

## 基礎行列と射影変換の計算精度の比較： 最小二乗法から超精度くりこみ法まで

菅谷 保之<sup>†1</sup> 金谷 健一<sup>†2</sup>

2 画像間の対応から基礎行列と射影変換を計算するいろいろな手法をまとめ、精度を実験的に比較する。本論文で考察するのは「最小二乗法」とそれを反復的に改善する「重み反復法」、「Taubin 法」とそれを反復的に改善する「くりこみ法」、「超精度最小二乗法」とそれを反復的に改善する「超精度くりこみ法」、再投影誤差を最小にする「最尤推定」とそれを事後的に補正する「超精度補正」である。まず計算の原理を述べ、基礎行列と射影変換の計算の類似点と相違点を整理する。そして実験を行い、最小二乗法と重み反復法には大きな偏差があること、それ以外は同程度の精度であること、超精度くりこみ法が最も精度が高く、かつデータの誤差にロバストであることを示す。

### Accuracy Comparison for Computing Fundamental Matrices and Homographies: From Least Squares to Hyper-Renormalization

YASUYUKI SUGAYA<sup>†1</sup> and KENICHI KANATANI<sup>†2</sup>

We summarize various techniques for computing fundamental matrices and homographies from point correspondences between two images and experimentally compare their accuracy. In this paper, we consider the “least squares” and its update by “iterative reweight”, the “Taubin method” and its iterative update by “renormalization”, “HyperLS” and its iterative update by “hyper-renormalization”, “maximum likelihood (ML)”, which minimize the reprojection error, and its a posteriori “hyperaccurate correction”. We first describe the principles and point out the similarities, and the differences of fundamental matrix and homography computations. Our experiments show that the least squares and the iterative reweight have large bias, all other techniques have almost similar accuracy, and that hyper-renormalization has the highest accuracy and is robust to noise.

<sup>†1</sup> 豊橋技術科学大学情報工学系 Department of Information and Computer Sciences, Toyohashi University of Technology

<sup>†2</sup> 岡山大学大学院自然科学研究科 Department of Computer Science, Okayama University

### 1. ま え が き

幾何学的拘束を利用して誤差のある観測データから対象の 2 次元および 3 次元形状を計算することはコンピュータビジョンの最も重要な基礎技術の一つであり、精度の高い計算手法が筆者らを含めて多くの研究者によって研究されてきた。典型的な問題に次のものがある。

- 1) 楕円当てはめ 画像上に与えられた点列  $(x_\alpha, y_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  に楕円を当てはめる。
- 2) 基礎行列の計算 2 画像間与えられた対応点の組  $(x_\alpha, y_\alpha)$ ,  $(x'_\alpha, y'_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  から基礎行列<sup>4)</sup>を計算する。
- 2) 射影変換の計算 2 画像間与えられた対応点の組  $(x_\alpha, y_\alpha)$ ,  $(x'_\alpha, y'_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  からそれらの間の射影変換<sup>4)</sup>を計算する。

これらはコンピュータビジョンにおいて非常に重要な役割を果たす問題である<sup>4)</sup>。前報<sup>21)</sup>では楕円当てはめに対してさまざまな方法の精度を実験的に比較し、超精度くりこみ法<sup>11)</sup>が再投影誤差または Sampson 誤差を最小化する方法よりも高精度であることを示した。本論文では基礎行列と射影変換に対して実験を行う。

基礎行列の計算と射影変換の計算には重大な相違点がある。それは基礎行列は「エビ極線方程式<sup>4)</sup>」と呼ばれる拘束式を満たすが、これはスカラー方程式である。一方、射影変換はベクトル関係式であり、その 3 成分が 3 個の拘束条件を与えるが、それらは代数的に従属であり、2 個のみが独立である<sup>18)</sup>。単一拘束の場合の各種の手法および超精度くりこみ法は文献 11) に記述があり、複数拘束の場合は文献 12) に記述がある。本論文の実験では両方の文献を参照して実験を行う。

### 2. 基礎行列の計算

2 台のカメラで撮影した第 1 画像上の点  $(x, y)$  と第 2 画像上の点  $(x', y')$  がシーン中の同一点を写したものであるとき、次の「エビ極線方程式」が成り立つ<sup>4)</sup> (図 1(a))。

$$(x, Fx') = 0, \quad x \equiv (x/f_0, y/f_0, 1)^T, \quad x' \equiv (x'/f_0, y'/f_0, 1)^T \quad (1)$$

ここに  $F$  は 2 台のカメラのパラメータや相互の位置関係によって定まるが、シーンにはよらないランク 2 の行列であり、「基礎行列」と呼ばれる。これを知ることによってカメラのパラメータや相互の位置関係を計算できるので、対応点  $(x, y)$ ,  $(x', y')$  の 3 次元位置を (絶対的なスケールを除いて) 定めることができる<sup>4)</sup>。式 (1) 中の  $f_0$  はベクトルの要素間のオーダーをそろえて有限長計算の精度を安定させるためのほぼ画像サイズの大きさの定数であ

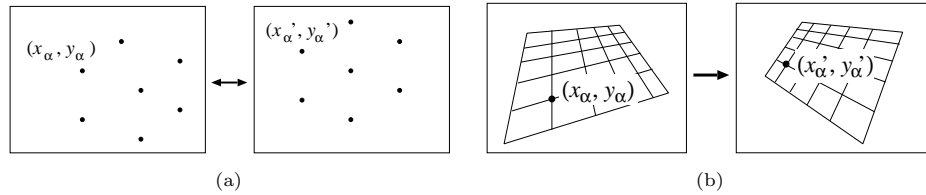


図1 (a) 2 画像の対応点から基礎行列を計算する。(b) 2 画像間の射影変換を計算する。

り<sup>3)</sup>, 実験では  $f_0 = 600$  画素とした. 9 次元ベクトル

$$\begin{aligned} \xi &= (xx', xy', f_0x, yx', yy', f_0y, f_0x', f_0y', f_0^2)^\top, \\ \theta &= (F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33})^\top \end{aligned} \quad (2)$$

を定義すると, 式 (1) は  $(\xi, \theta) = 0$  と書ける. 誤差のある対応点の組  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  に対する式 (2) のベクトル  $\xi$  を  $\xi_\alpha$  と書けば, それらから基礎行列  $F$  を計算することは,

$$(\xi_\alpha, \theta) \approx 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (3)$$

となる 9 次元ベクトル  $\theta$  を計算することである.  $\theta$  には定数倍の不定性があるので, 以後  $\|\theta\| = 1$  と正規化する. 基礎行列  $F$  はランクが 2 なので  $\det F = 0$  でなければならない. このランク拘束を考慮する次の方法がある<sup>16)</sup>.

