

経年劣化を考慮した 統計的遅延解析の一手法

築山 修治[†] 福井 正博^{††}

素子の微細化が進むに連れ、製造ばらつきが増大すると共に、負バイアス温度不安定性 (NBTI)、ホットキャリア注入、エレクトロマイグレーションなどに起因する経年劣化が問題となっている。このような経年劣化に依って、遅延故障が生じないようにするには、設計時に経年劣化に伴う遅延の増加量を見積もっておく必要があるが、その増加量を過大に見積もり過ぎるとタイミング設計が困難になる。そこで、増加量を最悪値ではなく、統計量として扱うことにすると、製造ばらつきを考慮した統計的遅延解析に組み込むことができ、過剰なマージンの発生を抑えることができる。また、出荷後に遅延故障を検出するためのフィールドテストを効率的に行うためには、クリティカルパスとなる可能性の高いパスを精度良く見出しておく必要があるが、製造ばらつきに依る遅延ばらつきと経年劣化に伴う遅延増加量のばらつきを同時に処理することができれば、テストすべきクリティカルパスの候補を適切に抽出することが可能となる。そこで、本文では、経年劣化に伴う遅延増加量を統計量として扱い、統計的遅延解析に組み込む手法を提案する。

An Algorithm for Statistical Timing Analysis Considering Long-Term Degradation

Shuji Tsukiyama[†] and Masahiro Fukui^{††}

The long-term degradation due to negative bias temperature instability (NBTI), hot carrier induced degradation, and/or electro-migration, becomes a problem in circuit design using nanometer process technologies, since it causes a delay fault in the field. In order to resolve the problem, we must estimate delay variation due to the long-term degradation in the design stage, but we must eliminate over estimation of the variation, so as to make the timing design easy. If we can treat the variation as a statistical value and take it into the statistical timing analysis, we can reduce over margin. Moreover, if we treat delay variations due to the process variability and long-term degradation together, we may be able to select an appropriate set of paths for which field testing are conducted to detect delay faults. Thus, in this paper, we propose a method to treat delay variation as a statistical value, and an algorithm for statistical timing analysis using this statistical value.

1. まえがき

素子の微細化が進むに連れ、負バイアス温度不安定性 (Negative Bias Temperature Instability: NBTI)、ホットキャリア注入 (hot carrier injection)、エレクトロマイグレーション (Electro Migration: EM) などに起因する経年劣化が問題となり、製造直後のテストでは正常と判断された回路が後に不良となる可能性が生じている[1,2]。特に、タイミング制約が厳しい高速回路において、このような問題が生じないようにするには、設計時に、経年劣化に依る遅延の変動を考慮してタイミング設計する必要があるが、そのような変動を正確に予測することは困難である。例えば、NBTIによるPMOSの閾値電圧の変化は、総オン時間およびそのときの温度に従って増大し[3]、回復現象もあるため[4]、使用環境や使用形態に依存する。

一方、微細化に伴って増大してきた製造ばらつきに対処するため、統計的静的遅延解析 (S-STA) が提案されている[5,6,7]。ここでは、遅延を統計量として扱うので、遅延ばらつきの平均や分散を、経年劣化に依る遅延の変動に応じて増加させるという手法が提案されている[8,9]。このように、製造ばらつきによる遅延変動と経年劣化による遅延増加量と同時に扱うと、5年後あるいは10年後にクリティカルパスになる可能性の高いパスを抽出することも可能となるため、フィールドテストの効率化を計ることも可能となる[10]。しかし、経年劣化による遅延増加量に関しては、ある程度最悪の場合も考慮しておく必要があるから、製造ばらつき要因の遅延ばらつきと全く同等に取り扱うことはできない。

そこで、本文では、S-STAに経年劣化の影響を取り入れるための新しい手法を提案する。この手法は、混合正規分布を用いたS-STA手法[6,7]のアイデアを拡張したものである。これを行うため、以下の仮定をおく。

- 仮定 1. 経年劣化による遅延の増加量 Δ は確率変数である。
- 仮定 2. Δ は下限値 λ から上限値 $\lambda+w$ の間 $[\lambda, \lambda+w]$ をばらつく。
- 仮定 3. λ と w は素子毎に異なる値かもしれないが、 Δ のばらつきは同じ説明変数 r_0 で表される。
- 仮定 4. r_0 は $0 \sim 1$ の値をとる確率変数で、そのPDFは線形に減少する。

ここで、仮定 3 は、論理ゲート A および B の遅延増加量 Δ_A および Δ_B の上限値がそれぞれ λ_A+w_A および λ_B+w_B のとき、あるチップにおいて、A の遅延が 5 年後に $\lambda_A+w_A/2$ だけ増加するならば、同じチップ上の他の論理ゲート B の遅延も $\lambda_B+w_B/2$ だけ増加することを意味する。これらの仮定をおく理由は下記である。

[†] 中央大学 理工学部 電気電子情報通信工学科
Dept. of Electrical, Electronic, and Communication Eng., Faculty of Science and Engineering, Chuo University
^{††} 立命館大学 理工学部 電子情報デザイン学科
Dept. of VLSI System Design, College of Science & Engineering, Ritsumeikan University

