復法に対する要求精度と TRR との関係が問題となる．

2. 考　　察

ここでは，数値実験を通して考察を深めるものとする．まず，収束判定条件の違いについて考える．

2.1 収束判定条件の違い

次の 2 つの場合に分けて考える．

(1) 収束判定条件：10^{-7} または 10^{-8} 程度の場合．
この場合は比較的議論が容易である．収束解が得られるまでの計算時間の大小で収束解のよさが推測できる場合が多い．本研究では行列 Ipmsm_120(主な仕様は後述の表参照)[15)12)] のときがこの場合に当る．

(2) 収束判定条件：10^{-12} 程度の場合．
行列 Ipmsm_120 を除くそれ以外の場合を考える．この場合状況はだいぶ複雑になってくる．すなわち，最少時間を目指してパラメータ s または L の値をだんだん大きくすると，収束解の TRR が悪化する場合がある．いわゆる,「**偽収束**」[11)7)] と呼ばれ

る現象が現われ，この原因究明と克服が大きな課題になる．

2.2 数値実験

計算機環境と計算条件は以下の通りである．

計算機環境

(1) 計算はすべて倍精度浮動小数点演算で行った．
(2) 計算機は sandy bridge（CPU コア: Intel Xeon E31120，クロック周波数: 3.1GHz，メモリ: 8Gbytes，OS: Scientific Linux 6.0，ホスト名: sandy bridge）を使用した．
(3) コンパイラは sandy bridge では Intel Fortran Compiler version 12.04 を使用した．最適化オプションは “-fast” を使用した．
(4) 時間の計測には時間計測関数 getrusage を使用した．

計算条件

(1) 収束判定条件は相対残差の 2 ノルム：$||\boldsymbol{r}_{n+1}||_2/||\boldsymbol{r}_0||_2 \le 10^{-12}$ とした．ただし，表 4-5 の行列 Ipmsm_120 だけは設計上の理由により $||\boldsymbol{r}_{n+1}||_2/||\boldsymbol{r}_0||_2 \le 10^{-7}$ とした．
(2) 初期近似解 $\boldsymbol{x}_0$ はすべて 0 とした．
(3) 最大反復回数は 10000 回とした．

表 1 にテスト行列の主な特徴を示す．小規模行列 (sherman5，raefsky2，watt_2) とそれ以外の中規模に大きく分けられる．中規模行列のうち，行列 fem-bem は早稲田大学理工学部若尾研究室で電磁界分野で有限要素法と境界要素法との併用解析で現れた行列である．併用法のため 1 行当りの平均非零要素数が非常に多いことが特徴である．同様に，行列 w_dense は密行列である．行列 Ipmsm_120 は，同志社大学工学部 藤原・高橋研究室での高効率 IPM(Interior Permanent Magnet の略, 内部磁石埋込型) モータの解析の中の非定常計算で現れた行列である．上記以外の行列は Florida 大学の疎行列データベースから選出した[8]．

表 2 に ILU(0) 前処理つき反復解法の収束性を上段：行列 raefsky2, 中段：行列 dc3 に各々示す．同様に，表 3 に，行列 sme3Dc のときの ILU(0) 前処理つき反復解法の収束性を示す．表中の “∞” 記号は反復途中で強制終了したことを表す．右辺項ベクトル $\boldsymbol{b}$ は厳密解を $\hat{\boldsymbol{x}} = (1, 1, ..., 1)^T$ とし，$\boldsymbol{b} = A\hat{\boldsymbol{x}}$ で作成した.「TRR」の欄で括弧つきの数字は 10^{-10} よ

表 1 テスト行列の主な特徴．

matrix	dimension	NNZ	ave. NNZ	analytic field
sherman5	3,312	20,793	6.28	流体解析
raefsky2	3,242	293,551	90.55	流体解析
watt_2	1,856	11,550	6.22	流体解析
dc3	116,835	766,396	6.56	電気回路
sme3Dc	42,930	3,148,656	73.34	構造解析
fem-bem	19,060	24,377,548	1279.	電磁界
w_dense	7,601	57,775,201	7601.	電磁界
Ipmsm_120	3,628,380	113,904,598	31.39	電子機器

りも大きいことを表す．時間の単位はすべて秒とする．紙面の関係で GBiCGSTAB(s, L) 法は GBiCGSTAB 法と略記する．また，GPBiCG 法の変形版 (variant-1,2) などは文献[1] を参照のこと．表の結果から，GBiCGSTAB(s, L) 法のよさがわかる．