- (1) 事後補正法: ランク拘束を考慮しないで計算した  $\theta$  をランク拘束を満たすように補正する.
- (2) 内部接近法: ランク拘束を満たすように内部パラメータで  $\theta$  を表し, その内部パラメータ空間を探索する
- (3) 外部接近法: 収束時にランク拘束を満たすように  $\theta$  空間を探索する.

ここでは事後補正法を採用し, ランク拘束を考慮しない計算のさまざまな手法の精度を比較する.

対応点  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  は真の位置  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha), (\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)$  に期待値 0, 標準偏差  $\sigma$  の独立な正規分布に従う誤差  $\Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha, \Delta x'_\alpha, \Delta y'_\alpha$  が加わったものみなすと  $\xi_\alpha$  の誤差は第 1 近似において次のようになる.

$$\begin{aligned} \Delta \xi_\alpha &= (\Delta x_\alpha x'_\alpha + x_\alpha \Delta x'_\alpha, \Delta x_\alpha y'_\alpha + x_\alpha \Delta y'_\alpha, f_0 \Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha x'_\alpha + y_\alpha \Delta x'_\alpha, \\ &\quad \Delta y_\alpha y'_\alpha + y_\alpha \Delta y'_\alpha, f_0 \Delta y_\alpha, f_0 \Delta x'_\alpha, f_0 \Delta y'_\alpha, 0)^\top \end{aligned} \quad (4)$$

仮定より  $E[\Delta x] = E[\Delta y] = 0, E[\Delta x^2] = E[\Delta y^2] = \sigma^2, E[\Delta x \Delta y] = 0$  であるから,  $\xi_\alpha$

の共分散行列は次のようになる.

$$V[\xi_\alpha] \equiv E[\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\alpha^\top] = \sigma^2 V_0[\xi_\alpha] \quad (5)$$

ただし,  $V_0[\xi_\alpha]$  を次のように置き, 「正規化共分散行列」と呼ぶ.

$$V_0[\xi_\alpha] = \begin{pmatrix} x_\alpha^2 + x'^2_\alpha & x'_\alpha y'_\alpha & f_0 x'_\alpha & x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & f_0 x_\alpha & 0 & 0 \\ x'_\alpha y'_\alpha & x_\alpha^2 + y'^2_\alpha & f_0 y'_\alpha & 0 & x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & f_0 x_\alpha & 0 \\ f_0 x'_\alpha & f_0 y'_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & y_\alpha^2 + x'^2_\alpha & x'_\alpha y'_\alpha & f_0 x'_\alpha & f_0 y_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & x_\alpha y_\alpha & 0 & x'_\alpha y'_\alpha & y_\alpha^2 + y'^2_\alpha & f_0 y'_\alpha & 0 & f_0 y_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_0 x'_\alpha & f_0 y'_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ f_0 x_\alpha & 0 & 0 & f_0 y_\alpha & 0 & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 x_\alpha & 0 & 0 & f_0 y_\alpha & 0 & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

理論的にはこれは真の位置  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha), (\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)$  で評価すべきであるが, 実験によると観測値  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  で評価しても結果に差がない. またこれは  $\Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha, \Delta x'_\alpha, \Delta y'_\alpha$  の第 1 次近似に基づいているが, 2 次以上の項を考慮しても最終結果に影響がない.

### 3. 射影変換の計算

2 台のカメラで平面シーンあるいは無限遠方を撮影したとき, 第 1 画像上の点  $(x, y)$  と第 2 画像上の点  $(x', y')$  が対応していれば, それらは次の形の「射影変換」で結ばれている<sup>4)</sup>.

$$x' = f_0 \frac{H_{11}x + H_{12}y + H_{13}f_0}{H_{31}x + H_{32}y + H_{33}f_0}, \quad y' = f_0 \frac{H_{21}x + H_{22}y + H_{23}f_0}{H_{31}x + H_{32}y + H_{33}f_0} \quad (7)$$

ここに  $f_0$  は基礎行列の計算の場合と同様に, 係数  $H_{ij}$  のオーダーをそろえて有限長計算の精度が安定させるためのほぼ画像サイズの大きさの定数であり, 実験では  $f_0 = 600$  画素とした. 式 (7) は次のように表すことができる<sup>4)</sup>.

$$x' \simeq Hx, \quad x \equiv (x/f_0, y/f_0, 1)^\top, \quad x' \equiv (x/f'_0, y/f'_0, 1)^\top, \quad (8)$$

ここに  $H = (H_{ij})$  であり,  $\simeq$  は非零の定数倍を除いて等しいことを表す. ただし, 式 (7), (8) が射影変換を表すのは  $H$  が正則行列の場合である. 式 (8) はベクトル  $x', Hx$  が平行であることを表すので, 次のように書いても等価である.

$$x' \times Hx = 0 \quad (9)$$

9 次元ベクトル  $\theta, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}$  を

$$\theta = (H_{11}, H_{12}, H_{13}, H_{21}, H_{22}, H_{23}, H_{31}, H_{32}, H_{33})^\top, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\xi^{(1)} &= (0, 0, 0, -f_0x, -f_0y, -f_0^2, xy', yy', f_0y')^\top \\ \xi^{(2)} &= (f_0x, f_0y, f_0^2, 0, 0, 0, -xx', -yy', -f_0x')^\top \\ \xi^{(3)} &= (-xy', -yy', -f_0y', xx', yy', f_0x', 0, 0, 0)^\top\end{aligned}\quad (11)$$