- (1) 設計時に将来の Δ の分布を推定することが困難であるならば、 Δ の最悪値を用いればよいが、その見積りが楽観的過ぎず、かつ過大でないようにしなければならない。そこで、 Δ の下限値 λ と上限値 $\lambda+w$ を与えることによって、この問題を解決する。すなわち、平均的な使用であれば λ より増加することはなく、最悪でも $\lambda+w$ より増加することがないという値を導入する。
- (2) ばらつき範囲の導入は、単に分散を増加させるという措置より、安全である。なぜなら、遅延 D の平均を $E[D]+E[\Delta]$ に増加させた際、分散も $V[D]+V[\Delta]$ に増加させると、 $E[D]+E[\Delta]-\sqrt{V[D]+V[\Delta]}$ のような遅延値も許してしまうからである。
- (3) $[\lambda, \lambda+w]$ 間のばらつきを線形と仮定し、どの素子も同じ(共通の説明変数 r_0 で表される)ばらつきをすると仮定すると、本文で示すように、効率的な演算法が構築できる。
- (4) S-STAでは、相関が小さければ小さいほど、クリティカル遅延の分散が小さくなるため、どの素子の Δ も同じばらつきをするという仮定を置くことにより、クリティカル遅延の増加量を楽観的に見積もる危険が無くなる。
- (5) さらに、この仮定により、異なる素子の Δ 間の相関は1となるため、決定困難な相関係数を入力する必要がない。

2. 遅延ばらつきと基本演算

標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数(PDF)を $\phi(x)$ 、その分布関数(CDF)を $\Phi(x)$ で表す。PDF $\phi(x)$ が n 個のPDF $\phi_h(x)$ の確率重み和 $\phi(x) = \sum_{h=1}^n P_h \cdot \phi_h(x)$ で表される分布を、 n 混合分布と呼ぶ。このとき、各確率 $0 \leq P_h \leq 1$ ($1 \leq h \leq n$)は混合比と呼ばれ、 $\sum_{h=1}^n P_h = 1$ を満たす。以下では、各分布はその平均の昇順に並べられているものとし、第 h 番目の分布を第 h 成分と呼ぶ。また、各成分が正規分布のとき、 n 混合分布は n 混合正規分布と言い、 n GMMと書く。

第 h 成分が $N(\mu_h, \sigma_h^2)$ であるような変数 x の n GMMの第 i 次のモーメント $E[x^i]$ は、第 h 成分の i 次のモーメントを $E_h[x^i]$ と書くと、次式で表せる。

$$E[x^i] = \sum_{h=1}^n P_h \cdot E_h[x^i] \quad (1)$$

また、他の変数 $y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ と x との共分散 $C[x, y]$ は、第 h 成分と y との相関係数を ρ_h とし、第 h 成分と y との共分散を $C_h[x, y]$ と書くと、次式で与えられる。

$$C[x, y] = \sum_{h=1}^n P_h \cdot \sigma_h \cdot \sigma_y \cdot \rho_{h1} = \sum_{h=1}^n P_h \cdot C_h[x, y] \quad (2)$$

上の仮定4より、説明変数 r_0 のPDF $g(r_0)$ を、

$$g(r_0) = \begin{cases} -2(r_0 - 1) & : 0 \leq r_0 \leq 1 \\ 0 & : r_0 < 0 \text{ or } 1 < r_0 \end{cases} \quad (3)$$

とし、経年劣化に伴い、 $[\lambda, \lambda+w]$ の範囲でばらつく Δ のPDFを次のように表す。

$$g_0(\Delta) = \frac{1}{w} \cdot g\left(\frac{\Delta - \lambda}{w}\right) \quad (4)$$

このとき、 r_0 の平均 $E[r_0]$ 、分散 $V[r_0]$ 、および2次のモーメント $E[r_0^2]$ はそれぞれ $1/3$ 、 $1/18$ 、および $1/6$ であり、 Δ のこれらはそれぞれ次式である。

$$E[\Delta] = \lambda + \frac{w}{3}, \quad V[\Delta] = \frac{w^2}{18}, \quad E[\Delta^2] = \lambda^2 + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot w + \frac{w^2}{6} \quad (5)$$

本文では、遅延 D の分布は以下の説明変数の線形結合で表されるものとする。

$$D = \mu_D + (\lambda_D + w_D \cdot r_0) + \sum_{c=1}^n s_c [D] \cdot r_c + s_x [D] \cdot x \quad (6)$$

ここで、 $\lambda_D + w_D \cdot r_0 = \Delta$ は経年劣化に伴う遅延増加量であり、他は製造ばらつきに起因するものである。製造ばらつきに起因するばらつきの平均は μ_D で、 n 個の互いに独立な共通説明変数 $r_c \sim N(0,1)$ ($1 \leq c \leq n$)と1個の局所説明変数 $x \sim N(0,1)$ で分布が表されるものとする。ここで、これらの変数は r_0 とは独立で、 r_c は他の遅延のばらつきの説明変数でもあるが、局所変量は他の遅延のばらつきと独立であるとする。このように表すと、 Δ 以外のばらつきは正規分布なるので、その遅延量を D_G と書く。従って、 D は $D = D_G + \Delta$ とも書け、 D_G のPDFは次式となる。ここで、 σ_G は正規分布の標準偏差である。

$$f_G(D_G) = \frac{1}{\sigma_G} \cdot \phi\left(\frac{D_G - \mu_D}{\sigma_G}\right), \quad \text{ここで、} \sigma_G^2 = s_x [D]^2 + \sum_{c=1}^n s_c [D]^2 \quad (7)$$

このように、 Δ 以外のばらつきを正規分布にしてしまうと、分布の表現能力が下がり、S-STAの精度が下がる。これを改善するため、我々は2GMMを用いて分布を表現するS-STA手法を提案したが[6,7]、本文で提案する手法を2GMMを用いた手法に拡張することは比較的容易であるので、ここではアイデアが理解しやすいよう、変数 r_0 以外は正規分布と仮定する。