表 4 に行列 Ipmsm_120 に対する GBiCGSTAB (s, L) 法の性能評価結果を示す．前処理は対角項に掛ける加速係数 (= γ とする) つき ILU(0) 前処理である．パラメータ s と L の値は，s = 1, 2, 4, 8 そして L = 2, 3 と変化させ収束性を調べた．また，加速係数の値は γ = 1.0, 1.05, 1.10, 1.15, 1.20, 1.25, 1.30 と 7 通り変化させた．

表 5 に行列 Ipmsm_120 に対する反復法の性能評価一覧を示す．

本論文中に示した表の表記法について以下に示す．

- TRR の欄の数字が括弧つきのものは，相対残差の値が 1 つの目安である基準 10^{-10} をクリアできなかったものを示す．
- パラメータ「s と L」の欄が「-」記号のときは，収束解のうち TRR が最もよかったときのデータを記す．また,「$M\boldsymbol{v}$」の欄が「max」のときは，すべてのケースで最大反復回数までで収束せず，TRR が最もよかったときのデータを記す．
- 上段と下段の表示があるときは，上段は最少計算時間のときのデータ，下段は TRR が最もよかったときのデータを記す．
- 各行列での最少時間の数字を太字で表記した．ただし，行列 sme3Dc の場合，最少時間のときの TRR の値が非常に悪いので下線を付けた． 計算時間の単位は秒とする．また，“$M\boldsymbol{v}$” は行列ベクトル積の回数を表す．
- 以下の実験では，パラメータ s と L の値は，s = 1, 2, 4, 6, 8 そして L = 1, 2, 4, 6, 8 と合計 25 通り変化させ収束性を調べた．SSOR 前処理中に含まれる係数 ω の値は 1.0

表 2 ILU(0) 前処理つき反復解法の収束性.

(a) 行列 raefsky2

method	s	L	Mv	pre. time	itr. time	total time	TRR
BiCGSTAB	-	-	37	0.039	0.057	0.096	-12.20
BiCGSTAB2	-	-	37	0.041	0.057	0.098	-12.43
GPBiCG	-	-	37	0.043	0.058	0.101	-12.76
GPBiCG_v1	-	-	37	0.042	0.058	0.100	-12.76
GPBiCG2_v1	-	-	37	0.041	0.057	0.098	-12.43
GPBiCG_v2	-	-	37	0.042	0.060	0.102	-12.76
GPBiCG2_v2	-	-	37	0.041	0.059	0.100	-12.43
GPBiCG_AR	-	-	37	0.044	0.058	0.102	-12.30
GPBiCG_AR2	-	-	37	0.042	0.058	0.100	-12.52
BiCGSafe	-	-	37	0.043	0.060	0.103	-12.30
BiCGSafe2	-	-	37	0.044	0.059	0.103	-12.27
IDR(s)	8	-	54	0.041	0.050	0.091	-13.31
BiIDR(s)	4	-	57	0.041	0.045	0.086	-13.78
IDR(s)STAB(L)	2	2	66	0.041	0.054	0.095	-13.76
GBiCGSTAB	2	1	66	0.043	0.053	0.096	-12.47

(b) 行列 dc3

method	s	L	Mv	pre. time	itr. time	total time	TRR
BiCGSTAB	-	-	474	0.052	3.753	3.805	-10.18
BiCGSTAB2	-	-	440	0.049	4.046	4.095	(-8.38)
GPBiCG	-	-	475	0.051	4.385	4.436	(-9.59)
GPBiCG_v1	-	-	497	0.050	4.799	4.849	(-9.24)
GPBiCG2_v1	-	-	521	0.051	4.796	4.847	(-8.03)
GPBiCG_v2	-	-	472	0.049	4.546	4.595	(-9.15)
GPBiCG2_v2	-	-	501	0.052	4.645	4.697	(-7.70)
GPBiCG_AR	-	-	446	0.050	3.865	3.915	(-8.99)
GPBiCG_AR2	-	-	404	0.053	3.613	3.666	(-8.32)
BiCGSafe	-	-	439	0.052	3.797	3.849	(-9.15)
BiCGSafe2	-	-	446	0.050	3.846	3.896	(-9.15)
IDR(s)	2	-	max	0.053	58.151	58.204	-6.34
BiIDR(s)	1	-	897	0.050	3.751	3.801	-10.49
IDR(s)STAB(L)	2	1	453	0.050	2.695	2.745	(-7.89)
GBiCGSTAB	2	1	582	0.051	2.390	2.441	(-9.63)

