

常微分方程式の数値解を求めるための一多段階法*

井 口 健**

Abstract

Recently, the hybrid methods which combine, at some extent, the merits of one-step methods and multistep methods were proposed by Gragg and Stetter, Butcher, and Kohfeld and Thompson. However, the methods which were proposed by the first two authors have no ability of estimating the local truncation error, and the method which was proposed by the last author have only the ability of estimating approximately the local truncation error. We here propose a new type of hybrid method with an error-estimating ability exactly. This method is of the fifth order accuracy with an error-estimating ability of the sixth order, which is compared with the fourth order Adams-Moulton method or Hamming method and the sixth order Butcher method.

1. 序 論

常微分方程式の数値解法には大別して、二種類のものがある。その一つは、Runge-Kutta 法によって代表される一段階法であり、その二は、Milne 法によって代表される多段階法である。前者は、出発値が1点でのみ与えればよく、刻み幅の変更が容易で、通常、安定である等の長所を持つが、その反面、局所打切誤差を評価する能力を持たないこと、一刻み前進するために要する導関数の計算回数が多いこと等の欠点がある。もっとも、余分に導関数を幾つか計算して、局所打切誤差を評価することも出来る。その場合、計算量が余りにも増すので、近似的に誤差を評価するようにした公式が Merson らにより提案されている¹⁾。しかし、元数の大きな連立微分方程式に対しては不向きであろう²⁾。後者は、出発値として、2個以上の点の値を必要とし、そのために、刻み幅の変更が容易でなく、安定域に限られる等の欠点があるが、精度がよく、導関数の計算回数が少なく、局所打切誤差を評価する能力を持つ等の長所があり、元数の大きな連立微分方程式などに対して適すと言えよう。

近年、Gragg and Stetter¹⁾、Butcher²⁾ らは、これら両方の長所を、ある程度まで兼ね備えた方法を提案した。これらの方法は、いわば出発値が2個以上にし

た Runge-Kutta 法とも言うべきもので、精度は高いが、誤差を評価する能力は全く持たない。その後、Kohfeld and Thompson³⁾ は近似的に誤差を評価する式を与えた。

筆者は、両方の長所が出来るだけ取り入れた、打切誤差を評価する能力を持った方法を提案する。そして、ここで評価した誤差は、精度の調節をするための刻み幅変更の目安として利用するものである。これから述べる方法は、5次の精度を有し、6次の打切誤差を評価する能力を持った方法である。以下、この方法が現在の方法と呼ぶことにする。多段階法の欠点の一つは、出発値あるいは前段階までの計算の結果として、過去の点の値を幾つか使うことである。この点が多くなると、必然的に、これらの点の広がりも大きくなる。点の広がりが大きくなると解曲線が独立変数の変動に対して、大きく変動する微分方程式の数値解を求めるような場合に、打切誤差が大きくなって精度が悪くなる。従って、このようなとき、局所打切誤差を評価しても、その精度は悪くなり、信頼出来なくなる。4点が使う4次の Adams-Moulton 法や Hamming 法は、一般によく利用されているが、5次以上の Adams-Moulton 法があまり利用されない理由の一つは、上記の理由によるのである。Hamming 法についても、類似の考え方で、5次以上の方法を作る試みがなされたが、上記の理由で、成功しなかったようである⁴⁾。現在の方法は、出発値として、4次の Adams-Moulton 法あるいは、Hamming 法と同じく4点を

* A Multistep Method for Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, by Ken Iguchi (Faculty of Engineering, Nagoya University)

** 名古屋大学工学部工業数学教室

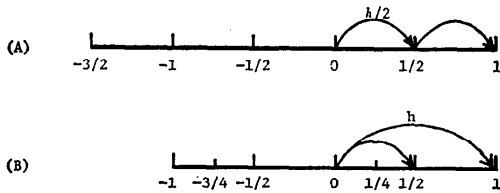


Fig. 1 Configuration of the points

必要とするが、点の広がり、これらの方法より幾分か小さくなっている。通常、常微分方程式の数値解を求めるために要する時間の大部分は、その微分方程式の導関数の計算につやされる。一刻み前進するために要する導関数の計算回数は4次のRunge-Kutta法では4回であり、4次のAdams-Moulton法やHamming法では2回である。現在の方法は、Runge-Kutta法と同じく4回であるが、一段階で2点での値が計算するので1点あたりの計算回数は4次のAdams-Moulton法あるいはHamming法と同じく2回である。