と定義すると、式 (9) の 3 成分を取り出して  $f_0^2$  倍して次の拘束式を得る。

$$(\xi^{(1)}, \theta) = 0, \quad (\xi^{(2)}, \theta) = 0, \quad (\xi^{(3)}, \theta) = 0 \quad (12)$$

ただし、これらは互いに代数的に独立ではなく、恒等式  $x'(\xi^{(1)}, \theta) + y'(\xi^{(2)}, \theta) + f_0(\xi^{(3)}, \theta) = 0$  が成り立つ。2 個のみが独立であるから、どれか 2 個を取り出して用いてもよいが、式の対称性を保つためにすべて用いる場合を考える。誤差のある対応点の組  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  に対する式 (25) のベクトル  $\xi^{(k)}$  を  $\xi_\alpha^{(k)}$  と書けば、それらから射影変換を計算することは、

$$(\xi_\alpha^{(k)}, \theta) \approx 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (13)$$

となる 9 次元ベクトル  $\theta$  を計算することである。対応点  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  は真の位置  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha), (\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)$  に期待値 0、標準偏差  $\sigma$  の独立な正規分布に従う誤差  $\Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha, \Delta x'_\alpha, \Delta y'_\alpha$  が加わったものとみなすと  $\xi_\alpha$  の誤差は第 1 近似において次のようになる。

$$\begin{aligned}\Delta \xi_\alpha^{(1)} &= (0, 0, 0, -f_0\Delta x_\alpha, -f_0\Delta y_\alpha, 0, y'_\alpha\Delta x_\alpha + x_\alpha\Delta y'_\alpha, y'_\alpha\Delta y_\alpha + y_\alpha\Delta y'_\alpha, f_0\Delta y'_\alpha)^\top, \\ \Delta \xi_\alpha^{(2)} &= (f_0\Delta x_\alpha, f_0\Delta y_\alpha, 0, 0, 0, 0, -x'_\alpha\Delta x_\alpha - x_\alpha\Delta x'_\alpha, -x'_\alpha\Delta y_\alpha - y_\alpha\Delta x'_\alpha, -f_0\Delta x'_\alpha)^\top, \\ \Delta \xi_\alpha^{(3)} &= (-y'_\alpha\Delta x_\alpha - x_\alpha\Delta y'_\alpha, -y'_\alpha\Delta y_\alpha - y_\alpha\Delta y'_\alpha, -f_0\Delta y'_\alpha, x'_\alpha\Delta x_\alpha + x_\alpha\Delta x'_\alpha, \\ &\quad x'_\alpha\Delta y_\alpha + y_\alpha\Delta x'_\alpha, f_0\Delta x'_\alpha, 0, 0, 0)^\top\end{aligned}\quad (14)$$

仮定より  $E[\Delta x] = E[\Delta y] = 0$ ,  $E[\Delta x^2] = E[\Delta y^2] = \sigma^2$ ,  $E[\Delta x\Delta y] = 0$  であるから、 $\xi_\alpha^{(k)}$  の共分散行列は次のようになる<sup>18)</sup>。

$$V^{(kl)}[\xi_\alpha] \equiv E[\Delta \xi_\alpha^{(k)} \Delta \xi_\alpha^{(l)\top}] = \sigma^2 V_0^{(kl)}[\xi_\alpha], \quad V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] = T_\alpha^{(k)} T_\alpha^{(l)\top} \quad (15)$$

ただし  $T_\alpha$  を次のように置いた。

$$T_\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y'_\alpha & 0 & 0 & x_\alpha \\ 0 & y'_\alpha & 0 & y_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & f_0 \end{pmatrix}, \quad T_\alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x'_\alpha & 0 & -x_\alpha & 0 \\ 0 & -x'_\alpha & -y_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -f_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_\alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} -y'_\alpha & 0 & 0 & -x_\alpha \\ 0 & -y'_\alpha & 0 & -y_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -f_0 \\ x'_\alpha & 0 & x_\alpha & 0 \\ 0 & x'_\alpha & y_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基礎行列の場合と同様に、これらは本来は真の位置  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha), (\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)$  で評価すべきであるが、実験によると観測値  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  で評価しても結果に差がない。またこれは  $\Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha, \Delta x'_\alpha, \Delta y'_\alpha$  の第 1 次近似に基づいているが、2 次以上の項を考慮しても最終結果に影響がない。

#### 4. 重み反復法と最小二乗法

古くから知られていた方法は「重み反復法」である。基礎行列の場合は次のように書ける。

- (1)  $W_\alpha = 1$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  と置き、 $\theta_0 = \mathbf{0}$  とする。
- (2) 次の行列  $M$  を計算する。

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \xi_\alpha \xi_\alpha^\top \quad (17)$$

- (3) 固有値問題  $M\theta = \lambda\theta$  を解いて、最小固有値に対する単位固有ベクトル  $\theta$  を計算する。
- (4) 符号を除いて  $\theta \approx \theta_0$  なら  $\theta$  を返して終了する。そうでなければ次のように更新してステップ (2) に戻る。

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\theta, V_0[\xi_\alpha]\theta)}, \quad \theta_0 \leftarrow \theta \quad (18)$$

射影変換に対しては次のようになる。

- (1)  $W_\alpha^{(kl)} = \delta_{kl}$  (クロネッカデルタ),  $\alpha = 1, \dots, N$  と置き、 $\theta_0 = \mathbf{0}$  とする。
- (2) 次の行列  $M$  を計算する。

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_\alpha^{(kl)} \xi_\alpha^{(k)} \xi_\alpha^{(l)\top} \quad (19)$$