表 3 ILU(0) 前処理つき反復解法の収束性. (行列 sme3Dc)

method	s	L	Mv	pre. time	itr. time	total time	TRR
BiCGSTAB	-	-	∞	-	-	-	-
BiCGSTAB2	-	-	4372	0.957	118.87	119.83	(-7.65)
GPBiCG	-	-	2887	0.961	78.667	79.628	-11.02
GPBiCG_v1	-	-	1898	0.956	52.257	53.213	(-8.87)
GPBiCG2_v1	-	-	4772	0.954	130.42	131.37	(-7.47)
GPBiCG_v2	-	-	2864	0.959	78.794	79.753	(-9.70)
GPBiCG2_v2	-	-	4346	0.960	118.81	119.77	(-6.80)
GPBiCG_AR	-	-	1821	0.955	49.023	49.977	-12.23
GPBiCG_AR2	-	-	1943	0.962	52.801	53.763	-12.64
BiCGSafe	-	-	1758	0.957	47.897	48.854	-12.05
BiCGSafe2	-	-	1818	0.958	49.618	50.576	-11.38
IDR(s)	1	-	4020	0.954	68.294	69.247	-11.42
BiIDR(s)	2	-	1816	0.954	24.880	25.834	-12.07
IDR(s)STAB(L)	1	2	2260	0.954	31.107	32.061	-12.06
GBiCGSTAB	8	1	936	0.954	12.967	13.921	-12.02

表 4 行列 Ipmsm_120 に対する GBiCGSTAB(s, L) 法の性能評価. (加速 ILU(0) 前処理の γ の値は 1.20 に固定)

L	s	itr.	pre. time [s]	itr. time [s]	total time [s]	ave. time [ms]	TRR
2	1	1644	27.99	646.89	674.88	393.49	-7.09
	2	1218	28.03	489.54	517.57	401.92	-7.02
	4	1060	27.99	448.00	**475.99**	422.64	-7.15
	8	990	28.01	458.62	486.63	463.25	-7.08
3	1	1716	28.05	682.77	710.82	397.88	-7.08
	2	1224	28.09	499.23	527.32	407.87	-7.09
	4	1065	28.06	459.40	487.46	431.36	-7.26
	8	999	27.96	482.93	510.89	483.41	-7.26

表 5　行列 Ipmsm_120 に対する加速 ILU(0) 前処理つき反復法の性能評価.
(最下段は E-SSOR(ω) 前処理の結果)

method	γ	s	L	itr	pre. time [s]	itr. time [s]	total time [s]	TRR	ratio
GPBiCG	1.15	-	-	859	28.03	719.64	747.67	-7.13	1.00
BiCGSTAB	1.10	-	-	1010	28.00	804.74	832.74	-7.04	1.11
BiCGSTAB2	1.20	-	-	818	28.04	680.47	708.51	-7.19	0.95
GPBiCG_AR	1.10	-	-	683	28.04	571.37	599.40	-7.20	0.80
BiCGSafe	1.15	-	-	654	28.03	543.53	571.56	-7.27	0.76
BiCGSafe2	1.10	-	-	744	28.04	616.22	644.26	-7.07	0.86
IDR(s)	1.30	4	-	1042	28.06	541.57	569.64	-7.05	0.76
BiIDR(s)	1.30	4	-	1041	28.02	473.27	501.30	-7.05	0.67
GBiCGStab	1.20	4	2	1060	27.99	448.00	**475.99**	-7.08	**0.64**
GBiCGStab	(0.8)	4	2	1060	0.28	266.45	**266.74**	-7.05	**0.36**

に固定した.

小規模行列に対する表 6 から以下のことがわかる.

(1)　最少計算時間については，GBiCGStab(s, L) 法が IDR(s)Stab(L) 法よりも断然優っている.

(2)　対角スケーリングだけでも非常に効果のある行列 (sherman5) とほとんど効果のない行列 (raefsky2) とに大きく分かれる.

(3)　収束解に対する要求精度 10^{-12} はどの行列もいずれかの前処理で達成できている.