現在の方法与4次のAdams-Moulton法あるいはHamming法とについて、次の点の数値解を求めるために使う点の数と位置を図示するとFig. 1のようになる。ここで、現在の点を0として、過去の点を負の数、新たに値を計算する点を正の数で示した。

Fig. 1の(A)は4次のAdams-Moulton法あるいはHamming法に対するものであり、(B)は現在の方法に対するものである。両者の相違を明らかにするために、1の点の値を計算するときに使う点の数と広がりを調べる。前者では、 $-3/2, -1, -1/2, 0$ の四点の値を使って、予測子と修正子の二式によって、 $1/2$ の点の値を計算し、つぎに、 $-1, -1/2, 0, 1/2$ の四点の値を使って、前回と同じ手順で、1の点の値を計算する。このとき、導関数の計算回数は合計四回であり、点の広がり、 $-3/2$ の点から1の点までの2.5である。後者では、 $-1, -3/4, -1/2, 0$ の四点の値を使って、 $1/4$ の点の値を予測子のみで計算し、つぎに、 $-1, -3/4, -1/2, 0$ の五つの値を使って、 $1/2$ の点の値を予測子のみで計算する。そのあとで、 $-1, -1/2, 0, 1/4, 1/2$ の五つの値を使って、予測子と修正子の二式によって、1の点の値を計算する。従って、1の点の値を計算する途中で、 $1/2$ の点の値を計算することになる。この点の値の精度は、1の点の値と同じく5次である。このとき点の広がり、 -1 の点から1の点までの2.0である。従って、現在の方

法では、 $1/2$ の点と1の点の値を計算する式が異なる。そして、1の点の値のみを誤差評価して、 $1/2$ の点の値の誤差評価はしていない。

5章で、いくつかの実験例を使って、現在の方法与修正されたHamming法⁵⁾、および、四段階6次のButcher法³⁾との精度の比較を試みた。

本論文の方法与同じ考え方でより高次の方法を作ることが出来るが、ここでは考えない。

2. 方法

r 個の一段常微分方程式の系についての初期値問題

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_r) \quad i=1, 2, \dots, r \quad (1)$$

$$y_i(a) = \tau_i \quad (2)$$

を考えよう。

f_i は連続的に、十分高次まで微分可能で、解は区間 $a \leq x \leq b$ の上で、一義的に定まると仮定する。

簡単のために、ベクトル記号を使って、 $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$, $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ と表わすと、(1), (2)式は、それぞれ

$$y' = f(x, y) \quad (3)$$

$$y(a) = \tau \quad (4)$$

と書ける。

h をきざみ幅として、等間隔の点 $x_i = a + ih$ ($i=1, 2, \dots$) で真の解 $y(x_i)$ の近似値を計算するのが、われわれの目的である。さらに、等間隔でない点の値がも使うので、 s を任意の実数として、 $x_s = a + sh$ と定義し、 $y(x_s)$ の近似値を y_s , $f(x_s, y_s)$ を f_s で表わす。

(3), (4)式の解 $y(x)$ は

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \quad (5)$$

を満たす。ここに、 n は整数である。

(5)式の右辺の定積分の部分を $h \cdot \sum_{i=1}^N w_i y'(x_m + p_i h)$ で近似すると、(5)式は

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \sum_{i=1}^N w_i y'(x_n + p_i h) + R_k h^{k+1} y^{(k+1)}(x_n) + O_k(h^{k+2}) \quad (6)$$

と書ける。ここに、 P_i を w_i は、(6)式の両辺が x_n の周りに h のべきで展開したとき、両辺が出来るだけ多く一致するように、決められた定数である。普通、 w_i と p_i ($i=1, 2, \dots, N$) のうち m 個のものを、予め指定したと仮定すると、残りの個数は、 $k=2N-m$ であり、この値が主誤差項の次数を示し、 R_k

はその係数である。ここでは、すべての p_i ($i=1, 2, \dots, N$) が予め定められている場合のみを考える。従って、 $k=N$ である。

さて、(6) 式の両辺を x_n の周りに h のべきで展開して、両辺の対応する項を等号で結ぶと、つぎの方程式を得る。

$$\sum_{i=1}^N w_i = \frac{s^j - 1}{j} \quad j=1, 2, \dots, k \quad (7)$$

$$R_k = \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^N p_i^k w_i - \frac{s^{k+1} - 1}{k+1} \right) \quad (8)$$

