

線型定常システムの過渡応答の数値解析†

井上 訓行^{††} 奥川 俊二^{††}

Abstract

In this paper, methods of evaluating transient responses of linear time-invariant systems using the state space equations are presented. These methods, completely free from eigenvalue problems, are first given by Liou¹⁾ and reformed by several authors²⁾. But they are mainly limited to homogeneous forms $X' = AX$.

First, when computing matrix exponential e^{At} by the power series expansion, we show the number of terms necessary for the required accuracy.

Next, in the case of heterogeneous equations $X' = AX + F$, where F is a forced input, we show (1) the method is extended by evaluating forced response matrices, which are evaluated in a similar way with e^{At} , (2) when F are special form functions, these are important for transient responses, $X' = AX + F$ can be transformed to the form $X' = BX$.

Last, from comparisons with the 4-th order Runge-Kutta method, the advantages of our methods are given.

These methods are simple, accurate and effective; some examples are shown.

1. ま え が き

定数係数の線型常微分方程式で表わされる系の過渡応答は、Laplace 変換を用いたり、マトリクス表現にして固有値を求める方法等で計算できるが、数値解をこれらの方法で求めるのは必ずしも簡単ではない。しかし近年 Liou¹⁾ はマトリクス表現から直接 Transition Matrix e^{At} の数値解を求め過渡応答を計算する方法を示し、さらに Mastascusa²⁾ は e^{At} を Cayley-Hamilton の定理を用いてより簡明に計算する方法を示した。一方 Denman 他³⁾ は動的システムにも適用できる方法を初期解が解析的に求まる場合について検討している。

本文では、まず線型定常システムに強制入力がかわったときの過渡応答を、同次微分方程式の解と、強制入力による特殊解に分けて計算する。次に入力が特定の形の関数である場合は、同次微分方程式に変換できることを示し、この微分方程式を用いて計算する。そして、① 3., 4. で両者の比較を行い、② 3.3 で前者の方法で得られる特殊解の計算にも Cayley-Hamilton

の定理が適用できることを示す。さらに、③ Transition Matrix e^{At} を級数展開して計算するとき、打ち切り誤差と計算項数の関係を明らかにする。われわれの行なった計算結果からもこれらの方法の精度が非常によいことを示す。最後に Runge-Kutta 法との関連⁴⁾ を明らかにし、精度と計算量の2点について比較検討する。

2. 線型定常システムのマトリクス表現

強制入力 $f(t)$ をもつ線型定常システムは一般に n 階定数係数常微分方程式

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(t) \quad (1)$$

で表わされる。(1)は直接解くことができ、また Laplace 変換によって解を求めることもできる。しかし、いずれの場合も n 次代数方程式の根を求めなければならないが、このすべての根を精度よく求めることは一般に困難である。さらに前者では特殊解を求めること、後者では逆変換の操作等複雑である。これらをさけるため(1)を一階連立常微分方程式に変形し、これをベクトル・マトリクスを用いて表わすと

$$X'(t) = AX(t) + F(t) \quad (2)$$

となる。ここで

† Numerical Solutions of the Transient Response of Linear Time-Invariant Systems, by Noriyuki Inoue and Shunji Okugawa (Faculty of Science, Kyoto Sangyo University)

†† 京都産業大学理学部

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad (3) \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

である。(2)を初期値 $t=t_0$, $X(t)=X(t_0)$ で解き, $X(t_0+T)$ を求めると一階常微分方程式と全く同様に

$$X(t_0+T) = e^{AT}X(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+T} e^{A(t_0+T-\tau)}F(\tau)d\tau \quad (6)$$

を得る。この e^{AT} は Transition Matrix と呼ばれ, 本文では重要なマトリクスである。(6)の第1項は $X'(t)=AX(t)$ の解であり, 第2項は(2)の特殊解である。

次に $f(t)$ がある定数係数の線型常微分方程式の解になっているとき(1)は

$$X'(t) = BX(t) \quad (7)$$

と同次式に変換される。このとき $X(t)$ は(3)と次数が異なり, B は(5)と大きさおよび最終行が異なるがこの変換法は4.で述べる。(7)の(6)に対応する解は, (6)の特殊解がない場合と同じであるから,

$$X(t_0+T) = e^{BT}X(t_0) \quad (8)$$

と書ける。(6)または(8)で求めた $X(t_0+T)$ を $t=t_0+T$ における初期値として, 間隔 T で順次 $X(t)$ を求めることができる。

3. 一般解と特殊解に分ける方法

3.1 e^{AT} の計算

(1)の一般解を計算するには(6)よりマトリクス e^{AT} を計算すればよい。 e^{AT} は無限級数

$$e^{AT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(AT)^k}{k!} = E_N(AT) + R_N(AT) \quad (9)$$

に展開される。ただし, $A^0=I$: 単位マトリクスとし,

$$E_N(AT) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(AT)^k}{k!} \quad (10)$$

$$R_N(AT) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(AT)^k}{k!} \quad (11)$$

とする。 e^{AT} を $E_N(AT)$ で近似すると $R_N(AT)$ は打ち切り誤差であり, この評価は3.2で行う。 $E_N(AT)$ はマトリクス A の $(N-1)$ 次多項式であり Liou¹⁾は

直接多項式を計算したが, その後 Cayley-Hamilton の定理を用いて A の $(n-1)$ 次以下のマトリクスに重みをつけて加える方法を Mastascusa²⁾ が示した。本文ではこの方法を用い, さらに3.3でこの方法が特殊解の計算にも適用できることを示す。