(4)　行列 fem-bem に対して，ILU(0) 前処理は前処理行列作成に時間 (およそ 110 秒前後) がかかりすぎる．そのため，このような行列に対しては，Eisenstat+SSOR 前処理が有効である.

中規模，特記事項のある行列に対する結果を載せた表 7 から以下のことがわかる.

(1)　小規模行列と同様に，最少計算時間については，GBiCGStab(s, L) 法が IDR(s)Stab(L) 法よりも断然優っている.

(2)　対角スケーリングなしの場合，ほとんど議論ができない程収束性がよくない.

(3)　対角スケーリングのみをした場合，収束解の精度に関して，TRR の値が 10^{-8} 程度まで得られる程に改善された.

(4)　行列 sme3Dc の最少時間 (下線を施した数字) のときの収束解の TRR が非常に悪い．要検討である.

(5)　有限要素法と境界要素法を併用した解析法で生じた (特記事項を持つ) 行列 fem-bem

表 6　小規模行列．(行列 sherman5, raefsky2, watt_2 のとき)

(a) 対角スケーリングなど前処理一切なし.

	IDR(s)Stab(L)					GBiCGStab(s, L)				
matrix	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR
sherman5	1	2	4265	0.217	(-9.40)	1	2	4236	0.153	-10.61
raefsky2	6	1	454	0.121	-11.46	6	2	434	0.097	-11.99
watt_2	1	2	593	0.018	-11.19	2	4	312	0.008	-12.71

(b) 対角スケーリングのみあり.

	IDR(s)Stab(L)					GBiCGStab(s, L)				
matrix	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR
sherman5	1	2	493	0.025	-10.86	2	2	390	0.015	-11.11
raefsky2	4	1	484	0.120	-11.22	6	1	441	0.097	-12.10
watt_2	1	1	253	0.007	-12.05	2	1	234	0.005	-12.11

(c) 対角スケーリングあり ＋ ILU(0) 前処理.

	IDR(s)Stab(L)					GBiCGStab(s, L)				
matrix	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR
sherman5	1	4	56	0.013	-13.14	2	1	48	**0.004**	-12.79
raefsky2	1	1	84	**0.005**	-12.87	2	2	78	**0.003**	-12.75
watt_2	4	2	60	0.096	-12.55	8	1	54	0.086	-13.06

(d) 対角スケーリングあり ＋ (Eisenstat ＋ SSOR 前処理).

	IDR(s)Stab(L)					GBiCGStab(s, L)				
matrix	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR
sherman5	1	2	77	**0.006**	-11.03	2	1	69	0.005	-11.87
raefsky2	2	2	116	0.036	-11.37	6	2	98	0.029	-12.36
watt_2	2	1	107	**0.005**	-13.53	4	2	90	**0.003**	-12.02

は Eisenstat+SSOR 前処理の収束性が非常によい．

表 7 中規模，特記事項のある行列に対する対角スケーリングなしおよび対角スケーリング あり + 前処理の場合.

(a) 対角スケーリングなど前処理一切なし.

	IDR(s)Stab(L)					GBiCGStab(s, L)				
matrix	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR
dc3	-	-	-	-	(-3.23)	-	-	-	-	(-6.65)
sme3Dc	-	-	-	-	(-3.04)	-	-	-	-	(-8.79)
fem-bem	-	-	max	-	(-8.53)	-	-	max	-	(-9.95)

(b) 対角スケーリングのみあり.

	IDR(s)Stab(L)					GBiCGStab(s, L)				
matrix	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR
dc3	2	1	1311	5.205	(-8.78)	1	6	3012	7.361	(-9.60)
sme3Dc	8	1	3663	33.313	(-3.30)	8	1	4239	31.858	(-9.15)
fem-bem	8	8	1872	60.082	(-6.37)	8	6	1944	59.620	-10.34
	1	1	8098	245.98	-12.02	1	1	7502	226.04	-12.01

(c) 対角スケーリングあり + ILU(0) 前処理.

	IDR(s)Stab(L)					GBiCGStab(s, L)				
matrix	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR
dc3	2	1	453	2.746	(-7.89)	2	1	540	2.271	(-9.54)
	1	2	866	4.643	(-7.97)	1	2	908	3.690	(-9.89)
sme3Dc	8	1	927	15.282	(-7.86)	8	1	927	13.726	-11.20
	1	2	2260	32.111	-12.06	6	2	994	14.626	-12.42
fem-bem	6	4	56	113.49	-12.62	8	6	54	113.07	-12.22
	8	2	72	114.75	-13.75	8	2	72	114.10	-14.35

(d) 対角スケーリングあり + (Eisenstat + SSOR 前処理).