- (3) 固有値問題  $M\theta = \lambda\theta$  を解いて、最小の固有値に対する単位固有ベクトル  $\theta$  を計算する。
- (4) 符号を除いて  $\theta \approx \theta_0$  なら  $\theta$  を返して終了する。そうでなければ  $W_\alpha^{(kl)}$  を  $(kl)$  要素とする行列  $W_\alpha$  と  $\theta$  を次のように更新してステップ (2) に戻る。

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{f_0^2} \left( x'_\alpha \times H P_k H^\top \times x'_\alpha + (H x_\alpha) \times P_k \times (H x_\alpha) \right)_2^{-1}, \quad \theta_0 \leftarrow \theta \quad (20)$$

ただし  $(\cdot)_2^{-1}$  はランク 2 の一般逆行列 (スペクトル分解して最小固有値を 0 に置き換

えた行列の一般逆行列)であり、 $P_k = \text{diag}(1, 1, 0)$  (単位行列の(33)要素を0にしたもの)と置いた。また  $x_\alpha, x'_\alpha$  は  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  に対する式(8)のベクトル  $x, x'$  であり、ベクトル  $a$  と行列  $T$  の積  $a \times T$  を  $a$  と  $T$  の各列のベクトル積を列とする行列と定義する<sup>8)</sup>。そして  $T(a \times I)^\top$  を  $T \times a$  と表記する<sup>8)</sup>。

背景. 文献12)に述べられているように、この方法は何かの評価関数を最小にするものではない。一般論によると式(20)の第1式の右辺は  $(\theta, V_0^{(kl)}[\xi_\alpha]\theta)$  を  $(kl)$  要素とする行列のランク2の一般逆行列であるが、式(16)の行列  $T_\alpha^{(k)}$  の定義から式(20)のように書けることが確認できる(詳細省略)。初期状態  $W_\alpha = 1$  あるいは  $W_\alpha^{(kl)} = \delta_{kl}$  のもとで計算される  $\theta$  (以下、便宜上「初期解」と呼ぶ)は代数距離  $\sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha, \theta)^2$  あるいは  $\sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 (\xi_\alpha^{(k)}, \theta)^2$  を最小にする単位ベクトル  $\theta$  であり、「最小二乗法」と呼ばれる方法に一致する。しかし、最小二乗法も重み反復法も偏差が非常に大きいことが知られている<sup>8)</sup>。この偏差を除去して精度を向上させる工夫が筆者らの「くりこみ法<sup>5),6)</sup>」である。

## 5. くりこみ法と Taubin 法

筆者らが提案した「くりこみ法<sup>5),6),8)</sup>」は基礎行列の場合は次のようになる。

- (1)  $W_\alpha = 1, \alpha = 1, \dots, N, \theta_0 = \mathbf{0}$  と置く。
- (2) 次の行列  $M, N$  を計算する。

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \xi_\alpha \xi_\alpha^\top, \quad N = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha V_0[\xi_\alpha] \quad (21)$$

- (3) 一般固有値問題  $M\theta = \lambda N\theta$  を解いて、最小一般固有値  $\lambda$  に対する単位一般固有ベクトル  $\theta$  を計算する。
- (4) 符号を除いて  $\theta \approx \theta_0$  なら  $\theta$  を返して終了する。そうでなければ次のように更新してステップ2の戻る。

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\theta, V_0[\xi_\alpha]\theta)}, \quad \theta_0 \leftarrow \theta \quad (22)$$

射影変換の場合は次のようになる。

- (1)  $W_\alpha^{(kl)} = \delta_{kl}, \alpha = 1, \dots, N, \theta_0 = \mathbf{0}$  と置く。
- (2) 次の行列  $M, N$  を計算する。

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_\alpha^{(kl)} \xi_\alpha^{(k)} \xi_\alpha^{(l)\top}, \quad N = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_\alpha^{(kl)} V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] \quad (23)$$

- (3) 一般固有値問題  $M\theta = \lambda N\theta$  を解いて、最小一般固有値  $\lambda$  に対する単位一般固有ベクトル  $\theta$  を計算する。
- (4) 符号を除いて  $\theta \approx \theta_0$  なら  $\theta$  を返して終了する。そうでなければ次のように更新してステップ(2)に戻る。

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{f_0^2} \left( x'_\alpha \times H P_k H^\top \times x'_\alpha + (H x_\alpha) \times P_k \times (H x_\alpha) \right)_2^{-1}, \quad \theta_0 \leftarrow \theta \quad (24)$$

背景. 文献5),6)では基礎行列の計算のような単一拘束の場合にステップ(3)を固有値問題に置き換えて解く方法が示されているが、解は同一である<sup>8)</sup>。この方法の背景も文献11)に述べられているが、何かの評価関数を最小にするものではない。初期状態  $W_\alpha = 1$  のもとで計算される初期解は拘束条件  $(\theta, \sum_{\alpha=1}^N V_0[\xi_\alpha]\theta) = 1$  のもとに代数距離  $\sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha, \theta)^2$  を最小にする「Taubin法<sup>20)</sup>」にほかならない。射影変換の場合に初期状態  $W_\alpha^{(kl)} = \delta_{kl}$  のもとで計算される初期解は拘束条件  $(\theta, \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 V_0^{(kl)}[\xi_\alpha]\theta) = 1$  のもとに代数距離  $\sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 (\xi_\alpha, \theta)^2$  を最小にするものであり、これは新妻ら<sup>19)</sup>が Taubin 法の多拘束への拡張として提案したものに一致している。これも「Taubin法」と呼ぶことにする。