(7) 式で p_i は、すべて既知であったから、 s を与えれば、 w_i は線形連立一次方程式が解いて容易に求まる。また、その値を (8) 式に代入して R_k の値も計算出来る。

これだけの準備をしておいて、現在の方法を述べる。

出発値として、あるいは前段階までの計算の結果として、 $y_{n-1}, y_{n-1+p}, y_{n-1+q}, y_n$ が既知であると仮定して、 y_{n+1} を計算する方法を考える。ただし、 $0 < p < q < 1$ である。

まず、 y_{n+p}, y_{n+q} をこの順に、式

$$y_{n+p} = y_n + h(A_1 f_{n-1} + A_2 f_{n-1+p} + A_3 f_{n-1+q} + A_4 f_n) + O(h^5) \quad (9)$$

$$y_{n+q} = y_n + h(B_1 f_{n-1} + B_2 f_{n-1+p} + B_3 f_{n-1+q} + B_4 f_n + B_5 f_{n+p}) + O(h^5) \quad (10)$$

を使って計算する。

つぎに、 y_{n+1} の予測値 y_{n+1}^* を、式

$$y_{n+1}^* = y_n + h(C_1 f_{n-1} + C_2 f_{n-1+q} + C_3 f_n + C_4 f_{n+p} + C_5 f_{n+q}) + O(h^6) \quad (11)$$

を使って計算し、式

$$y_{n+1} = y_n + h(D_1 f_{n-1} + D_2 f_{n-1+q} + D_3 f_n + D_4 f_{n+q} + D_5 f_{n+1}) + O(h^6) \quad (12)$$

を使って修正値を計算する。

(12) 式の 6 次打切誤差を評価する式は 4 章で与える。ここに、係数 A_i, B_i, C_i, D_i は、すべて (7) 式を使って p, q で表わせる。

(9) 式から (12) 式までの係数 A_i, B_i, C_i, D_i はつぎのように与えられる。

(a) (7) 式で、 $s=1+p, N=k=4, p_1=0, p_2=p, p_3=q, p_4=1, w_i=A_i$ とおいて、 A_i について解くと、

$$\begin{aligned} A_1 &= p - A_2 - A_3 - A_4, \\ A_2 &= (1 - 2q + 6(1+p)^2 q - 4(1+p)^3(1+q) \\ &\quad + 3(1+p)^4)/(12p(1-p)(q-p)), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A_3 &= (1 - 2p + 6(1+p)^2 p \\ &\quad - (1+p)^4)/(12q(1-q)(p-q), \\ A_4 &= (-3 + 4(p+q) - 6pq + 6(1+p)^2 pq \\ &\quad - 4(1+p)^3(p+q) + 3(1+p)^4)/(12(1-p)(1-q)). \end{aligned}$$

以下同じようにして、

(b) $s=1+q, N=k=5, p_1=0, p_2=p, p_3=q, p_4=1, p_5=1+p, w_i=B_i$.

$$\begin{aligned} B_1 &= q - B_2 - B_3 - B_4 - B_5, \\ B_2 &= (2 + 5(p-q) - 10pq + 30q(1+p)(1+q)^2 \\ &\quad - 20(1+p+2q+pq)(1+q)^3 \\ &\quad + 15(2+p+q)(1+q)^4 \\ &\quad - 12(1+q)^5)/(60p(q-p)(1-p)), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} B_3 &= (2 - 10p^2 + 30p(1+p)(1+q)^2 \\ &\quad - 20(1+3p+p^2)(1+q)^3 \\ &\quad + 30(1+p)(1+q)^4 \\ &\quad - 12(1+q)^5)/(60q(1-q)(p-q)(1+p-q)), \\ B_4 &= (-3 - 10p + 5q + 10pq + 20p^2 - 30p^2 q \\ &\quad + 30pq(1+p)(1+q)^2 \\ &\quad - 20(p+q+2pq+p^2)(1+q)^3 \\ &\quad + 15(1+2p+q)(1+q)^4 \\ &\quad - 12(1+q)^5)/(60p(1-p)(1-q)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_5 &= (-3 + 5(p+q) - 10pq + 30pq(1+q)^2 \\ &\quad - 20(p+q+pq)(1+q)^3 \\ &\quad + 15(1+p+q)(1+q)^4 \\ &\quad - 12(1+q)^5)/(60p(1+p)(q-p-1)). \end{aligned}$$

(c) $s=2, N=k=5, p_1=0, p_2=q, p_3=1, p_4=1+p, p_5=1+q, w_i=C_i$.