遅延 D の平均および分散は、 $v_D = \mu_D + \lambda_D$ と書くと次式となる。これより、 $\Delta = \lambda_D + w_D \cdot r_0$ が加わることにより、 D_G の正規分布から、平均が $\lambda_D + w_D/3$ だけ増加し、分散が $w_D^2/18$ だけ増加することが分かる。

$$E[D] = \mu_D + \lambda_D + \frac{w_D}{3} = v_D + \frac{w_D}{3} \quad (8)$$

$$V[D] = V[D_G] + V[\Delta] = \sigma_G^2 + \frac{w_D^2}{18} \quad (9)$$

また、 D のPDFは次式となる。

$$f_D(D) = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(D - D_G) \cdot f_G(D_G) dD_G =$$

$$\frac{2 \cdot \sigma_G}{w_D^2} \cdot \left[\left\{ \phi\left(\frac{D - v_D - w_D}{\sigma_G}\right) - \phi\left(\frac{D - v_D}{\sigma_G}\right) \right\} + \left(\frac{D - v_D - w_D}{\sigma_G}\right) \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{D - v_D - w_D}{\sigma_G}\right) - \Phi\left(\frac{D - v_D}{\sigma_G}\right) \right\} \right] \quad (10)$$

この形状を調べるため、 $D = \sigma_G \cdot X + v_D$ なる変数変換を行い、 $K = w_D / \sigma_G$ とおくと、

$$f_X(X) = 2/K^2 \cdot \{[\phi(X-K) - \phi(X)] - (X-K) \cdot [\Phi(X) - \Phi(X-K)]\} \quad (11)$$

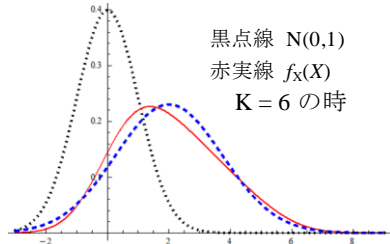


図 1. PDFの違い

を得る。図 1 に $K = 6$ のときの形状を赤線で示す。黒点線は $\sigma = 1$ の正規分布、青破線は赤線と同じ平均と分散を持つ正規分布である。 Δ の効果により、平均と分散が増加すると共に、正の歪度を持つようになったことが分かる。単に分散を増加させただけの正規分布では、 X の小さいところの頻度が増えた分、大きいところの頻度が減る。そのため、フィールドテスト用のパス選択 [10] に S-STA を利用する場合など、確率計算に誤差が生じる。

S-STA においてクリティカル遅延の分布を求めるには、2 つの遅延 D_A , D_B の和 $D_A + D_B$ の分布を求める演算と、これらの最大 $\text{Max}[D_A, D_B]$ を求める統計的 Max 演算が必要となる [5-7]。今、2 つの遅延 D_A , D_B が次式で与えられたとすると、

$$D_A = \mu_A + \lambda_A + w_A \cdot r_0 + \sum_{c=1}^n s_c [D_A] \cdot r_c + s_x [D_A] \cdot x_A \quad (12)$$

$$D_B = \mu_B + \lambda_B + w_B \cdot r_0 + \sum_{c=1}^n s_c [D_B] \cdot r_c + s_x [D_B] \cdot x_B \quad (13)$$

和の演算では $D_S = D_A + D_B$ を、Max の演算では $D_M = \text{Max}[D_A, D_B]$ を同様な形式で表現しなければならない。それができれば、3 個以上の遅延の和や Max は 2 つの和や Max の繰り返しで求められるから、後は、回路の接続関係を示すグラフを位相幾何学的順序で探索することにより、クリティカル遅延の分布を求めることができる。

和 $D_S = D_A + D_B$ を次式で表すことは比較的容易で、

$$D_S = \mu_S + \lambda_S + w_S \cdot r_0 + \sum_{c=1}^n s_c [D_S] \cdot r_c + s_x [D_S] \cdot x_S \quad (14)$$

次のように定めれば、平均に関して $E[D_S] = E[D_A] + E[D_B]$ が成り立つ。

$$\mu_S = \mu_A + \mu_B, \quad \lambda_S = \lambda_A + \lambda_B, \quad w_S = w_A + w_B \quad (15)$$

さらに、共通変量 r_c の感度および局所変量 x_S の感度を、それぞれ次式で定めると、

$$s_c [D_S] = s_c [D_A] + s_c [D_B] \quad (16)$$

$$s_x [D_S] = \sqrt{s_x [D_A]^2 + s_x [D_B]^2 + 2 \cdot s_x [D_A] \cdot s_x [D_B] \cdot R[x_A, x_B]} \quad (17)$$

分散に関しても、和の関係 $V[D_S] = V[D_A] + V[D_B] + 2 \cdot C[D_A, D_B]$ が成り立つ。ここで、 $R[x_A, x_B]$ は局所変量 x_A と x_B の相関係数であり、 $C[D_A, D_B]$ は D_A と D_B の共分散で、次式で計算できる。

$$C[D_A, D_B] = \frac{w_A \cdot w_B}{18} + s_x [D_A] \cdot s_x [D_B] \cdot R[x_A, x_B] + \sum_{c=1}^n s_c [D_A] \cdot s_c [D_B] \quad (18)$$

なお、S-STA において和の演算が必要となるとき、 x_A と x_B は独立であるが、本文で

は、常にこれらの相関を無視し、 $R[x_A, x_B] = 0$ と仮定しておく。

これに対して、Max 演算はそれほど容易ではない。非正規分布に対する統計的 Max を求めるには幾つかの手法があるが [11,12]、ここでは 2GMM を用いた手法 [6,7] を用いる。