式(6)から分かるように、式(21)の行列  $N$  は第9行第9列が0の半正値対称行列であるが、ステップ(3)の一般固有値問題を解く通常のライブラリツールでは  $N$  が正値対称行列と仮定されている。しかし、 $M\theta = \lambda N\theta$  は次のように書き直せる。

$$N\theta = \frac{1}{\lambda} M\theta \quad (25)$$

行列  $M$  は誤差のあるデータに対しては正値対称行列であるから(誤差がないときのみ最小固有値が0となる)、式(25)を解くことによって一般固有ベクトル  $\theta$  が求まる。文献5),6)の固有値問題に置き換えるくりこみ法の手順はこの手続きを避けるためであった。多拘束のくりこみ法は射影変換の計算に対して文献13)では固有値問題に置き換える手順が示されている。一般固有値を解く場合は式(23)の  $N$  も正値ではないので(25)に置き換えて解く。

## 6. 超精度くりこみ法と超精度最小二乗法

最近筆者らが提案した「超精度くりこみ法<sup>11),12)</sup>」の手順は基礎行列の場合は次のようになる。

- (1)  $W_\alpha = 1, \alpha = 1, \dots, N, \theta_0 = \mathbf{0}$  と置く。

(2) 次の行列  $M$ ,  $N$  を計算する .

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} \xi_{\alpha} \xi_{\alpha}^{\top},$$

$$N = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} V_0[\xi_{\alpha}] - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha}^2 \left( (\xi_{\alpha}, M_{\bar{s}}^{-1} \xi_{\alpha}) V_0[\xi_{\alpha}] + 2S[V_0[\xi_{\alpha}]] M_{\bar{s}}^{-1} \xi_{\alpha} \xi_{\alpha}^{\top} \right) \quad (26)$$

ただし  $S[\cdot]$  は対象化作用素であり ( $S[A] = (A + A^{\top})/2$ ),  $M_{\bar{s}}^{-1}$  は行列  $M$  のランク 8 の一般逆行列, すなわち  $M$  の最小固有値を 0 に置き換えた一般逆行列である .

- (3) 一般固有値問題  $M\theta = \lambda N\theta$  を解いて, 絶対値が最小の一般固有値  $\lambda$  に対する単位一般固有ベクトル  $\theta$  を計算する .
- (4) 符号を除いて  $\theta \approx \theta_0$  なら  $\theta$  を返して終了する . そうでなければ次のように更新してステップ 2 の戻る .

$$W_{\alpha} \leftarrow \frac{1}{(\theta, V_0[\xi_{\alpha}]\theta)}, \quad \theta_0 \leftarrow \theta \quad (27)$$

射影変換の場合は次のようになる .

- (1)  $W_{\alpha}^{(kl)} = 1, \alpha = 1, \dots, N, \theta_0 = \mathbf{0}$  と置く .
- (2) 次の行列  $M$ ,  $N$  を計算する .

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_{\alpha}^{(kl)} \xi_{\alpha}^{(k)} \xi_{\alpha}^{(l)\top},$$

$$N = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_{\alpha}^{(kl)} V_0^{(kl)}[\xi_{\alpha}] - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l,m,n=1}^3 W_{\alpha}^{(kl)} W_{\alpha}^{(mn)} \left( (\xi_{\alpha}^{(k)}, M_{\bar{s}}^{-1} \xi_{\alpha}^{(m)}) V_0^{(ln)}[\xi_{\alpha}] + 2S[V_0^{(km)}[\xi_{\alpha}]] M_{\bar{s}}^{-1} \xi_{\alpha}^{(l)} \xi_{\alpha}^{(n)\top} \right) \quad (28)$$

- (3) 一般固有値問題  $M\theta = \lambda N\theta$  を解いて, 絶対値が最小の一般固有値  $\lambda$  に対する単位一般固有ベクトル  $\theta$  を計算する .
- (4) 符号を除いて  $\theta \approx \theta_0$  なら  $\theta$  を返して終了する . そうでなければ次のように更新して

ステップ 2 の戻る .

$$W_{\alpha} \leftarrow \frac{1}{f_0^2} \left( x'_{\alpha} \times H P_k H^{\top} \times x'_{\alpha} + (H x_{\alpha}) \times P_k \times (H x_{\alpha}) \right)_2^{-1}, \quad \theta_0 \leftarrow \theta \quad (29)$$

背景 . この方法の導出は文献 11), 12) に述べられているが, 何かの評価関数を最小にするものではない . 式 (26), (28) の行列  $N$  はステップ (3) の一般固有値問題の解の誤差を詳細に解析し, 精度を最大化するように行列  $N$  を最適化したものである . そして, その解は高次の誤差項を除いて偏差が 0 であるという特徴がある<sup>11)</sup> . 文献 11), 12) の一般論では式 (26), (28) の行列  $N$  の右辺第 1 項にはさらに項が現れているが, 基礎行列と射影変換の場合にはその項が 0 になる . これは式 (2) の  $\xi$  や式 (11) の  $\xi^{(k)}$  が  $x, y$  と  $x', y'$  の双 1 次式であり, 同じ画像に対する値の積が現れていないこと, および各画像の誤差が互いに独立と仮定するためである . それに対して楕円当てはめでは同一画像に関する変数の 2 次式が現れるため  $N$  には余分な項が加わる<sup>21)</sup> .

初期状態  $W_{\alpha} = 1$  あるいは  $W_{\alpha}^{(kl)} = \delta_{kl}$  のもとで計算される初期解は筆者らの「超精度最小二乗法<sup>14)</sup>」に一致し ( $N$  の式がやや異なるが解は同じ), やはり高次の誤差項を除いて偏差が 0 である . 式 (26) の行列  $N$  は正値ではなく, 負の固有値も含んでいる . したがってステップ (3) は式 (25) に置き換えて解く .

## 7. 最尤推定と超精度補正

Chojnacki ら<sup>2)</sup> の「FNS 法」は基礎行列に対しては次のように記述できる .

- (1)  $W_{\alpha} = 1, \alpha = 1, \dots, N, \theta_0 = \mathbf{0}$  と置く .
- (2) 次の行列  $M$ ,  $L$  を計算する .