マトリクス A の特性方程式は(5)より明らかに

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

である。 $f(A)$ が A の多項式るとき,

$$f(A) = q(A) \cdot p(A) + r(A) \quad (12)$$

とかける。ここで $q(A)$, $p(A)$ は A の多項式で, $r(A)$ は A の $(n-1)$ 次以下の多項式である。Cayley-Hamilton の定理「行列はその特性方程式を満足する」より, $p(A)=0$ 。従って(12)は

$$f(A) = r(A) \quad (13)$$

となる。 $r(A)$ を求めるため(12)の A を λ で置きかえたと(12)は, $f(\lambda) = q(\lambda) \cdot p(\lambda) + r(\lambda)$ となり, $r(\lambda)$ は $f(\lambda)$ を $p(\lambda)$ で割った余りで, λ の $(n-1)$ 次以下の多項式となる。この多項式の λ^i の係数を b_i とすると

$$r(\lambda) = b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_1\lambda + b_0 \quad (14)$$

となる。(13)(14)から $f(A)$ は

$$f(A) = r(A) = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1A + b_0I \quad (15)$$

となり, (10)より $E_N(AT)$ は A の $(N-1)$ 次多項式であるから(15)を用いて計算できる。

ここでマトリクス A を(5)の形に限ったとき, その性質を利用して計算回数を減らす方法を示す。任意の n 次マトリクス B の要素を b_{ij} , $B \times A$ の要素を c_{ij} とすると

$$c_{ij} = b_{ij-1} - b_{in} \cdot a_{i-1} \quad (16)$$

ただし $b_{i0}=0$, となり(15)の計算で A が任意のマトリクスのとき $(n-1)n^3$ 回の乗算を必要とするが, A を(5)の形に限り(16)を用いると $(n-1)n^2$ 回の乗算となる。

3.2 打ち切り誤差の評価

e^{AT} の打ち切り誤差を $\epsilon=10^{-k}$ 以内にするために, e^{AT} を級数展開したとき, 計算すべき項数 N の十分条件を求める。これには(11)の $R_N(AT)$ の要素を r_{ij} とすると,

$$\max_{i,j} |r_{ij}| < \epsilon$$

となるための N の十分条件を求めればよい。ここで A , $R_N(AT)$ のノルムを各々

$$a = \|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|, \quad \uparrow$$

$$r = \|R_N(AT)\| = \sum_{i,j}^n |r_{ij}| \quad (17)$$

とすると、 $\max_{i,j} |r_{ij}| \leq r$ であるから、 $r \leq \varepsilon$ となる N を求めると十分である。(11)の $R_N(AT)$ は(9)から明らかのように e^{AT} を Taylor 展開したときの剰余項である。剰余項は積分形を用いて

$$R_N(AT) = \frac{1}{(N-1)!} \int_0^T (T-\tau)^{N-1} \frac{d^N}{d\tau^N} e^{A\tau} d\tau$$

$$= \frac{A^N}{(N-1)!} \int_0^T (T-\tau)^{N-1} e^{A\tau} d\tau$$

と表わせる。これを(17)を用いてノルムで表わし積分すると $r \leq (AT)^N e^{AT} / N!$ となる。 $r \leq \varepsilon$ となる N を求めるには

$$(AT)^N e^{AT} / N! \leq \varepsilon \quad (18)$$

を計算すればよい。(18)に Stirling の公式を適用すると

$$(AT)^N e^{AT} / \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \leq \varepsilon$$

となる。ここで ε として $10^{-k} (k > 0)$ を用いると

$$N \geq AT e^{10^{k/N} e^{AT} / (2\pi N)^{1/2}} \quad (19)$$

を得る。 ε を与えると、(19)から N は計算機を使うなら容易に求めることができる。従って(10)をこの N まで計算すると、 e^{AT} との誤差を ε 以内にできる。

3.3 特殊解の計算

(6)式の第2項

$$V(AT) = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{A(t_0+\tau-t)} F(\tau) d\tau \quad (20)$$

を級数に展開し、 e^{AT} と全く同様の方法で計算できるように変換する。(20)を $\tau = t_0 + \tau$ と変数変換すると

$$V(AT) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} F(t_0 + \tau) d\tau \quad (21)$$

を得る。(21)で $F(t_0 + \tau)$ を t_0 を中心に Taylor 展開し、(21)に代入すると

$$V(AT) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} \left\{ F(t_0) + \tau F'(t_0) + \frac{\tau^2}{2!} F''(t_0) + \dots \right\} d\tau$$

となる。ここで再び $\tau = T - \tau$ と変数変換すると

$$V(AT) = \int_0^T e^{A\tau} \left\{ F(t_0) + (T-\tau)F'(t_0) + \frac{(T-\tau)^2}{2!} F''(t_0) + \dots \right\} d\tau \quad (22)$$

となる。(22)の { } 内は絶対収束するから項別積分

† ここで必要なノルムの条件は $|r_{ij}| \leq \|R_N(AT)\|$ だけであるから、この条件を満たせばどんなノルムでもよいが、 $\|A\|$ も同種のノルムでなければならない。