3. 遅延分布の 2GMM 表現

まず、式(11) で表された PDF $f_X(X)$ を、混合比が P_1 および $1 - P_1$ であるような 2 つの成分 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ からなる 2GMM で表す。そのため、 $f_X(X)$ と 2GMM の 1 次から 5 次までのモーメントを一致させる。すなわち、次式が成り立つようにする。

$$P_1 \cdot \mu_1 + (1 - P_1) \cdot \mu_2 = \frac{K}{3}$$

$$P_1 \cdot (\sigma_1^2 + \mu_1^2) + (1 - P_1) \cdot (\sigma_2^2 + \mu_2^2) = \frac{K^2}{6} + 1$$

$$P_1 \cdot \mu_1 \cdot (\mu_1^2 + 3 \cdot \sigma_1^2) + (1 - P_1) \cdot \mu_2 \cdot (\mu_2^2 + 3 \cdot \sigma_2^2) = K \cdot \left(\frac{K^2}{10} + 1 \right)$$

$$P_1 \cdot (\mu_1^4 + 6 \cdot \mu_1^2 \cdot \sigma_1^2 + 3 \cdot \sigma_1^4) + (1 - P_1) \cdot (\mu_2^4 + 6 \cdot \mu_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 3 \cdot \sigma_2^4) = \frac{K^4}{15} + K^2 + 3$$

$$P_1 \cdot \mu_1 \cdot (\mu_1^4 + 10 \cdot \mu_1^2 \cdot \sigma_1^2 + 15 \cdot \sigma_1^4) + (1 - P_1) \cdot \mu_2 \cdot (\mu_2^4 + 10 \cdot \mu_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 15 \cdot \sigma_2^4) = K \cdot \left(\frac{K^4}{3.7} + K^2 + 5 \right)$$

これらは非線形方程式であるが、変数 $u = K \cdot \mu_1 / 3$ を導入して式を見やすくすると、解くことができ、5 つのモーメントを等しくする定数 $P_1 \cong 0.536350$ と $u \cong 0.469698$ が存在することが分かる。以下では、この定数 P_1 を θ_1 と書き、 $1 - \theta_1$ を θ_2 と書く。

$$\theta_1 \cong 0.536350, \quad \theta_2 = 1 - \theta_1 \cong 0.463650 \quad (19)$$

さらに、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2$ を以下のように定めると、

$$\varepsilon_1 = u/3 \cong 0.156566, \quad \varepsilon_2 = (1 - u \cdot \theta_1) / (3 \cdot \theta_1) \cong 0.537818 \quad (20)$$

$$\delta_1 \cong 0.00896764, \quad \delta_2 \cong 0.0314885 \quad (21)$$

$\mu_1 = \varepsilon_1 \cdot K$, $\mu_2 = \varepsilon_2 \cdot K$, $\sigma_1^2 = 1 + \delta_1 \cdot K^2$, $\sigma_2^2 = 1 + \delta_2 \cdot K^2$ は 5 つのモーメントを等しくする解である。 $K = 1$ および 6 のときの $f_X(X)$ と $f_{2G}(X)$ の誤差の最大はそれぞれおよそ 10^{-6} および 0.006 である。

これより、式(10) の PDF は、次の平均および分散を持つ 2GMM で表されることが分かる。以下では、これらをそれぞれ D の第 1 成分 $D1$, 第 2 成分 $D2$ と呼ぶ。

$$\mu_{D1} = v_D + \varepsilon_1 \cdot w_D, \quad \mu_{D2} = v_D + \varepsilon_2 \cdot w_D \quad (22)$$

$$\sigma_{D1}^2 = \sigma_G^2 + \delta_1 \cdot w_D^2, \quad \sigma_{D2}^2 = \sigma_G^2 + \delta_2 \cdot w_D^2 \quad (23)$$

ここで、混合比 θ_1 を持つ第 1 成分 $N(\mu_{D1}, \sigma_{D1}^2)$ は、平均が $E[D] = v_D + w_D / 3$ から約 $0.177 \cdot w_D$ だけ小さく、分散も $V[D]$ から約 $0.046 \cdot w_D^2$ だけ小さい。また、混合比 θ_2 を

持つ第2成分 $N(\mu_{D2}, \sigma_{D2})$ は、平均が $E[D]$ から約 $0.204 \cdot w_D$ だけ大きく、分散が $V[D]$ から約 $0.024 \cdot w_D^2$ だけ小さい。

Max 演算手法を構築するには、 $D_M = \text{Max}[D_A, D_B]$ の PDF を表す各説明変数の感度を求めなければならない。提案手法は、 D_A および D_B の分布を上で示した2つの成分に分割して計算するので、この分割に伴って $D_A = D_{GA} + \Delta_A$ 、 $D_B = D_{GB} + \Delta_B$ の経年劣化分 Δ_A 、 Δ_B と、正規分布の各共通変量分 $s_c[D_A] \cdot r_c$ 、 $s_c[D_B] \cdot r_c$ を分割する必要がある。

3.1 Δ の混合分布

遅延 D が $D = D_G + \Delta = D_G + \lambda_D + w_D \cdot r_0$ と表わされるとき、 D と r_0 の JPDF $f_{D0}(D, r_0)$ を求める。 D_G と r_0 は独立であるから、 D_G と r_0 の JPDF は、式(7)の PDF $f_G(D_G)$ および(4)の PDF $g(r_0)$ を用いて、 $f_{G0}(D_G, r_0) = f_G(D_G) \cdot g(r_0)$ と書ける。従って、変数変換を行い、 $f_{G0}(D, r_0) = f_{G0}(D - \lambda_D - w_D \cdot r_0, r_0)$ を計算すると、 $f_{D0}(D, r_0)$ は $0 \leq r_0 \leq 1$ の範囲で0でない値をとり、 $D = w_D \cdot Y + v_D$ なる変数変換を行い、 $H = \sigma_G / w_D = 1/K$ とおくと、次式となる事が分かる。

$$f_{Y0}(Y, r_0) = \frac{-2 \cdot (r_0 - 1)}{H} \cdot \phi\left(\frac{Y - r_0}{H}\right) \quad (24)$$