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha} \xi_{\alpha} \xi_{\alpha}^{\top}, \quad L = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha}^2 (\theta_0, \xi_{\alpha})^2 V_0[\xi_{\alpha}] \quad (30)$$

- (3) 固有値問題  $(M - L)\theta = \lambda\theta$  を解き, 最小固有値  $\lambda$  に対する単位固有ベクトル  $\theta$  を計算する .
- (4) 符号を除いて  $\theta \approx \theta_0$  なら  $\theta$  を返して終了する . そうでなければ次のように更新してステップ 2 の戻る .

$$W_{\alpha} \leftarrow \frac{1}{(\theta, V_0[\xi_{\alpha}]\theta)}, \quad \theta_0 \leftarrow \theta \quad (31)$$

Chojnacki ら<sup>2)</sup> の FNS 法は単一拘束に対するものであり, 射影変換のような多拘束に対してはそのまま適用できないが, 新妻ら<sup>18)</sup> は次のように FNS 法を多拘束に拡張した .

- (1)  $W_\alpha^{(kl)} = \delta_{kl}$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ ,  $\theta_0 = \mathbf{0}$  と置く .  
 (2) 次の行列  $M$ ,  $L$  を計算する .

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_\alpha^{(kl)} \xi_\alpha^{(k)} \xi_\alpha^{(l)\top},$$

$$L = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l,m,n=1}^3 W_\alpha^{(km)} W_\alpha^{(ln)} (\xi_\alpha^{(m)}, \theta_0) (\xi_\alpha^{(n)}, \theta_0) V_0^{(kl)} [\xi_\alpha] \quad (32)$$

- (3) 固有値問題  $(M - L)\theta = \lambda\theta$  を解き, 最小固有値  $\lambda$  に対する単位固有ベクトル  $\theta$  を計算する .  
 (4) 符号を除いて  $\theta \approx \theta_0$  なら  $\theta$  として返して終了する . そうでなければ次のように更新してステップ (2) に戻る .

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{f_0^2} \left( x'_\alpha \times H P_k H^\top \times x'_\alpha + (H x_\alpha) \times P_k \times (H x_\alpha) \right)_2^{-1}, \quad \theta_0 \leftarrow \theta \quad (33)$$

背景 . これはそれぞれ次の「サンプソン誤差」を最小にする手続きである .

$$J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha (\xi_\alpha, \theta)^2, \quad J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_\alpha^{(kl)} (\xi_\alpha^{(k)}, \theta) (\xi_\alpha^{(l)}, \theta) \quad (34)$$

ただし,  $W_\alpha$ ,  $W_\alpha^{(kl)}$  はそれぞれ式 (31), (33) の表現を代入したものである . この関数  $J$  の  $\theta$  に関する微分は式 (30), (32) の行列  $M$ ,  $N$  を用いれば  $\nabla_\theta J = 2(M - L)\theta$  と書ける . 上記の手続きは  $\nabla_\theta J = \mathbf{0}$  となる  $\theta$  を求めるものである . 初期状態  $W_\alpha = 1$  または  $W_\alpha^{(kl)} = \delta_{kl}$  のもとで計算される初期解は最小二乗法に一致する . 最終的に得られた解を用いて上式のサンプソン誤差に修正を加えて, それをまた FNS 法で最小化し, これを反復することによって再投影誤差を最小にする解が計算される<sup>15),17)</sup> . しかし, 実験によればサンプソン誤差を最小化する解と再投影誤差を最小にする解は有効数字数桁に渡って一致する . そこで以下ではこれらを含めて「最尤推定」と呼び, 計算法は FNS 法で代表させる .

この解の「超精度補正」とは, 得られた解  $\theta$  の偏差を精密に解析して, それを事後的に引き算によって補正するものであり, 基礎行列の場合は次のようになる<sup>9),10)</sup> .

- (1) 次のように  $\sigma^2$  を推定する .

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\theta, M\theta)}{1 - 8/N} \quad (35)$$

ただし,  $M$  は FNS 法の終了時点での値を用いる .

- (2) 次の補正項を計算する .

$$\Delta_c \theta = \frac{\hat{\sigma}^2}{N^2} M_8^{-1} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha^2 (\xi_\alpha, M_8^{-1} V_0 [\xi_\alpha] \theta) \xi_\alpha \quad (36)$$

ただし,  $W_\alpha$  は FNS 法の終了時点での値を用いる .

- (3)  $\theta \leftarrow \mathcal{N}[\theta - \Delta_c \theta]$  と補正する . ただし,  $\mathcal{N}[\cdot]$  は単位ベクトルへの正規化を表す ( $\mathcal{N}[a] = a/\|a\|$ ) .

射影変換の場合は文献にはないが, 同様の解析を行うと次のようになる .

- (1) 次のように  $\sigma^2$  を推定する .

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\theta, M\theta)}{2(1 - 4/N)} \quad (37)$$

ただし,  $M$  は FNS 法の終了時点での値を用いる .

- (2) 次の補正項を計算する .

$$\Delta_c \theta = \frac{\hat{\sigma}^2}{N^2} M_8^{-1} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l,m,n=1}^3 W_\alpha^{(kl)} W_\alpha^{(mn)} (\xi_\alpha^{(k)}, M_8^{-1} V_0^{(lm)} [\xi_\alpha] \theta) \xi_\alpha^{(n)} \quad (38)$$

ただし,  $W_\alpha^{(kl)}$  は FNS 法の終了時点での値を用いる .

- (3)  $\theta \leftarrow \mathcal{N}[\theta - \Delta_c \theta]$  と補正する .

## 8. 実 験

次のような基礎行列と射影変換の計算の実験を行った .

- (1) 図 2 には曲面格子を 2 方向から撮影したシミュレーション画像である . 2 画像とも画像サイズ  $600 \times 600$  画素, 焦点距離 600 画素を想定している . 画像中の各格子点の  $x, y$  座標に平均 0, 標準偏差  $\sigma$  画素の正規分布に従う乱数誤差を独立に加えて基礎行列を計算する .  
 (2) 図 3 は平面格子を 2 方向から撮影したシミュレーション画像である . 2 画像とも画像サイズ  $800 \times 800$  画素, 焦点距離 600 画素を想定している . 画像中の各格子点の  $x, y$  座標に平均 0, 標準偏差  $\sigma$  画素の正規分布に従う乱数ノイズを独立に加えて射影変換を計算する .