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - C_2 - C_3 - C_4 - C_5, \\ C_2 &= (-27 + 35p + 35q \\ &\quad - 50pq)/(60q(1-q)(1+p-q), \\ C_3 &= (62 - 85p - 120q + 190pq + 50q^2 \\ &\quad - 90pq^2)/(60pq(1-q)), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} C_4 &= (-62 + 120q \\ &\quad - 50q^2)/(60p(1+p)(1+p-q)(q-p)), \\ C_5 &= (-62 + 85p + 35q \\ &\quad - 50pq)/(60q(2+p)(p-q)). \end{aligned}$$

(d) $s=2, N=k=5, p_1=0, p_2=q, p_3=1, p_4=1+q, p_5=2, w_i=D_i$.

$$\begin{aligned} D_1 &= 1 - D_2 - D_3 - D_4 - D_5, \\ D_2 &= (8 - 15q)/(60q(1-q)(2-q)), \\ D_3 &= (-23 + 70q - 40q^2)/(60q(1-q)), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} D_4 &= (23 - 15q)/(60q(1-q)(1+q)), \\ D_5 &= (31 - 60q + 25q^2)/(60(1-q)(2-q)). \end{aligned}$$

これらの係数に含まれる p, q の値は、つぎの章で

述べる意味で、現在の方法の安定である範囲がなるべく広くなるように決定する。

3. 安定性

安定性の定義は文献によりまちまちであるが、ここでは、文献 8) に従って、つぎのように定義する。方法が安定であるとは、 A を定数係数とする線形常微分方程式 $y' = Ay$ にその方法を適用したとき、その特性方程式の根の中で、真の解に対応する根の他は、その絶対値が 1 より小さくなることをいう。微分方程式 $y' = Ay$ に、現在の方法を適用したときの安定性を吟味してみよう。 C を定数とすると、この微分方程式の解析解は、 $y = C \cdot \exp(Ax)$ である。

このとき、(9)式から(12)式までの諸式はそれぞれ

$$y_{n+p} = y_n + Ah(A_1y_{n-1} + A_2y_{n-1+q} + A_4y_n), \tag{17}$$

$$y_{n+q} = y_n + Ah(B_1y_{n-1} + B_2y_{n-1+q} + B_3y_n + B_5y_{n+p}), \tag{18}$$

$$y_{n+1}^* = y_n + Ah(C_1y_{n-1} + C_2y_{n-1+q} + C_3y_n + C_4y_{n+p} + C_5y_{n+q}), \tag{19}$$

$$y_{n+1} - y_n + Ah(D_1y_{n-1} + D_2y_{n-1+q} + D_3y_n + D_4y_{n+q} + D_5y_{n+1}^*) \tag{20}$$

となる。これらは、同次線形連立差分方程式である。

(17)式から(20)式までの諸式に、 $y_n = \alpha_1 \rho^n$, $y_{n+p} = \alpha_2 \rho^n$, $y_{n+q} = \alpha_3 \rho^n$ を代入して、出来た方程式系から、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を消去すると、4 次の特性方程式

$$\rho^4 + k_1 \rho^3 + k_2 \rho^2 + k_3 \rho + k_4 = 0 \tag{21}$$

を得る。ここに、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は定数であり、 k_1, k_2, k_3, k_4 はすべて、 p, q と Ah の関数であって、既知である。

いま、(21)式で $h=0$ とすると

$$\rho^3(\rho - 1) = 0 \tag{22}$$

を得る。(22)式は Adams-Moulton 法の場合に類似していることは興味深い。(例えば、7)を見よ。)

(22)式から分るように、最大の根は 1 であり、これは真の解に対応するものであり、他の根はすべて 0 である。このことは、安定性にとって、好ましい特性である。

つぎに、実際に、 p, q を決定する方法を示そう。

(21)式の係数 k_1, k_2, k_3, k_4 は最高 4 次までの Ah のべきで表わされている。いま、 Ah の 2 次以上の項を無視すると、

$$\begin{aligned} k_1 &\doteq -1 - \lambda s, \\ k_2 &\doteq \mu s, \\ k &\doteq 0, \end{aligned} \tag{23}$$

$$k \doteq 0$$

を得る。ここに、 $s = Ah$, $\lambda = A_2 + B_3 + D_3 + D_4 + D_5$, $\mu = A_2 + B_3 - D_1 - D_2$ である。