従って、ある r_0 では $N(r_0, H^2)$ の正規分布を $-2 \cdot (r_0 - 1)$ 倍したものになっているから、 Y と r_0 の JPDF は図2に示すように、 Y が大きくなるに連れ、正規分布の山が右にシフトしながら低くなる形をしている。図において、 $r_0 = Y$ の直線は $N(r_0, H^2)$ の山の平均の位置を示し、その左右の直線はこの山の $\mu \pm 2\sigma$ 点の位置を示す。

今、上で生成した D の各成分が JPDF を構成する2つの成分 $Y01$ および $Y02$ の周辺分布だとすると、 $Y01$ 、 $Y02$ の r_0 に関する周辺分布も異なった分布になると考えられる。

そこで、 r_0 に関するこれらの周辺分布も r_0 の PDF と同様線形に変化すると仮定し、 $D1$ の $\mu + 2\sigma$ 点以下 (すなわち $Y = \varepsilon_1 + 2 \cdot \sigma_{D1} / w_D$ 以下の範囲) に、 $N(r_0, H^2)$ の $\mu - 2\sigma$ 点以上 (すなわち $Y = r_0 - 2 \cdot H$ 以上) の範囲が含まれないような r_0 の値は、 $Y01$ の分布には含まれないとする。すなわち、 r_0 の第1分布の上限値 ψ_1 を、 $\varepsilon_1 + 2 \cdot \sigma_{D1} / w_D = \psi_1$

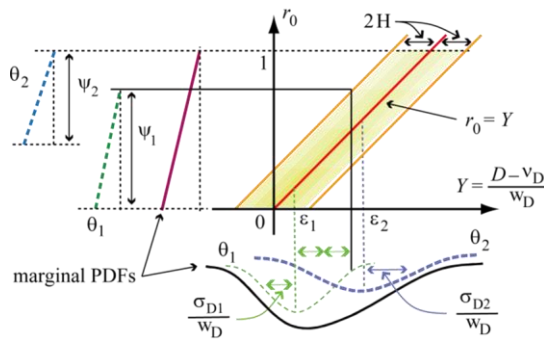


図2. JPDF $f_{Y0}(Y, r_0)$ の概略と周辺分布

$-2 \cdot H$ で計算すると、式(25)のように得られる。この値が1より大きいときには、 $\psi_1 = 1$ とする。なお、 ψ_1 が1より小さくなるのは、 $H = \sigma_G / w_D < 0.15$ のときである。

$$\psi_1 = \varepsilon_1 + 2 \cdot (H + \sqrt{\delta_1 + H^2}) \quad (25)$$

第2分布の幅 ψ_2 は、 r_0 の2つの成分から成る混合分布の平均が r_0 の平均 $1/3$ に等しくなるように決める。そうすると次式を得る。この値は $\psi_1 = 1$ のとき1になる。

$$\psi_2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot \theta_1 + \theta_1 \cdot \psi_1}{2 \cdot (1 - \theta_1)} \cong 0.4216 + 0.5784 \cdot \psi_1 \quad (26)$$

3.1 r_c の混合分布

次に、共通変量 r_n を例に、 D と r_n の JPDF $f_{Dr}(D, r_n)$ について考える。 r_n 以外の正規分布を変数 $D_{Gn} \sim N(\mu_{Gn}, \sigma_{Gn}^2)$ で表すと、 $D = D_{Gn} + s_n[D] \cdot r_n + \Delta$ と書け、 D_{Gn} 、 r_n 、 Δ は互いに独立であるから、これらの JPDF は $f_{Dr}(D, r_n, \Delta) = f_{Gn}(D_{Gn}) \cdot \phi(r_n) \cdot g_0(\Delta)$ と書ける。従って、JPDF $f_{Dr}(D, r_n)$ は、変数変換を行うことにより、次式となる。

$$f_{Dr}(D, r_n) = \frac{2 \cdot \sigma_{Gn} \cdot \phi(r_c)}{w_D^2} \cdot \left\{ \phi\left(\frac{D - v_D - s_n[D] \cdot r_n - w_D}{\sigma_{Gn}}\right) - \phi\left(\frac{D - v_D - s_n[D] \cdot r_n}{\sigma_{Gn}}\right) \right\} + \frac{2 \cdot \sigma_{Gn} \cdot \phi(r_c)}{w_D^2} \cdot \left(\frac{D - v_D - s_n[D] \cdot r_n - w_D}{\sigma_{Gn}}\right) \cdot \left\{ \phi\left(\frac{D - v_D - s_n[D] \cdot r_n - w_D}{\sigma_{Gn}}\right) - \phi\left(\frac{D - v_D - s_n[D] \cdot r_n}{\sigma_{Gn}}\right) \right\} \quad (27)$$

そこで、 $D = w_D \cdot Y + v_D$ なる変数変換を行い、 $H_n = \sigma_{Gn} / w_D$ 、 $s_w = s_n[D] / w_D$ とおくと、この JPDF は、 r_n が一定の場合、 $N(1/3 + s_w \cdot r_n, 1/18 + H_n^2)$ の分布に $\phi(r_n)$ が加わった分布になっており、このような分布が、 r_n の増大に伴って右にシフトしていくような形状に