計算は次の方法を比較する : 1. 最小二乗法, 2. 重み反復法, 3. Taubin 法, 4. くりこみ法, 5. 超精度最小二乗法, 6. 超精度くりこみ法, 7. 最尤推定, 8. 最尤推定の超精度補正 . 計算した  $\theta$  と真の値  $\bar{\theta}$  はともに単位ベクトルであることから, その差  $\Delta\theta$  を  $\theta$  の  $\bar{\theta}$  に垂直

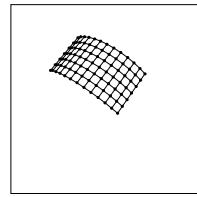
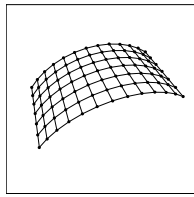


図2 曲面格子を2方向から撮影したシミュレーション画像.

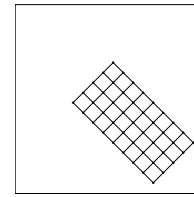
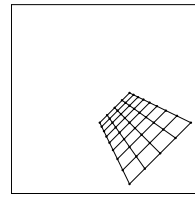


図3 平面格子を2方向から撮影したシミュレーション画像.

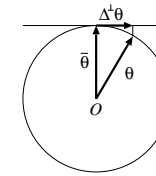


図4 計算値  $\theta$  の真の値  $\bar{\theta}$  に垂直な成分  $\Delta\theta$ .

な成分  $\Delta\theta = P_{\bar{\theta}}\theta$  で測る(図4).ただし  $P_{\bar{\theta}} (\equiv I - \bar{\theta}\bar{\theta}^T)$  は  $\bar{\theta}$  に垂直な空間への射影行列である.そして各  $\sigma$  に対して 10000 回の独立に試行し, 次の偏差  $B$  と RMS(平方平均二乗) 誤差  $D$  を計算する.

$$B = \left\| \frac{1}{10000} \sum_{a=1}^{10000} \Delta\theta^{(a)} \right\|, \quad D = \sqrt{\frac{1}{10000} \sum_{a=1}^{10000} \|\Delta\theta^{(a)}\|^2} \quad (39)$$

ここに  $\theta^{(a)}$  は  $a$  回目の試行の解である. RMS 誤差の理論限界を表す KCR 下界<sup>1),7),8),10)</sup> は次のようになる.

$$D_{\text{KCR}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\text{tr} \bar{M}^{-1}} \quad (40)$$

ただし,  $\bar{M}^{-1}$  はすべての手法に共通に現れる行列  $M$  の真値  $\bar{M}$  の一般逆行列であり,  $\bar{M}\bar{\theta} = \mathbf{0}$  より  $\bar{M}$  はランク 8 である.

基礎行列の計算の偏差を図 5(a) に, RMS 誤差を図 5(b), 射影変換の計算の偏差を図 5(c) に, RMS 誤差を図 5(d) に示す. 図 5(b), 図 5(d) の点線は KCR 下界である. 図 5(a), (c) から分かるように, 最小二乗法と重み反復法は偏差が非常に大きい. 文献 10) の解析手法を用いれば重み反復法, くりこみ法, 超精度くりこみ法の解の共分散行列の主要項は等しく, KCR の下界に一致することが示せる. このため RMS 誤差は偏差の与える影響が大きく, 図 5(b), (d) に示されるように偏差の増大がそのまま RMS 誤差の増加に結びついている.

基礎行列の場合, 図 5(a) に示されるように最尤推定はかなりの偏差があるが, 超精度補正によって偏差が大きく減少している. 一方, 超精度くりこみ法はそれと同じ程度に偏差が小さい. しかし, 図 5(b) に示されるように, 最小二乗法と重み反復法以外はどれも KCR の下界に近い精度差を達成しているので, 偏差の減少の寄与は非常に小さい. 射影変換の場合も同様であり, 最小二乗法と重み反復法以外はどれもほぼ KCR の下界に一致しているので, 手法間の差は小さい.

しかし, いずれの場合も楕円の場合<sup>21)</sup>と同様に, わずかではあるが最も精度が高いのは超精度くりこみ法と最尤推定の超精度補正である. しかし, 最尤推定解を計算する FNS 法は誤差が大きいと必ずしも収束しないという問題がある. 図 5 の範囲には現れていないが, 射影変換の計算では  $\sigma = 13$  で重み反復法が収束しなくなり, FNS 法は  $\sigma = 25$  で収束しなくなる. ただし, 収束判定は符号をそろえた解  $\theta$  と前回の解  $\theta_0$  が  $\|\theta - \theta_0\| < 10^{-6}$  であると, 100 回反復して収束しないとき「収束しない」と判定した. 以上より, 超精度くりこみ法が実際の計算には最も適しているといえる.

## 9. ま と め

本論文では, まず 2 画像の対応点から基礎行列と射影変換を計算する次の方法をまとめた.

- (1) 最小二乗法とそれを反復的に改善する重み反復法.
- (2) Taubin 法<sup>20)</sup>とそれを反復的に改善するくりこみ法<sup>5),6)</sup>.
- (3) 超精度最小二乗法<sup>14)</sup>とそれを反復的に改善する超精度くりこみ法<sup>11),12)</sup>.
- (4) 再投影誤差を最小にする最尤推定とそれを事後的に補正する超精度補正<sup>9),10)</sup>.

そして, これらの精度を実験的に比較した. その結果, 最小二乗法と重み反復法には大きな偏差があり, 精度が低いこと, それ以外は同程度の精度であることがわかった. ただし, 重み反復法と最尤推定の計算の反復はデータの誤差が大きいと収束しないことがある. この意味でデータの誤差にロバストな超精度くりこみ法が実際の計算に最も適している.