従って、(21)式は

$$\rho^2(\rho^2 - (1 + \lambda s)\rho + \mu s) = 0 \tag{24}$$

となる。この代数方程式を解いて、0 でない根 ρ_1, ρ_2 を s^2 以上を省略して求めれば、

$$\rho_1 \doteq 1 + (\lambda - \mu)s, \tag{25}$$

$$\rho_2 \doteq \mu s$$

を得る。

ここで、 ρ_1 は真の解に対応するものであり、 ρ_2 は余分の解である。

ρ_2 は s の 1 次式であって、その絶対値 $|\rho_2|$ は $|s|$ の増大とともに、増大する。従って、 ρ_2 の勾配の絶対値 $|\mu|$ を最小にするような p, q を選べば、近似的に安定域を最大にする p, q を与えているはずである。

実際に、 p, q を 0.05 の刻みで動かして、それに対する μ を計算してみると、 p の一つの値に対して、 $|\mu|$ を極小にする、 q が一つ存在することが分かった。 $0.10 \leq p < 0.25$ の範囲の p の値に対して、 $|\mu|$ を極小にする q を Table 1 に示す。

Table 1 Value of the μ to p and q

p	q	μ
0.10	0.30	0.32
0.15	0.35	0.50
0.20	0.40	0.69
0.25	0.45	0.90
0.25	0.50	0.92

ここでは、安定域を少し犠牲にして、 $p=0.25, q=0.5$ と選ぶことにする。 $q=0.5$ と選んだ理由は、現在の方法を使って、刻み幅を $2h$ で計算するとき、 $x_n + 2h$ の点の値と、同時に、 $x_n + h$ の点の値をも計算したいからである。また、 $p=0.25$ としたのは、刻み幅の変更を容易にするためである。

$p=0.25, q=0.5$ のときの特性方程式(21)式の根の絶対値と Ah の関係を Fig. 2 に示す。

Fig. 2 から分るように、 $Ah > 0$ と $0 > Ah \geq -0.9$ の範囲で、現在の方法は安定であることがよみとれる。

さて、(13)式から(16)式までの諸式に、 $p=0.25, q=0.5$ を代入して、係数を計算するとつぎのようになる。

$$(a') \quad A_1 = -59/384 \quad A_2 = 200/384$$

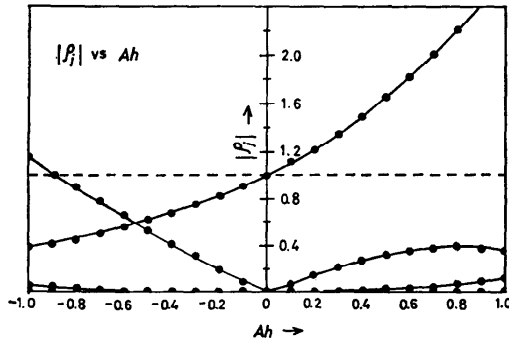


Fig. 2 Root locus for fourth order characteristic equation

- | | | |
|------|-------------------|-------------------|
| | $A_3 = -206/384$ | $A_4 = 161/384$ |
| (b') | $B_1 = 147/1800$ | $B_2 = -590/1800$ |
| | $B_3 = 740/1800$ | $B_4 = -595/1800$ |
| | $B_5 = 1198/1800$ | |
| (c') | $C_1 = 41/450$ | $C_2 = -280/450$ |
| | $C_3 = 1365/450$ | $C_4 = -1856/450$ |
| | $C_5 = 1180/450$ | |
| (d') | $D_1 = -1/180$ | $D_2 = 4/180$ |
| | $D_3 = -24/180$ | $D_4 = 124/180$ |
| | $D_5 = 29/180$ | |

4. 打切誤差

この章の目的は、(9)式から(12)式までの諸式の打切誤差を計算し、さらに、(12)式の6次の打切誤差を評価する式を作ることである。

まず、(8)式を使って、(6)式の打切誤差を計算すると

$$y_{n+1/4} - y(x_{n+1/4}) = -0.000941h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6) \tag{26}$$

を得る。従って

$$y_{n-1+1/4} - y(x_{n-1+1/4}) = -0.000941h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6) \tag{27}$$

であることは容易に分る。

ここで、 $f(x_{n+1/4}, y_{n+1/4})$ を $x = x_{n+1/4}$ の周りで h のべき級数に展開して、(26)式を使うと

$$\begin{aligned} f(x_{n+1/4}, y_{n+1/4}) &= f(x_{n+1/4}, y_{n+1/4}) \\ &\quad + (y_{n+1/4} - y(x_{n+1/4})) \\ &\quad \times \partial f(x_{n+1/4}, y) / \partial y |_{y=y(x_{n+1/4})} \\ &\quad + O((y_{n+1/4} - y(x_{n+1/4}))^2) \\ &= f(x_{n+1/4}, y(x_{n+1/4})) \\ &\quad - 0.000941h^5 T_1^* + O(h^6) \end{aligned} \tag{28}$$