できる。各項を部分積分を用いて積分すると

$$V(AT) = A^{-1}(e^{AT} - I)F(t_0)$$

$$+ A^{-2}(e^{AT} - AT - I)F'(t_0)$$

$$+ A^{-3}(e^{AT} - (AT)^2/2! - AT - I)F''(t_0)$$

$$+ \dots$$

$$= \Phi_0(AT)F(t_0) + \Phi_1(AT)F'(t_0)$$

$$+ \Phi_2(AT)F''(t_0) + \dots \quad (23)$$

を得る。(23)も収束する。ここで

$$\Phi_0(AT) = A^{-1}(e^{AT} - I)$$

$$= IT + AT^2/2! + A^2T^3/3! + \dots,$$

$$\Phi_1(AT) = A^{-2}(e^{AT} - AT - I)$$

$$= IT^2/2! + AT^3/3! + A^2T^4/4! + \dots,$$

$$\Phi_2(AT) = A^{-3}(e^{AT} - (AT)^2/2! - AT - I)$$

$$= IT^3/3! + AT^4/4! + A^2T^5/5! + \dots,$$

$$\dots \quad (24)$$

である。なお(24)は文献3)で $A(t)$ を定数マトリクスとした場合の(12)(13)式と一致する。

(24)の $\Phi_i(AT)$ は有限項で打切れば A の多項式であるから(12)~(14)で示した Cayley-Hamilton の定理を用いる方法で e^{AT} と全く同様に計算できる。この $\Phi_i(AT)$ によって(23)を計算するとき、(4)より $F(t)$ は第 n 行以外は0のベクトルであるから、 $\Phi_i(AT)$ の第 n 列のみ必要である。従って(24)の計算も $\Phi_i(AT)$ の第 n 列のみ計算すれば十分である。特にこの方法では、 T を変えない限り e^{AT} 、 $\Phi_i(AT)$ は一度計算すればよいので計算量は大幅に減少する。

さらに、(24)は $\Phi_i(AT)$ の無限級数で収束するから、任意の精度まで計算でき $T \ll 1$ のとき i が大きくなると $\Phi_i(AT)$ は急速に小さくなるため、 $F(t)$ の高次導関数の影響も一般に少なくなる。 $F(t)$ が工学で広く使われるステップ入力やランプ入力の場合は $F'(t)$ あるいは $F''(t)$ 以上の高次導関数が0となるので $\Phi_0(AT)$ あるいは $\Phi_1(AT)$ まで計算すれば十分である。また $f(t)$ が任意の関数のときも工学上、階段関数や一次関数(折線)で近似することが多い(ランプ入力もクリップされた指数関数入力を直線で近似したものと考えられる)ので一般には $\Phi_i(AT)$ を初めの数項とれば十分と考えられる。しかし、階段関数や一次関数で近似したとき、 e^{AT} 、 $\Phi_i(AT)$ をいかに精度よく計算しても関数の近似による誤差を適当に評価する方法がない。この点が上述の方法の1つの欠点で

† A^{-1} が存在しない場合も次の(24)式の $\Phi_i(AT)$ の級数表現は正しい。即ち(22)の $e^{A\tau}$ を級数展開して部分積分すればよい。なお A^{-n} は A^{-1} の n 乗を表わす。

Table 1 Transition Matrix and Forced Response Matrices.

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} 0.9998839958 & 0.9957170749 \times 10^{-1} & 0.4525129708 \times 10^{-2} \\ -0.3393847281 \times 10^{-3} & 0.9874398891 & 0.8599631837 \times 10^{-1} \\ -0.6449723878 \times 10^{-1} & -0.2398837228 & 0.7294509340 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_0(AT) = \begin{bmatrix} 0.9999705615 \times 10^{-1} & 0.4989146430 \times 10^{-2} & 0.1546722409 \times 10^{-3} \\ -0.1160041807 \times 10^{-3} & 0.9957170749 \times 10^{-1} & 0.4525129708 \times 10^{-2} \\ -0.3393847281 \times 10^{-3} & -0.1256011088 \times 10^{-1} & 0.8599631837 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \text{ (注)}$$

$$\Phi_1(AT) = \begin{bmatrix} 0.4999940534 \times 10^{-2} & 0.1664476267 \times 10^{-3} & 0.3925128592 \times 10^{-3} \\ -0.2943846444 \times 10^{-3} & 0.4989146430 \times 10^{-2} & 0.1546722409 \times 10^{-3} \\ -0.1160041807 \times 10^{-3} & -0.4282925089 \times 10^{-3} & 0.4525129708 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

(注) $\Phi_0(AT)$, $\Phi_1(AT)$ は T の 14 乗の項まで計算してある。

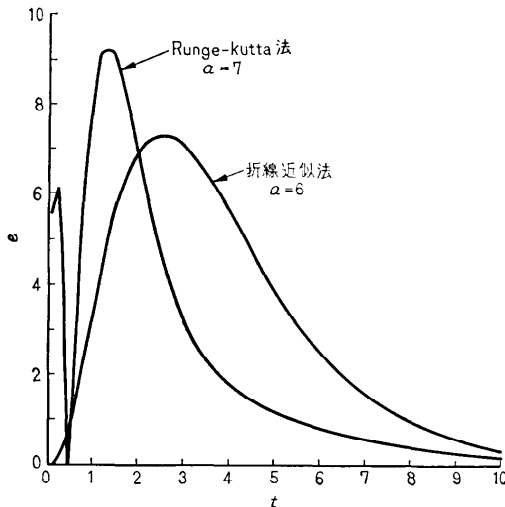


Fig. 1 Errors of Two Methods.

$$e = |\text{真値} - \text{計算値}| \times 10^4$$

ある。表 3 に指数関数入力を折線近似したときの計算例を、その誤差を図 1 に示す。次にステップ入力、ランプ入力をもつ系の例を示す。

例 1. $x''' + 3x'' + 2.75x' + 0.75x = f(t)$.