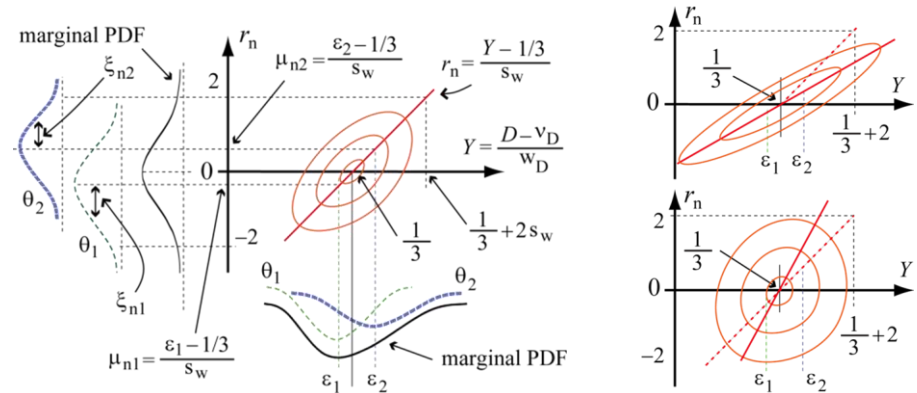


図3. JPDF $f_{Y0}(Y, r_0)$ の概略と周辺分布

なっていることが分かる (図3参照). 図3の楕円はJPDFの等高線を示しており, 斜めの直線は $f_{Y_r}(Y)$ の平均の位置を示している.

Y と r_n の相関係数 $R[Y, r_n]$ は D と r_n の相関係数 $R[D, r_n]$ に等しく, 次式となる.

$$R[Y, r_n] = R[D, r_n] = \frac{s_n[D]}{\sqrt{V[D_{Gn}] + s_n[D]^2 + V[A]}} = \frac{s_w}{\sqrt{1/18 + H_n^2 + s_w^2}} \quad (28)$$

これは, H_n が一定であれば s_w の増加に伴って1に近づく. すなわち, D の分散において, r_n の感度 $s_n[D]$ の比重が増すと $R[Y, r_n]$ は1に近づく. 従って, JPDF $f_{Y_r}(Y, r_n)$ の形状は, s_w の変化に伴って図3の右図のように変わるが, ある r_n での断面を $1/\phi(r_n)$ 倍すると, その分布の分散は全て同じである.

この図を参考に, $s_w \geq 1$ の場合には, r_n の標準正規分布を $N(\mu_{n1}, \xi_{n1}^2)$ および $N(\mu_{n2}, \xi_{n2}^2)$ の2つの成分に分割し, それぞれの混合比を θ_1 および θ_2 とする. ここで, μ_{n1}, μ_{n2} は次式である. これらの混合分布の平均が0になる.

$$\mu_{n1} = \frac{\varepsilon_1 - 1/3}{s_w}, \quad \mu_{n2} = \frac{\varepsilon_2 - 1/3}{s_w} \quad (29)$$

各成分の標準偏差 ξ_{n1}, ξ_{n2} は, 混合分布の2次と3次のモーメントが r_n のそれらに一致するように決めると, 次式を得る. $s_w \geq 1$ であればこれらは決定できる.

$$\xi_{n1}^2 = 1 - \frac{(u-1)^2 \cdot (1+\theta_2)}{3^3 \cdot \theta_2 \cdot s_w^2} \cong 1 - \frac{0.0380}{s_w^2}, \quad \xi_{n2}^2 = 1 - \frac{(u-1)^2 \cdot \theta_1 \cdot (1+\theta_2)}{3^3 \cdot \theta_2^2 \cdot s_w^2} \cong 1 - \frac{0.0345}{s_w^2} \quad (30)$$

一方, $s_w < 1$ の場合, 特に $s_w < 0.195$ になると, この式で ξ_{n1}, ξ_{n2} を決定できない. 上の図から分かるように, s_w が1より小さくなると, r_n の感度が小さくなり, D のばらつきに対する r_n の影響は小さくなる. そのため, D と r_n の相関係数は0に近づく. このような場合, D の第1成分に含まれる r_n の分布は, $s_w = 1$ の場合に D の第1成分に含まれる r_n の分布と同様と考えることにし, $s_w < 1$ の場合, $s_w = 1$ の場合の分割と同じ分割を行う.

4. Max演算

以下では, それぞれ式(12)および(13)で表されるような遅延 D_A および D_B が与えられたとき, $D_M = \text{Max}[D_A, D_B]$ を次式のように表す手法について考える.

$$D_M = \mu_M + \lambda_M + w_M \cdot r_0 + \sum_{c=1}^n s_c [D_M] \cdot r_c + s_x [D_M] \cdot x_M \quad (31)$$

このとき, D_A および D_B の分布はそれぞれ2GMMで近似されており, 各成分をそれぞれ A_j ($j=1,2$)成分および B_k ($k=1,2$)成分と書くと, A_j は $N(\mu_{Aj}, \sigma_{Aj}^2)$, B_k は $N(\mu_{Bk}, \sigma_{Bk}^2)$ である. また, 局所変量 x_A, x_B の相関を無視すると, 共分散 $C[D_A, D_B]$ は式(12), (13)から計算でき, これから D_A, D_B の相関係数 $R[D_A, D_B]$ も計算できる.