を得る。ここに、 $T_1^* = \partial f(x_{n+1/4}, y) / \partial y |_{y=y(x_{n+1/4})}$ である。

同様にして

$$\begin{aligned} f(x_{n-1+1/4}, y_{n-1+1/4}) &= f(x_{n-1+1/4}, y(x_{n-1+1/4})) \\ &\quad - 0.000941h^5 T_2^* + O(h^6) \end{aligned} \tag{29}$$

を得る。ここに、 $T_2^* = \partial f(x_{n-1+1/4}, y) / \partial y |_{y=y(x_{n-1+1/4})}$ である。

これらの式を使って、 $y_{n+1/2}$ の打切誤差を計算することが出来る。(10)式の右辺のすべての項が正しいときには、その主誤差は、(8)式を使って計算すると、

$$-0.000156h^5 y^{(6)}(x_n) \tag{30}$$

となる。

(28), (29)式を(10)式に代入すると

$$\begin{aligned} y_{n+1/2} &= y_n + h(B_1 f_{n-1+1/4} + B_3 f_{n-1/2} \\ &\quad + B_4 f_n + B_5 f_{n+1/4}, y(x_{n-1+1/4})) \\ &= y_n + h(B_1 f_{n-1} + B_2 f(x_{n-1+1/4}, y(x_{n-1+1/4})) \\ &\quad + B_3 f_{n-1+1/2} + B_4 f_n \\ &\quad + B_5 f(x_{n+1/4}, y(x_{n+1/2}))) \\ &\quad + B_2(-0.000941)h^6 T_1^* \\ &\quad + B_5(-0.000941)h^6 T_2^* \\ &\quad - 0.000156h^5 y^{(6)}(x_n) + O(h^7). \end{aligned} \tag{31}$$

従って、(31)式は

$$\begin{aligned} y_{n+1/2} &= y(x_{n+1/2}) + 0.000308h^6 T_1^* \\ &\quad - 0.000626h^6 T_2^* - 0.000156h^5 y^{(6)}(x_n) \\ &\quad + O(h^7) \end{aligned} \tag{32}$$

と書ける。

同じようにして、 y_{n+1}^* の打切誤差を計算すると

$$\begin{aligned} y_{n+1}^* &= y(x_{n+1}) + 0.00388h^6 T_2^* \\ &\quad - 0.00134h^6 y^{(6)}(x_n) + O(h^7) \end{aligned} \tag{33}$$

となる。

y_{n+1} の打切誤差は、(8)式を使って計算すると

$$y_{n+1} = y(x_{n+1}) + 0.000174h^6 y^{(6)}(x_n) + O(h^7) \tag{34}$$

を得る。

ここで、6次のNewton-Cotesの積分公式(例えば6)を見よ)を利用して

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+1} &= y_{n+1} + (h/45)(7f_{n-1} + 32f_{n-1+1/2} + 12f_n \\ &\quad + 32f_{n+1/2} + 7f_{n+1}^*) + O(h^7) \end{aligned} \tag{35}$$

を得る。ここに、 \bar{y}_{n+1} は $y(x_{n+1})$ の一つの近似値である。

(35)式の右辺のすべての項は6次まで正しいから、

$$\bar{y}_{n+1} = y(x_{n+1}) + O(h^7)$$

と書き表わせる。

いま、 y_{n+1} の 6 次の打ち切誤差を T_{n+1} で表わし、(34)式から(35)式を辺々引くと次のようになる。

$$T_{n+1} = 0.000174h^6(y_6'(x_n) = y_{n+1} - \bar{y}_{n+1} = y_n + y_{n-1} - (h/180)(29f_{n-1} + 124f_{n-1/2} + 24f_n + 4f_{n+1/2} - f_{n+1}^*) + O(h^7). \quad (36)$$