この系に於て $f(t) \equiv 0$ の場合の計算例を Liou¹⁾ が最初に示した。比較のためこの例を用いる。この例で A は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.75 & -2.75 & -3 \end{bmatrix}$$

まず、 $T=0.1$, $\epsilon=10^{-10}$ とすると、(19) から $N=14$ を得る。 e^{AT} , $\Phi_0(AT)$, $\Phi_1(AT)$ の計算結果を表 1 に示す。次に $f(t)$ が

- ①ステップ入力 $f(t)=0.75$
- ②ランプ入力 $f(t)=0.75t \quad (0 \leq t \leq 1)$
 $= 0.75 \quad (1 \leq t)$

で初期値を $t=0$, $x=x'=x''=0$ ととって表 1 の μ

Table 2 Numerical Solutions of Transient Response.

$x''' + 3x'' + 2.75x' + 0.75x = f(t)$ $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$				$x''' + 4x'' + 14x' + 20x = 20$ $x(0) = 0, x'(0) = 5$ $x''(0) = -10$			
$f(t) = 0.75$		$f(t) = 0.75t \quad 0 \leq t \leq 1$ $0.75 \quad 1 \leq t$		$x(0) = 0$		$x'(0) = 5$	
t	$x(t)$	誤差†	$x(t)$	誤差†	t	$x(t)$	誤差†
0.0	.0	0.0	.0	0.0	0.00	0.	0.0
0.1	.000116004	0.0	.000002944	0.1	0.10	0.448666988	0.0
0.2	.000861784	0.0	.000044396	0.1	0.20	0.791970111	0.0
0.3	.002702581	0.0	.000211964	0.1	0.30	1.031491211	0.1
0.4	.005956243	0.0	.000632138	0.0	0.40	1.175435519	0.1
0.5	.010823077	0.0	.001457088	0.0	0.50	1.237131851	0.2
0.6	.017410586	0.0	.002854189	0.0	0.51	1.239400993	0.2
0.7	.025753893	0.0	.004997793	0.0	0.52	1.241031217	0.2
0.8	.035832542	0.0	.008062858	0.1	0.53	1.242040630	0.2
0.9	.047584264	0.0	.012220104	0.1	*0.54	1.242447451	0.3
1.0	.060916184	0.0	.017632408	0.1	0.55	1.242270005	0.3
1.2	.091848839	0.0	.032775377	0.1	0.56	1.241526692	0.3
1.4	.127578552	0.0	.054059745	0.1	0.57	1.240235978	0.4
1.6	.166984708	0.0	.081242011	0.1	0.58	1.238416376	0.5
1.8	.208982173	0.1	.113595444	0.1	0.59	1.236086430	0.5
2.0	.252580458	0.1	.150163101	0.1	0.60	1.233264699	0.3
2.5	.363222859	0.2	.253377297	0.2	0.70	1.182060121	0.3
3.0	.468861728	0.2	.362363577	0.2	0.80	1.101608633	0.3
3.5	.564022801	0.4	.467097573	0.3	0.90	1.008460804	0.4
4.0	.646462314	0.4	.561891530	0.4	1.00	0.916579866	0.4
4.0	.715958436	0.5	.644299088	0.5	*1.41	0.724110155	1.0
5.0	.773405760	0.6	.713947539	0.6	2.00	0.943869585	0.2
5.5	.820215471	0.7	.771632081	0.6	*2.53	1.070553967	0.2
6.0	.857951641	0.7	.818703553	0.7	3.00	1.018039419	0.3
7.0	.912115958	0.8	.887098585	0.7	*3.55	0.972148424	0.8
8.0	.946053326	0.8	.930424529	0.7	4.00	0.989836861	0.1
9.0	.967041868	0.8	.957393121	0.7	*4.61	1.009386973	0.9
10.0	.979922052	0.7	.974007022	0.7	5.00	1.004336205	0.3

† 誤差は 誤差=(真値-計算値)×10⁹ で表わしている。

* は極大値・極小値を示す。

トリクスを使って応答を計算した結果を表 2 に示す。なお表 2 には

$$\textcircled{3} x''' + 4x'' + 14x' + 20x = 20$$

を $T=0.1$, $\epsilon=10^{-10}$, 初期値を $t=0$, $x=0$, $x'=5$, $x''=-10$ として計算した結果も示した。この例は解が振動する。このような場合、上述の方法は応答と同時にその微分係数がすべて求まるので、極大・極小値を

とる t が容易にわかり、また変曲点を知ることのできるので便利である。使用計算機は TOSBAC-3400 で浮動小数点計算の仮数部は 10 進で約 11 桁 (2 進 37 桁) である。

次に

$$X(t_0 + T) = e^{AT}X(t_0) + \Phi(AT)F(t_0) + \Phi_1(AT)F'(t_0) + \dots \quad (25)$$