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 (C 21500172) の助成によった.

## 参 考 文 献

- 1) N. Chernov and C. Lesort, Statistical efficiency of curve fitting algorithms, *Comp. Stat. Data Anal.*, **47-4** (2004-11), 713-728.
- 2) W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel, and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22-11**

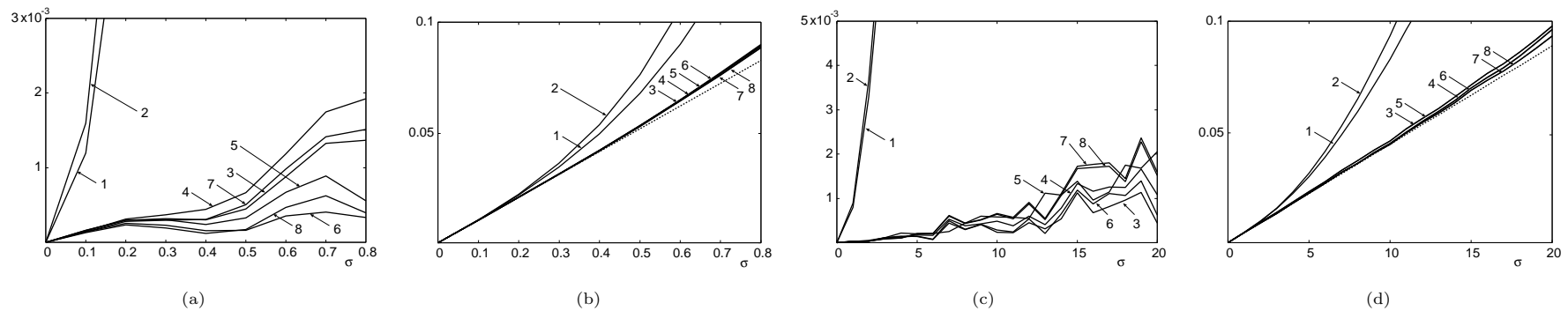


図5 基礎行列の計算の偏差 (a) と RMS 誤差 (b), および射影変換の計算の偏差 (c) と RMS 誤差 (d). 横軸はデータ点に加えた誤差の標準偏差  $\sigma$ . 各  $\sigma$  に対して 10000 回試行. 番号は 1. 最小二乗法, 2. 重み反復法, 3. Taubin 法, 4. くりこみ法, 5. 超精度最小二乗法, 6. 超精度くりこみ法, 7. 最尤推定, 8. 最尤推定の超精度補正. (b), (d) の点線は KCR 下界.

(2000-11), 1294–1303.

- 3) R. I. Hartley, In defense of the eight-point algorithm, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **19-6** (1997-6), 580–593.
- 4) R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2004.
- 5) K. Kanatani, Renormalization for unbiased estimation, *Pro. 4th Int. Conf. Comput. Vis. (ICCV'93)*, May 1993, Berlin, Germany, pp. 599–606.
- 6) 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, *情報処理学会論文誌*, **35-2** (1994-2), 201–209.
- 7) 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, *情報処理学会論文誌*, **36-88** (1995-8), 1865–1873.
- 8) K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice* Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted, Dover, York, NY, U.S.A., 2005.
- 9) K. Kanatani, Ellipse fitting with hyperaccuracy, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E89-D-10** (2006-10), 2653–2660.
- 10) K. Kanatani, Statistical optimization for geometric fitting: Theoretical accuracy analysis and high order error analysis, *Int. J. Comput. Vis.*, **80-2** (2008-11), 167–188.
- 11) 金谷健一, アリ・アルシャラドカー, ニコライ・チェルノフ, 菅谷保之, 超精度くりこみ法, *情報処理学会研究報告*, 2012-CVIM-180-25 (2012-1), 1–8.
- 12) 金谷健一, アリ・アルシャラドカー, ニコライ・チェルノフ, 菅谷保之, 超精度くりこみ法: 複数拘束, *情報処理学会研究報告*, 2012-CVIM-181-23 (2012-3), 1–8.
- 13) K. Kanatani, N. Ohta and Y. Kanazawa, Optimal homography computation with a reliability measure, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E83-D-7** (2000-7), 1369–1374.
- 14) K. Kanatani, P. Rangarajan, Y. Sugaya and H. Niitsuma, HyperLS and its applications, *IPSP Trans. Comput. Vis. Appl.*, **3** (2011-10), 80–94.
- 15) 金谷健一, 菅谷保之, 幾何学的当てはめの厳密な最尤推定の統一的計算法, *情報処理学会論文誌: CVIM*, **2-1** (2009-3), 53–62.
- 16) K. Kanatani and Y. Sugaya, Compact fundamental matrix computation, *IPSP Trans. Comput. Vis. Appl.*, **2** (2010-3), 59–70.
- 17) K. Kanatani and Y. Sugaya, Unified computation of strict maximum likelihood for geometric fitting, *J. Math. Imaging Vis.*, **38-1** (2010-9), 1–13.
- 18) 新妻 弘崇, 金谷 健一, 最適な射影変換の新しい計算アルゴリズム, *情報処理学会研究報告*, 2009-CVIM-169-37 (2009-11), 1–8.
- 19) 新妻 弘崇, プラサンナ・ランガラヤン, 金谷 健一, 反復を要しない射影変換の高精度解法, *情報処理学会研究報告*, 2010-CVIM-170-57 (2010-1), 1–8.
- 20) G. Taubin, Estimation of planar curves, surfaces, and non-planar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13-11** (1991-11), 1115–1138.
- 21) 横田健太, 村田和洋, 菅谷保之, 金谷健一, 楕円当てはめの精度比較: 最小二乗法から超精度くりこみ法まで, *情報処理学会研究報告*, 2012-CVIM-180-26 (2012-1), 1–8.