	IDR(s)Stab(L)					GBiCGStab(s, L)				
matrix	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR
dc3	2	1	611	**2.500**	-10.02	4	2	400	**1.260**	-10.23
	1	2	1113	3.824	-10.53	1	2	964	2.397	-11.45
sme3Dc	8	1	1247	10.525	(-2.04)	8	1	1260	**8.759**	(-9.09)
	1	1	3055	23.729	(-9.11)	2	4	2184	14.346	(-9.78)
fem-bem	2	6	128	**3.967**	-10.41	4	6	120	**3.730**	-10.47
	2	2	128	4.202	-12.32	2	6	126	3.909	-12.33

次に，中規模，特記事項のある行列に対する対角スケーリングなしおよび対角スケーリングなし + 前処理の場合を表 8 に示す．

表 8 中規模，特記事項のある行列に対する対角スケーリング なし + 前処理の場合.

(a) 対角スケーリングなし + ILU(0) 前処理.

	IDR(s)Stab(L)					GBiCGStab(s, L)				
matrix	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR
dc3	4	1	360	2.756	(-5.66)	4	1	365	1.889	-10.17
	2	1	534	3.253	(-8.44)	2	1	537	2.272	-10.84
sme3Dc	6	1	918	15.141	(-8.17)	8	1	936	13.816	-11.82
	1	1	2174	30.798	-12.28	2	1	1671	23.320	-12.79
fem-bem	4	4	60	113.54	-13.13	8	1	54	113.04	-12.04
	8	8	72	115.20	-13.15	8	4	72	114.60	-14.37

(b) 対角スケーリングなし + (Eisenstat + SSOR 前処理).

	IDR(s)Stab(L)					GBiCGStab(s, L)				
matrix	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR
dc3	6	1	314	2.048	-11.06	2	2	510	1.372	-11.88
	6	1	314	2.048	-11.06	1	1	1100	2.790	-11.88
sme3Dc	6	1	1268	10.430	(-3.48)	8	1	1278	8.880	(-9.76)
	1	1	4013	31.123	(-7.96)	8	1	1278	8.880	(-9.76)
fem-bem	4	4	144	4.420	(-7.76)	4	4	140	4.314	(-9.74)
	1	1	147	5.665	-12.70	1	4	152	4.809	-13.42

表 8 から以下のことがわかる．

(1) 行列 dc3 に対して，対角スケーリングなし + (Eisenstat + SSOR 前処理) を施すと，収束解の TRR の値が要求精度 10^{-12} にほぼ近づいた (IDR(s)Stab(L) 法で $10^{-11.06}$, GBiCGSatb(s,L) 法で $10^{-11.88}$ を達成) ことがわかる．

(2) 最少時間については，全般的に，対角スケーリングをした後で前処理を施した方が短いことが多い．

表 9 に密行列 w_dense に対する対角スケーリングなしおよび対角スケーリング あり + 前処理の場合の結果を示す．なお，密行列では ILU(0) 分解は完全 LU 分解に相当することになる．この表から，どの前処理でも要求精度 10^{-12} が満されていること，そして Eisenstat + SSOR 前処理が有効であることがわかる．

3. ま と め

IDR(s)Stab(L) 法と GBiCGStab(s, L) 法との性能比較に関して実験的考察を行った．その結果，

- 収束までの**計算時間に関しては，GBiCGStab(s, L) 法の方が IDR(s)Stab(L) 法**

表 9 密行列 w_dense に対する対角スケーリングなしおよび対角スケーリング あり ＋ 前処理の場合.