によって間隔 T で順次 $X(t)$ を計算すると、マトリクスの打ち切り誤差と 1 ステップ進む毎に丸め(切捨て)の誤差が生じ、これらの誤差が累積すると考えなければならぬ。この誤差をある点 $t = nT$ で修正する方法を述べる¹⁾。(6)(25)から $X(t_0 + nT)$ は

$$X(t_0 + nT) = e^{A \cdot nT}X(t_0) + \Phi(A \cdot nT)F(t_0) + \Phi_1(A \cdot nT)F'(t_0) + \dots \quad (26)$$

となる。 $e^{A \cdot nT}$ 、 $\Phi_i(A \cdot nT)$ は T のかわりに nT として 3.1, 3.3 で述べた方法で任意の精度まで計算できる。 $f(t)$ が多項式するとき (26) が有限項で終るので直接 $X(t_0 + nT)$ が計算できる。しかし、 $f(t)$ が任意の関数のとき区間が広くなると $\Phi_i(A \cdot nT)$ は i が大きくなっても小さくなるとは限らないので (26) で i を大きくとっても精度よく計算できるとは限らない。従って $f(t)$ の t_0 における高次微分係数が急速に減少する場合にのみ (26) で有効に修正できる。修正できた場合は修正値 $X(t_0 + nT)$ を初期値として $X(t_0 + (n+1)T)$ を求めると nT 以前の累積誤差は除去できる。

例 1 の①②の計算例では上述の修正は行っていないが表 2 から 100 ステップ計算しても累積誤差はほとんど問題にならない。③では振動性をみるため極大値、極小値をとる附近のみで $T=0.01$ として誤差の累積を防いである。

4. 同次式に変換する方法

3.3 で (1) の特殊解の計算法を述べたがこの方法には、工学でよく使われる単純な入力関数 (例えば ae^{bt}) についても関数の近似と、累積誤差の修正の 2 点で弱点をもっている。即ち (25) が有限項で終らない。

本章では $f(t)$ に制限を加え、この欠点を除く方法を述べる。入力関数が

$$f(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + f_i(t)e^{\lambda_i t} \quad (27)$$

の形をしているとき (1) は同次式に変換できる。ここに $f_i(t)$ は t の r_i 次多項式、 λ_i は任意の複素数とし、 $m = (r_1+1) + (r_2+1) + \dots + (r_i+1)$ とする。(27) はある定数係数の m 次同次微分方程式の解となって

いる²⁾。この微分方程式の特性方程式は明らかに

$$(\rho - \lambda_1)^{r_1+1}(\rho - \lambda_2)^{r_2+1} \dots (\rho - \lambda_i)^{r_i+1} = 0 \quad (28)$$

であり、 ρ の m 次多項式である。(28) を特性方程式とする微分方程式は m 次で、 p を微分演算子とすると

$$M(p)x = 0 \quad (29)$$

とかける。(27) は (29) の 1 つの解であり、(29) の解は (27) の形以外にない。簡単のため (1) を (29) と同様の記法を使って $L(p)x = f(t)$ と表わすと (1) の解は、 $L(p)x = 0$ の解に $f(t)$ による特殊解を加えたものである。ところで $f(t)$ は (29) の解となっているので $(n+m)$ 次微分方程式

$$L(p)M(p)x = 0 \quad (30)$$

の解は (1) の一般解と特殊解を含み、(1) を満足するように積分定数を決めれば (1) の解以外を含まない。

(30) は一般に

$$x^{(n+m)}(t) + b_{n+m-1}x^{(n+m-1)}(t) + \dots + b_1x'(t) + b_0x(t) = 0$$

となるから (1) をマトリクス表現 (2) としたのと全く同様に、 $X'(t) = BX(t)$ と表現でき (7) の形に変形できた。ただし

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n+m-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{n+m-1} \end{bmatrix}$$

次に (30) の解が (1) の解となるように積分定数を求めるための初期値を求める。 $t=t_0$ における初期値 $x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)$ は与えられているので、これらを使って $x^{(n)}(t_0), \dots, x^{(n+m-1)}(t_0)$ が (1) を満足するように決めればよい。まず $x^{(n)}(t_0)$ は (1) で $t=t_0$ とおいて

$$x^{(n)}(t_0) = f(t_0) - a_{n-1}x^{(n-1)}(t_0) - \dots - a_1x'(t_0) - a_0x(t_0) \quad (31)$$

を得る。 $x^{(n+1)}(t_0)$ 以降も (1) を順次微分して $t=t_0$ とおくことにより

$$\left. \begin{aligned} x^{(n+1)}(t_0) &= f'(t_0) - a_{n-1}x^{(n)}(t_0) - \dots - a_1x''(t_0) - a_0x'(t_0) \\ x^{(n+2)}(t_0) &= f''(t_0) - a_{n+1}x^{(n+1)}(t_0) - \dots - a_1x'''(t_0) - a_0x''(t_0), \\ &\dots \\ x^{(n+m-1)}(t_0) &= f^{(n-1)}(t_0) - a_{n-1}x^{(n+m-2)}(t_0) - \dots - a_0x^{(m-1)}(t_0) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

となる。従って与えられた初期値と、(31)(32)で得られる初期値のもとで、(30)を解けば(1)の解を得る。即ち(1)の非同次微分方程式は同次微分方程式(30)に変換して計算できる。このようにすると3.1の方法で数値解が得られ、3.2の方法により誤差も正確に評価できる。次に例をあげる。

例 2. $x''' + 3x'' + 2.75x' + 0.75x = 0.75(1 - e^{-4t})$.