以上の結果をまとめると、次のようになる。

$$y_{n+1/4} = y_n + (h/384)(-59f_{n-1} + 200f_{n-1+1/4} - 206f_{n-1+1/2} + 161f_n). \quad (37)$$

$$y_{n+1/2} = y_n(h/180)(147f_{n-1} - 590f_{n-1+1/4} + 740f_{n-1+1/2} - 595f_n + 1198f_{n+1/4}). \quad (38)$$

$$y_{n+1}^* = y_n + (h/450)(41f_{n-1} - 280f_{n-1+1/2} + 1365f_n - 1856f_{n+1/4} + 1180f_{n+1/2}). \quad (39)$$

$$y_{n+1} = y_n + (h/180)(-f_{n-1} + 4f_{n-1+1/2} + 24f_n + 124f_{n+1/2} + 29f_{n+1}^*). \quad (40)$$

$$T_{n+1} = y_n - y_{n-1} - (h/180)(29f_{n-1} + 124f_{n-1/2} + 24f_n + 4f_{n+1/2} - f_{n+1}^*). \quad (41)$$

ここで、(40)式と(41)式の括弧の中の係数は、符号と順序を別にすれば、全く同じものであることに注意すべきである。

5. 実験例

六例を使って、現在の方法と修正された Hamming 法および四段階 6 次の Butcher 法とを比較した。計算機は名大の FACOM 230-60 を使用した。そのとき、十進法で十八桁強の倍精度計算をした。

例

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1, & y_1(0) &= 1.0. \\ y_2' &= y_2, & y_2(0) &= 1.0. \\ y_3' &= -y_3 + \sin 2x, & y_3(0) &= -0.4. \\ y_4' &= y_4 + \cos x, & y_4(0) &= -0.5. \\ y_5' &= y_5 - 2x/y_5, & y_5(0) &= 1.0. \\ y_6' &= -y_6 - xy_6^2, & y_6(0) &= 1.0. \end{aligned}$$

Table 2, 3, 4, 5, 6, 7 は修正された Hamming 法と 6 次の Butcher 法と現在の方法とを h の 20 の異った値に対して、それぞれ計算したときの相対誤差を示す。

6. 結論

現在の方法と他の方法を比較してみよう。

Hamming 法との比較: Hamming 法の刻み幅 h に対して、現在の方法のそれを $2h$ で計算したときの比較を試みる。修正された Hamming 法も現在の方

Table 2 Relative errors in integration $y_1' = -y_1$, $y_1(0) = 1.0$; $y_2' = y_2$, $y_2(0) = 1.0$.

x	modified Hamming		6-order Butcher		present method	
	y_1 (h=0.01)	y_2 (h=0.01)	y_1 (h=0.02)	y_2 (h=0.02)	y_1 (h=0.02)	y_2 (h=0.02)
	$x 10^{-13}$	$x 10^{-13}$	$x 10^{-14}$	$x 10^{-13}$	$x 10^{-13}$	$x 10^{-13}$
0.5	7.7	6.6	0.47	-0.45	2.7	2.6
1.0	17	15	0.96	-0.92	5.5	5.4
2.0	36	31	1.9	-1.9	11	11

Table 3 Relative errors in integration $y_1' = -y_1$, $y_1(0) = 1.0$; $y_2' = y_2$, $y_2(0) = 1.0$.

x	modified Hamming		6-order Butcher		present method	
	y_1 (h=0.1)	y_2 (h=0.1)	y_1 (h=0.2)	y_2 (h=0.2)	y_1 (h=0.2)	y_2 (h=0.2)
	$x 10^{-7}$	$x 10^{-7}$	$x 15^{-7}$	$x 10^{-7}$	$x 10^{-7}$	$x 10^{-7}$
5	14	2.3	6.0	-3.6	2.6	2.2
10	30	5.5	12	-7.3	5.4	4.5
20	62	12	24	-15	11	9.0

Table 4 Relative errors in integration $y_3' = -y_3 + \sin 2x$, $y_3(0) = -0.4$; $y_4' = y_4 + \cos x$, $y_4(0) = -0.5$.

x	modified Hamming		6-order Butcher		present method	
	y_3 (h=0.01)	y_4 (h=0.01)	y_3 (h=0.02)	y_4 (h=0.02)	y_3 (h=0.02)	y_4 (h=0.02)
	$x 10^{-12}$	$x 10^{-12}$	$x 10^{-12}$	$x 10^{-12}$	$x 10^{-12}$	$x 10^{-12}$
0.5	-220	-1.4	3.6	-0.05	70	-0.64
1.0	-4.4	3.3	0.39	0.076	-1.2	1.6
2.0	-240	0.37	2.0	-0.05	74	0.47