	IDR(s)Stab(L)					GBiCGStab(s, L)				
	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR	s	L	$M\boldsymbol{v}$	time	TRR
対角なし	2	4	516	37.033	(-7.77)	2	4	468	33.201	-10.18
	2	2	540	38.525	-12.81	1	1	936	66.650	-12.18
対角のみ	8	1	81	6.520	-12.14	8	1	81	5.940	-10.43
	4	2	90	6.874	-12.43	4	1	85	6.230	-13.08
対+ILU(0)	1	1	2	364.87	-15.06	1	1	1	365.34	-14.66
対+E-SSOR	2	4	62	**4.636**	-11.97	2	4	60	**4.565**	-12.35
	1	1	65	5.728	-12.70	1	1	64	5.693	-12.81

よりもかなり優っている,

- 近似解の真の相対残差に関しては，逆に IDR(s)Stab(L) 法の方が GBiCGStab(s, L) 法よりも若干よいが，その差はごく僅かである，
- また，近似解の真の相対残差に関して，前処理の適用により，**計算時間の大幅な短縮効果**が得られると同時に，**十分な精度の近似解**が得られることがわかった．この知見は，前処理の多様な役割の一面を物語る，

などの知見が得られた．

参 考 文 献

1) K. Abe, G. Sleijpen, Solving linear equations with a stabilized GPBiCG method, Applied Numerical Mathematics, 2012. (to appear)
2) 相原研輔，阿部邦美，石渡恵美子，AXPY 計算を削減した IDRStab 法の実装とその収束性，日本応用数理学会 2011 年度年会，講演予稿集，pp.83-84, 同志社大学，September, 2011.
3) K. Aihara, K. Abe, E. Ishiwata, Convergence of the IDRStab method using the residual smoothing techniques, Abstract of SC2011, p.158, Cagliari, Italy, October 10-14, 2011.
4) 相原研輔，阿部邦美，石渡恵美子，IDRstab 法へのスムージングの適用とその収束性，京都大学数理解析研究所研究集会「科学技術計算における理論と応用の新展開」，予稿集，pp.4-6，October 25-27，2011.
5) Johann Dudouit, Y. Onoue and S. Fujino, Perfformance evaluation of GBiCGStab(s,L) method，第 2 回理研セミナー 大規模計算ワークショップ講演集，理化学研究所，August 18-19， 2009.
6) 藤野清次，関本幹，村上啓一，IDR(s) 法と BiCGStab(L) 法との複合反復法の比較に関する実験的考察，第 15 回環瀬戸内応用数理研究部会 講演集，pp.22-26，山口東京理科大学，2011.12.
7) 深堀康紀，杉原正顯，GBiCGSatb(s, L) 法の偽収束性について，日本応用数理学会 2011 年度年会，講演予稿集，pp.85-86, 同志社大学，September, 2011.
8) Florida Sparse Matrix Collection: http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/
9) 平田裕貴，前処理による GBi-CGSTAB (s, L) 法の偽収束の改善，九州大学工学部電気情報工学科卒業論文，2 月，2012.
10) K. Morita, Y. Onoue, S. Fujino, Parallel evaluation of a family of IDR(s) methods based on polynomial of high order degree of L, 2nd Int. Kyoto-Forum on Krylov Subspace method, pp.97-105, Kyoto Univ., 2010.3.26.
11) 櫻井隆雄，直野健，恵木正史，猪貝光祥，反復解法 IDR(s) 法における偽収束問題と自動チューニング，応用数理，Vol.20，No.3，（2010)，pp.287-296.
12) T. Sekimoto, S. Fujino, Comparison of performance of several iterative methods for matrices appear in the field of electromagnetics, Int. Workshop on application of iterative methods to engineering and its mathematical element, Doshisha Univ., pp.174-181, Oct. 23-24, 2011.
13) G. Sleijpen, M. van Gijzen, Exploiting BiCGStab(ℓ) strategies to induce dimension reduction, SIAM, J. Sci. Comput., **32**(2010), pp.2687-2709.
14) P. Sonneveld, M. van Gijzen, IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems, SIAM, J. Sci. Comput., **31**(2008), pp.1035-1062.
15) 高橋康人 他, 並列化時間周期有限要素法を用いた回転機の磁界解析，第 14 回環瀬戸内応用数理研究部会 講演集，pp.207-212，岡山理科大学，2011.1.
16) M. Tanio, M. Sugihara, GBiCGSTAB(s, L): IDR(s) with higher-order stabilization polynomials, J. Comput. Appl. Math., **235**(2010), pp.765-784.
17) 塚田健，一般化 IDR 定理に基づく反復解法に関する研究，東京大学大学院情報理工学研究科 修士論文，2010 年 1 月.
18) 塚田健，深堀康元，谷尾真明，杉原正顯，自動残差修正機能付き GBiCGSatb(s, L) 法，京都大学数理解析研究所 講究録 1733(2011)，pp.149-159.