この場合 $f(t) = 0.75 - 0.75e^{-4t}$ で明らかに(27)の形である。この $f(t)$ を1つの解とする微分方程式の特性方程式は明らかに $\rho(\rho + 4) = 0$ であるから、対応する微分方程式は $M(\rho)x = (\rho^2 + 4\rho)x = 0$ である。従って $L(\rho) \cdot M\rho(x) = 0$ は

$$(\rho^3 + 3\rho^2 + 2.75\rho + 3)(\rho^2 + 4\rho)x = 0$$

となる。これを計算して微分方程式の形で書くと、

$$x^{(5)} + 7x^{(4)} + 14.75x''' + 11.75x'' + 3x' = 0$$

となる。この場合のマトリクス B は

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -11.75 & -14.75 & -7 \end{pmatrix}$$

である。次に初期値を $t=0$ で $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ ととって計算する。 $x'''(0)$ 、 $x^{(4)}(0)$ は(31)(32)より

$$x'''(0) = 0.75(1 - e^{-4 \cdot 0}) - 3x''(0) - 2.75x'(0)$$

$$= -0.5x(0) = 0,$$

$$x^{(4)}(0) = 3e^{-4 \cdot 0} - 3x'''(0) - 2.75x''(0)$$

$$= -0.75x'(0) = 3$$

となる。 $T=0.1$ 、 $\epsilon=10^{-10}$ として計算した結果を表3に示す。比較のため3.の方法で $f(t)$ を折線近似した計算結果も同時に示す。ただしこの場合は $0 \leq t \leq 1$ では $T=0.01$ 、 $1 \leq t$ では $T=0.1$ ととり、いずれの場合も ϵ は 10^{-10} である。この結果からも同次式にした方が非常に精度がよいことがわかる。

ここで3章の方法と4章の方法を比較する。3章の(25)式が有限項で終わらない場合は4章で述べた方法の方が精度、誤差の評価、累積誤差の修正等ではまさっているが次の欠点もある。まず $f(t)$ からマトリクス B や初期値の計算を要し、また B が大きくなる。次に3章の方法では T を変えない限りすべてのマトリクスは一度計算すればよかったが、4章の方法では $f(t)$ がある区間で変わる(例えば例1の②)場合、 T が同じでも B 及び e^{BT} を改めて計算しなければならない。

Table 3 Numerical Solutions of Transient Responses by Three Methods.

$$x''' + 3x'' + 2.75x' + 0.75x = 0.75(1 - e^{-4t})$$

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$$

t	同次式に変換する方法		4次 Runge-Kutta 法		折線近似法
	x(t)	誤差†	x(t)	x(t)	
0.0	.0	0.0	.0	.0	.0
0.1	.000010884	0.0	.0000113	.0000109	.0000109
0.2	.000152111	0.0	.0001526	.0001520	.0001520
0.3	.000674613	0.0	.0006750	.0006743	.0006743
0.4	.001873171	0.0	.0018733	.0018726	.0018726
0.5	.004028763	0.0	.0040287	.0040279	.0040279
0.6	.007378845	0.0	.0073785	.0073775	.0073775
0.7	.012104796	0.0	.0121043	.0121030	.0121030
0.8	.018329594	0.0	.0183289	.0183273	.0183273
0.9	.026121237	0.0	.0261205	.0261184	.0261184
1.0	.035499122	0.0	.0354983	.0354957	.0354957
1.2	.053893867	0.0	.0538930	.0538895	.0538895
1.4	.087985039	0.0	.0879841	.0879798	.0879798
1.6	.121928371	0.0	.1219275	.1219224	.1219224
1.8	.159734944	0.0	.1597342	.1597284	.1597284
2.0	.200390467	0.1	.2003898	.2003835	.2003835
2.5	.308410737	0.2	.3084103	.3084034	.3084034
3.0	.416356362	0.3	.4163560	.4163494	.4163494
3.5	.516597150	0.4	.5165966	.5165908	.5165908
4.0	.605289469	0.6	.6052900	.6052844	.6052844
4.5	.681193898	0.8	.6811937	.6811892	.6811892
5.0	.744632571	1.0	.7446325	.7446287	.7446287
5.5	.796747832	1.1	.7967477	.7967447	.7967447
6.0	.839011032	1.3	.8390189	.8390165	.8390165
7.0	.900066582	1.6	.9000665	.9000680	.9000680
8.0	.938523542	1.9	.9385235	.9385345	.9385345
9.0	.962406455	2.2	.9624034	.9624028	.9624028
10.0	.977079575	2.4	.9770796	.9770792	.9770792

† 誤差は 誤差 = (真値 - 計算値) × 10⁹ で表わしている。

$f(t)$ が(27)の形 (t の全区間で同じである必要はない) をしていると仮定しても過渡応答の計算に関しては十分と考えられるので以上の理由から、 $f(t)$ が比較的狭い区間で変わる(例えばノコギリ波や矩形波)の場合は3章の方法が有効で、広い区間でなめらかな関数の場合は4章の方法が有効と考える。

また過渡応答は Laplace 変換形

$$X(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (33)$$

で与えられることも多い。(33)に対応する微分方程式は

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = 0 \quad (34)$$

となり、初期条件は

$$\left. \begin{aligned} x(0^+) &= b_{n-1}, \\ x'(0^+) &= b_{n-2} - a_{n-1}x(0^+), \\ x''(0^+) &= b_{n-3} - a_{n-1}x'(0^+) - a_{n-2}x(0^+), \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} x^{(n-1)}(0^+) &= b_0 - a_{n-1}x^{(n-2)}(0^+) \\ &\quad - a_{n-2}x^{(n-3)}(0^+) - \dots - a_1x(0^+) \end{aligned} \right\}$$