今, [6,7]と同様に, D_A および D_B のJPDFが4つの2変量同時正規分布 $A_j B_k$ ($j, k \in \{1,2\}$)の混合分布になっており, その混合比を $\theta_j \cdot \theta_k$ とする. また, 各分布 $A_j B_k$ における D_A, D_B の相関係数は, $A_j B_k$ が D_A, D_B の同時分布の一部をランダムに取り出したものなので, D_A, D_B 全体の相関係数 $R[D_A, D_B]$ に等しいとする. さらに, 各 $A_j B_k$ 分布において, $D_A \geq D_B$ なる領域に含まれる分布を $A_j B_{k1}$ 分布, $D_A < D_B$ なる領域に含まれる分布を $A_j B_{k2}$ 分布と書く. 図4にその概略を描く. ここで, 各楕円は分布 $A_j B_k$ の等高線を示す.

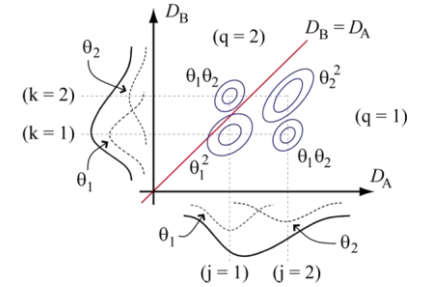


図4. D_A と D_B のJPDF

各 $A_j B_{k1}$ 分布において, $D_A \geq D_B$ である確率 P_{jk1} , $D_A = D_M$ の平均 $E_{jkq}[D_M]$, および2次のモーメント $E_{jkq}[D_M^2]$ が計算可能であり, また各 $A_j B_{k2}$ 分布において, $D_A < D_B$ である確率 P_{jk2} , $D_B = D_M$ の平均 $E_{jkq}[D_M]$, および2次のモーメント $E_{jkq}[D_M^2]$ を計算可能である[6,7]. 従って, D_M の分布を8GMMで表すことができ, D_M の平均 $E[D_M]$ および分散 $V[D_M]$ が次式で計算できる.

$$E[D_M] = \mu_M + \lambda_M + \frac{w_M}{3} = \sum_{j,k,q \in \{1,2\}} P_{jkq} \cdot E_{jk1}[D_M] \quad (31)$$

$$V[D_M] = s_x [D_M]^2 + \sum_{c=1}^n s_c [D_M]^2 + \frac{w_M^2}{18} = \sum_{j,k,q \in \{1,2\}} P_{jkq} \cdot E_{jkq}[D_M^2] - E[D_M]^2 \quad (32)$$

各説明変数(例えば r_c)の感度 $s_c[D_M]$ を計算するには, D_A, D_B, r_c のJPDFが必要となるが, これらのJPDFは複雑な式となるから, それから感度を計算するのは面倒である. そこで, 離散的な場合から近似手法を考える.

今, 製造した全チップを $A_j B_{kq}$ 分布のいずれかに分類できたとする. このとき, $A_j B_{k1}$ 分布における $\Delta_M = \lambda_M + w_M \cdot r_0$ の分布は, この分布に含まれるチップの D_A の値の中の $\Delta_A = \lambda_A + w_A \cdot r_0$ の値の分布に等しい. この分布を Δ_{Aj} と書くと, これは前節で求めた成分 A_j に付随した r_0 の成分から求められるので, Δ_{Aj} は, $j=1$ のとき $[\lambda_A, \lambda_A + w_A \cdot \psi_{A1}]$ の範囲を, $j=2$ のとき $[\lambda_A + (1 - \psi_{A2}) \cdot w_A, \lambda_A + w_A]$ の範囲をばらつくとする. 同様に, $A_j B_{k2}$ 分布における Δ_M の分布は, この分布に含まれるチップの D_B の値の中の $\Delta_B = \lambda_B + w_B \cdot r_0$ の値の分布に等しいので, この分布を Δ_{Bk} と書き, 前節で求めた成分 B_k に付随した r_0 の成分から, $k=1$ の場合 $[\lambda_B, \lambda_B + w_B \cdot \psi_{B1}]$, $k=2$ の場合 $[\lambda_B + (1 - \psi_{B2}) \cdot w_B, \lambda_B + w_B]$ の範囲をばらつく分布とする.

一方, $A_j B_{k1}$ 分布における $s_c[D_M] \cdot r_c$ の分布は, この分布に含まれるチップの D_A の中の $s_c[D_A] \cdot r_c$ の値の分布に等しいので, これを作る r_c の分布を $N(\mu_{cAj}, \xi_{cAj}^2)$ とする. ま

た、 $A_j B_k$ 2 分布における $s_c[D_M] \cdot r_c$ の分布は、 D_B の中の $s_c[D_B] \cdot r_c$ の値の分布に等しいので、これを作る r_c の分布を $N(\mu_{cBk}, \xi_{cBk}^2)$ とする。

こうすると、 $D_A \geq D_B$ であるときの Δ_M の分布は、 $A_j B_k$ 1 分布 ($j, k \in \{1, 2\}$) における Δ_{Aj} 分布の混合分布、 $D_A < D_B$ であるときの Δ_M の分布は、 $A_j B_k$ 2 分布 ($j, k \in \{1, 2\}$) における Δ_{Bk} 分布の混合分布となる。同様に、 $D_A \geq D_B$ であるときの r_c の分布は、 $A_j B_k$ 1 分布 ($j, k \in \{1, 2\}$) における $N(\mu_{cAj}, \xi_{cAj}^2)$ の混合分布、 $D_A < D_B$ であるときの r_c の分布は、 $A_j B_k$ 2 分布 ($j, k \in \{1, 2\}$) における $N(\mu_{cBk}, \xi_{cBk}^2)$ の混合分布となる。その混合比は、 A_j に関しては $P_{M1} \cdot \theta_j$ 、 B_k に関しては $P_{M2} \cdot \theta_k$ である。ここで、 P_{M1} および P_{M2} はそれぞれ $D_A \geq D_B$ および $D_A < D_B$ である確率である。