Table 5 Relative errors in integration $y_3' = -y_3 + \sin 2x$, $y_3(0) = -0.4$; $y_4' = y_4 + \cos x$, $y_4(0) = -0.5$.

x	modified Hamming		6-order Butcher		present method	
	y_3 (h=0.1)	y_4 (h=0.1)	y_3 (h=0.2)	y_4 (h=0.2)	y_3 (h=0.2)	y_4 (h=0.2)
	$x 10^{-6}$	$x 10^{-6}$	$x 10^{-6}$	$x 10^{-6}$	$x 10^{-6}$	$x 10^{-6}$
5	-16	12	0.67	1.8	-4.2	-1.4
10	180	-7400	-13	1100	52	870
20	1.5	-	-0.47	-	0.57	-

Table 6 Relative errors in integration $y_5' = y_5 - 2x/y_5$, $y_5(0) = 1.0$; $y_6' = -y_6 - xy_6^2$, $y_6(0) = 1.0$.

x	modified Hamming		6-order Butcher		present method	
	y_5 (h=0.01)	y_6 (h=0.01)	y_5 (h=0.02)	y_6 (h=0.02)	y_5 (h=0.02)	y_6 (h=0.02)
	$x 10^{-12}$	$x 10^{-12}$	$x 10^{-12}$	$x 10^{-12}$	$x 10^{-12}$	$x 10^{-12}$
0.5	-170	14	0.84	2.0	-54	22
1.0	-320	-13	1.6	-2.6	-99	-1.9
2.0	-1400	-25	7.1	-0.15	-440	-6.0

Table 7 Relative errors in integration $y_5' = y_5 - 2x/y_5, y_5(0) = 1.0; y_6' = -y_6 - xy_6^2, y_6(0) = 1.0.$

x	modified Hamming		6-order Butcher		present method	
	y_5 (h=0.1)	y_6 (h=0.1)	y_5 (h=0.2)	y_6 (h=0.2)	y_5 (h=0.2)	y_6 (h=0.2)
	x 10 ⁻³	x 10 ⁻⁷	x 10 ⁻³	x 10 ⁻⁷	x 10 ⁻³	x 10 ⁻⁷
5	-0.65	-58	0.51	-8.6	0.35	-8.3
10	—	-38	—	-1.7	—	-4.7
20	—	-5.6	—	11	—	-0.71

法もともに、出発値として、四点での値を必要とし、精度もともに、5次である点では同じであるが、修正された Hamming 法は、もはや、誤差評価する能力を持たないが、現在の方法は6次の誤差を評価する能力を持つ。ただし、修正しない Hamming 法は5次の誤差を評価する能力を持つ。

四段階6次の Butcher 法との比較: Butcher の方法は出発値あるいは前段回までの計算の結果として、二点での値を必要とし、現在の方法は四点での値を必要とするが、点の広がり、ともに、同じ大きさである。現在の方法が5次であるのに対し、Butcher 法は6次であるから、概して精度は良いが、誤差評価能力を全く持たない。またこの方法は、 $2h$ の刻み幅を使うとき、 x_n+h の点の値を計算出来ないで、情報が現在の方法に比較して一つ少ないことになる。

7. 謝 辞

本研究に対し、いろいろと御指導を賜った二宮市三

教授に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Gragg, W. B. and Stetter, H. J.: Generalized multistep predictor-corrector methods, J. ACM 11 (1964), pp. 188-209.
- 2) Butcher, J. C.: A modified multistep integration of ordinary differential equations, J. ACM 12, (Jan. 1965), pp. 124-135.
- 3) Butcher, J. C.: A multistep generalization of Runge-Kutta methods with four or five stages, J. ACM 14, 1 (Jan. 1967) pp. 84-99.
- 4) Kohfeld, J. J. and Thompson, G. T.: Multistep methods with modified predictors and correctors, J. ACM 14, 1 (Jan. 1967), pp. 155-166.
- 5) Hamming, R. W.: Stable predictor-corrector methods for ordinary differential equations. J. ACM 6, 1 (Jan. 1959), pp. 37-47.
- 6) Hildebrand, F. B.: Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, (1956), p. 202.
- 7) Lapidus, L. and Seinfeld, J. H.: Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, Academic Press, New York, (1971), pp. 69-77 and p. 183.
- 8) Ralston, A. and Wilf, H. S.: Mathematical Methods for Digital Computers, John Wiley, New York, (1960), vol. 1, pp. 95-109.

(昭和47年4月14日受 付)

(昭和47年6月6日再受付)