であるから¹⁾、本章で述べた方法で計算できる。微分方程式で与えられた場合一度(33)の形に変換する必要はないが、3章及び4章の方法がうまく適用できないが、Laplace変換すれば(33)の形になるような $f(t)$ の場合は、一度この変換をした上で計算することも考えられる。

5. Runge-Kutta 法との関係

微分方程式の数値計算には4次のRunge-Kutta法(以下4次R-K法と略記し、3章4章で述べた方法をマトリクス法と呼ぶ)が広く用いられている。本章ではマトリクス法と4次R-K法との関係を明らかにする。 $t=t_0$, $X(t)=X(t_0)$ を初期値として $X(t_0+nT)$ を求め、これを $t=t_0+T$ における初期値として順次 $X(t_0+nT)$ を求めるのは、両方法とも同じである。(2)に4次R-K法の公式を適用すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= T\{A(X(t_0)+F(t_0))\}, \\ K_2 &= T\left\{A\left(X(t_0)+\frac{1}{2}K_1\right)+F\left\{t_0+\frac{1}{2}T\right\}\right\}, \\ K_3 &= T\left\{A\left(X(t_0)+\frac{1}{2}K_2\right)+F\left\{t_0+\frac{1}{2}T\right\}\right\}, \\ K_4 &= T\{A(X(t_0)+K_3)+F(t_0+T)\}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$X(t_0+T) = X(t_0) + \frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4). \quad (37)$$

まずわれわれの関心の深い(25)式が $(m+1)$ 項で終る場合(4章で同次式に変換できたときは $m=0$)について4次R-K法とマトリクス法を比較すると、次の点でマトリクス法が有効である。

① R-K法の精度は T の大きさに依る。このため精度をよくするには T を小さくとらなければならない。その結果計算ステップ数が増え累積誤差が問題となる。これに対しマトリクス法の精度は T に無関係である。

② 累積誤差が問題となるR-K法で、マトリクス法で述べた誤差の修正を途中で行なうことはできない。

③ マトリクス法では誤差を予め与えられた許容範囲内にできることを示したが、R-K法では T を小さくする以外に方法はなくまた適当な予測は困難である。

④ 1ステップ進むための計算回数†は A の大き

† 加算回数は乗算回数とほぼ同数となるが、乗算に対し加算は無視できるものとして以下計算回数は乗算のみとする。

さを n とするとR-K法では(36)より $4n^2$ 回必要であるが、マトリクス法では e^{AT} , $\Phi_0(AT)$, ..., $\Phi_m(AT)$ が求まっていると (n^2+mn) 回である。マトリクス e^{AT} , $\Phi_0(AT)$, ..., $\Phi_m(AT)$ は一度計算すればよく、また $\Phi_i(AT)$ は最終列のみ必要であるからベクトルとして扱えばよい。これらのことから、 m が $3n$ と同程度の場合でも①の理由よりこれらのマトリクス、ベクトルの計算を含めても計算総量はマトリクス法の方が少ない。しかも $m \geq 3n$ となることはほとんどないといってもよい。

例2を4次R-K法で $T=0.1$ として計算した結果を表3に示す。この例からはマトリクス法の方が非常に精度がよいことがわかる。しかしこの系は安定で $t \rightarrow \infty$ のとき $x(t) \rightarrow 1$ となる。従って計算法が特に不安定でない限り t が大きくなると $x(t)$ は1に近づき、むしろ誤差は小さくなる。この様子を図1に示す。しかし過渡応答の計算では $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ の値も必要ではあるが、立上がり(立下がり)の途中の値の方が重要である。一方計算回数はR-K法で $4n^2 \times$ ステップ数 $=4 \times 5^2 \times 100 = 10,000$ 回になるのに対し、マトリクス法では e^{AT} の計算に約230回、100ステップの計算に2,500回である。

次に同次式に変換できず、(25)が有限項で終らない場合について考える。

(36)を(37)に代入すると

$$\begin{aligned} X(t_0+T) &= \left[I + AT + \frac{1}{2!}(AT)^2 + \frac{1}{3!}(AT)^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4!}(AT)^4 \right] X(t_0) + \frac{1}{6} \left[I + AT \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(AT)^2 + \frac{1}{4}(AT)^3 \right] TF\left(t_0 + \frac{T}{2}\right) \\ &\quad + \frac{2}{3} \left[I + \frac{1}{2}AT + \frac{1}{8}(AT)^2 \right] TF(t_0) \\ &\quad \left. + \frac{1}{6}TF(t_0+T) \right] \quad (38) \end{aligned}$$

を得る⁴⁾。この第1項の〔〕内は e^{AT} を級数展開したときの最初の5項と一致する。また第2、第3項は $F(t)$ の性質から最後の列のみ計算すれば十分である。(38)はマトリクス法に非常に似ているのでマトリクス法の一つとみなし、これと4次R-K法と比較する。精度については、R-K法では1ステップ毎に(38)の代入を行なうので多少累積誤差が大きくなると

† 多項式の割算に $(N-n+1)n$ 回²⁾、マトリクスの乗算に(16)を用いると $(n-1)n^2$ 回の乗算が必要である。この例では $N=29$, $n=5$ である。