これらを用いて、 Δ_M の範囲 $[\lambda_M, \lambda_M + w_M]$ を次式で決定する。

$$\lambda_M = P_{M1} \cdot \{\lambda_A + \theta_2 \cdot (1 - \psi_{A2}) \cdot w_A\} + P_{M2} \cdot \{\lambda_B + \theta_2 \cdot (1 - \psi_{B2}) \cdot w_B\} \quad (33)$$

$$\lambda_M + w_M = \text{Max}[\lambda_A + w_A, \lambda_B + w_B] \quad (34)$$

また、 r_c の感度 $s_c[D_M] = C[D_M, r_c]$ は次式で計算する。

$$s_c[D_M] = C[D_M, r_c] = P_{M1} \cdot \sum_{j=1,2} \theta_j \cdot C_j[D_A, r_c] + P_{M2} \cdot \sum_{k=1,2} \theta_k \cdot C_k[D_B, r_c] \quad (35)$$

$$C_j[D_A, r_c] = R[D_A, r_c] \cdot \sigma_{Aj} \cdot \xi_{cAj}, \quad C_k[D_B, r_c] = R[D_B, r_c] \cdot \sigma_{Bk} \cdot \xi_{cBk} \quad (36)$$

最後に、局所変数 x_M の感度 $s_x[D_M]$ は式(32) から計算する。その際、もしも虚数になったならば、 $s_x[D_M] = 0$ とし、他の感度 s に次の係数 γ をかけて、感度と分散の間に矛盾が生じないようにする。

$$\gamma = s / \sqrt{\sum_{c=1}^n s_c[D_M]^2 - \frac{w_M^2}{18}} \quad (37)$$

5. むすび

本文では、統計的静的遅延解析に経年劣化の影響を取り込む新手法を提案した。この手法は、2GMM を用いて非正規分布 Max 演算を処理するもので、表参照と完結式の計算だけの処理しかないもので、効率的である。

紙面の都合で実験結果を記載できなかったが、図5に一部を示す。ここで、青および緑の破線は D_A 、 D_B を、赤実線が本手法で得られた D_M を、縦線の

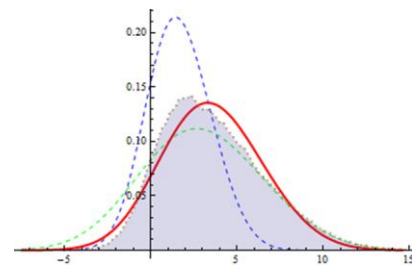


図5. $D_M = \text{Max}[D_A, D_B]$ の PDF

系列がモンテカルロシミュレーションで得られた結果である。標準偏差の誤差は 2.1%、平均の誤差は標準偏差の 4.0% である。これらの誤差は、分布を 2 混合分布で表すことにより、改善できるであろう。

本手法の 2 混合分布への拡張、誤差の解析、さらに、感度計算の高精度化などが残された課題である。

謝辞 モンテカルロシミュレーションを用いて実験データを収集してくれた中央大学大学院 電気電子情報通信工学専攻 修士 2 年生 渡辺恭平君に感謝の意を表す。本研究の一部は、平成 23 年度科学研究費補助金基盤研究(C) 21560364 および 23500071 の基に行われた。

参考文献

- 1) W-P. Wang, Z. Wei, S-Q. Yang, Y. Cao, "An efficient method to identify critical gates under circuit aging," Digest of ICCAD, pp.735-740, 2007.
- 2) M. Fukui, Y. Nagata, and S. Tsukiyama, "A power grid optimization algorithm considering timing degradation by NBTI," Proc. Int. SoC Design Conf., pp.34-344, 2011.
- 3) H. Singh and H. Mahmoodi, "Analysis of SRAM reliability under combined effect of NBTI, process and temperature variations in nano-scale CMOS," Proc. Future Tech, pp.21-23, 2010.
- 4) M. Alam, "A critical examination of the mechanics of dynamic NBTI for PMOSFETs," IEEE Int. Electron Device Meeting (IEDM 2003), p.345, 2003.
- 5) D. Blaauw, K. Chopra, A. Srivastava, L. Scheffer, "Statistical timing analysis: From basic principles to state of the art," IEEE Trans. CAD/ICAS, vol.27, no.4, pp.589-607, 2008.
- 6) S.Takahashi and S.Tsukiyama, "A new statistical timing analysis using Gaussian mixture models for delay and slew propagated together," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E92-A, no.3, pp.900-911, 2009.
- 7) S. Tsukiyama and M. Fukui, "A statistical maximum algorithm for Gaussian mixture models considering the cumulative distribution function curve," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E94-A, no.12, pp.2528-2536, 2011.
- 8) K. Kang, S-P. Park, K. Roy, and M.A. Alam, "Estimation of statistical variation in temporal NBTI degradation and its impact on lifetime circuit performance," Digest of ICCAD, pp.730-734, 2007.
- 9) B. Vaidyanathan, A.S. Oates, and Y. Xie, "Intrinsic NBTI-variability aware statistical pipeline performance assessment and tuning," Digest of ICCAD, pp.164-171, 2009.
- 10) A.H. Baba and S. Mitra, "Testing for transistor aging," IEEE Test Symp., pp.215-220, 2009.
- 11) L. Cheng, J-J. Xiong, L. He, "Non-linear statistical static timing analysis for non-Gaussian variation sources," Proc. DAC, pp.250-255, 2007.
- 12) N. Rubanov, "A general framework to perform the MAX/MIN operations in parameterized statistical timing analysis using information theoretic concepts," IEEE Trans. CAD/ICAS, vol.30, no.7, pp.1011-1019, 2011.