予想されるが大差はない。計算回数は1ステップにつき **R-K** 法では $4n^2$ 回、(38)では (n^2+2n) 回である。(38)では予めマトリクス、ベクトルを計算しておく必要があるが、計算ステップが多くなるとこの影響は小さくなり、計算総数は **R-K** 法より少なくなる。

ところで(38)を用いず(25)の無限級数を適当な項で打切った場合は(25)の打切り誤差を評価する方法がわかっていないので、**R-K** 法との比較は困難である。しかし $F(t_0)$ の t_0 における高次微分係数が急になる場合はマトリクス法が有効といえる。

最後に4次 **R-K** 法から導かれる(38)とマトリクス法の興味ある関係を示す。(38)に於て $F(t_0+T/2)$, $F(t_0+T)$ を $F(t_0)$ でおきかえて整理すると(38)の第2項以降は

$$\left[IT + AT^2 + \frac{1}{2!}A^2T^3 + \frac{1}{3!}A^3T^4 \right] F(t_0) \quad (39)$$

となる。この〔 〕内は $\Phi_0(AT)$ の最初の4項をとったものと一致する。 $F(t_0+T/2)$, $F(t_0+T)$ を $F(t_0)$ でおきかえることは $F(t)$ が $t_0 \leq t \leq t_0+T$ で一定値 $F(t_0)$ をとると仮定したことによる。この仮定のもとでさらに高次の **R-K** 法を用いると

$$\begin{aligned} X(t_0+T) = & \left[I + AT + \frac{1}{2!}(AT)^2 + \frac{1}{3!}(AT)^3 \right. \\ & + \dots \left. \right] X(t_0) + \left[IT + AT^2 + \frac{1}{2}AT^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{3!}A^2T^3 + \dots \right] F(t_0) \quad (40) \end{aligned}$$

を得、 e^{AT} の級数展開と $\Phi_0(AT)$ の任意の項まで一致する。これは、(25)の第一次近似 $X(t_0+T) = e^{AT} \times X(t_0) + \Phi_0(AT)F(t_0)$ をとったことになる。ここで $t_0 \leq t \leq t_0+T$ で一定値をとることは、この区間で $F(t)$ を階段関数で近似することに相当する。階段関数で近似するという立場から考えると、この区間で $F(t_0)$ とする必要はない。この近似を F_0 とすると、 F_0 は $F(t)$ が $t_0 \leq t \leq t_0+T$ の区間でとる値の範囲内であればよい。 F_0 として

$$F_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(t_0 + \beta_i T)$$

$$\text{ただし } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, 0 \leq \beta_i \leq 1 \quad (41)$$

ととる方が精度がよくなると考えられる。実際、例2を同次式に変換せず $\varepsilon = 10^{-10}$, $0 \leq t \leq 1$ で $T = 0.01$, $1 \leq t$ で $T = 0.1$ ととって(40)の $F(t_0)$ を(41)の F_0 でおきかえて計算してみた。その結果、(41)で $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$ ((25)の第1近似をとったもの), $\alpha_1 = 1$,

$\beta_1 = 1$ ととると小数以下3~4桁, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0.5$ 及び $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ では同じく5~6桁真値と一致することがわかった。これは必ずしも一般的ではないが、一般に(25)の第1近似をとるより(41)の F_0 を適当に決めた方が有効と考えられる。 α_i や β_i をどうとるのが適当かは $F(t)$ の性質による。また広い区間で固定するのは無理と思われる。

しかし、 $F(t)$ を適当な階段関数 F_0 で近似できれば、(40)の $F(t_0)$ をこの F_0 におきかえてかなり精度よく計算できると考える。

6. あとがき

本文で述べた方法の特徴は、①固有値や代数方程式の根を全く求めず、②任意の精度まで全く組織的に計算でき、③そのために必要な計算項数が予測できることである。また④精度が計算間隔 T に無関係となり、⑤ Runge-Kutta 法より少ない計算量で精度よく計算できる。

さらに応答 $x(t)$ と同時に、その微分係数がすべて求まるので $x(t)$ のピークや変曲点等を知るのに便利である。なおこの方法は定数係数の連立常微分方程式の数値解析にほとんど変更なく応用できる。

日頃ご指導いただく京都大学工学部萩原宏教授に感謝する。また、本研究に御援助下さった島倉房子氏に感謝する。

参考文献

- 1) M. L. Liou: A Novel Method of Evaluating Transient Response, Proc. IEEE, Vol. 54, No. 1, pp. 20~23 (Jan. 1966).
- 2) E. J. Mastascusa: A Method for Calculating e^{AT} Based on the Cayley-Hamilton Theorem, Proc. IEEE (letters), Vol. 57, No. 7, pp. 1328~1329 (July 1969).
- 3) E. D. Denman and E. J. McKay, Jr.: An Additional Contribution to "Numerical Solution of State Equations, Proc. IEEE (letters), Vol. 57, No. 12, pp. 2178~2179 (Dec. 1969).
- 4) E. J. Mastascusa: A Relation Between Liou's Method and Fourth-Order Runge-Kutta Method for Evaluating Transient Response, Proc. IEEE (letters), Vol. 57, No. 5, pp. 803~804 (May 1969).
- 5) ポントリャーギン著、木村俊房・千葉克裕訳: 常微分方程式, p. 62, 共立出版, 東京(1964).
(昭和47年4月3日受付)
(昭和47年8月4日再受付)