

導線にエルミート曲線によるセグメントを用いた接線曲面に関する研究

鈴木広隆[†]

筆者はこれまで、3DCG ツールと積層造形システムを用いた接線曲面による造形に取り組み、空間曲線を導線とした接線曲面による照明器具を提案してきた。しかし、導線として単一の関数を用いた場合、接線曲面の自由度には制約があり、可展面でありながら複雑な曲面にもなり得る接線曲面の利点を十分に生かすことができない。そこで本研究では、導線として連続するエルミート曲線を用い、より複雑な接線曲面をデザインすることを試みた。

Control Method of Tangent Surface making use of Hermite Curve as Segment Line.

Hiroataka SUZUKI[†]

Developable surface has advantageous points at manufacturing procedure and tangent surface has advantageous point since tangent surface has more possibilities in designing. We proposed new method to decide shape of the tangent surface making use of segment line. We adopted segment curves for directing line of tangent surface to secure possibilities of designing and adopt hermite curve as the segment curves to secure smooth connection between the segments. We proposed two kind of hermite curve for directing line of tangent surface. And advantageous points and disadvantageous points were discussed in this paper. Finally, we introduced an example of designing making use of proposed method.

1. はじめに

筆者はこれまで、3DCG ツールと積層造形システムを活用し、可展面である接線曲面を用いて造形することに取り組んできた。そして、つるまき線や楕円を応用した空間曲線を導線とした接線曲面による照明器具を提案してきた。しかし、導線として単一の関数を用いた場合、その導線から生成される接線曲面の自由度には制約があり、可展面でありながら複雑な曲面にもなり得る接線曲面の利点を十分に生かすことができない。導線を複数のセグメント曲線で構成すれば、接線曲面の自由度は飛躍的に大きくなるが、セグメント両端で隣接するセグメント曲線が連続し、かつ接線が同一でなければ、生成される接線曲面は接続しない。

そこで本研究では、導線としてエルミート曲線を用い、セグメント間の連続性と接線の連続性を確保し、より複雑な接線曲面をデザインすることを試みた。この上で、幾つかケーススタディを行った上で、接線曲面の導線としてエルミート曲線を用いる場合に留意すべき点と、今後の課題について明らかにした。以下、それらの取り組みについて報告する。

2. 接線曲面による造形

筆者らはこれまで、接線曲面による照明器具デザインに取り組んできた。図 1 左は、二重螺旋のつるまき線をベースとしたランプシェードであり、図 1 右が、その展開図(2つのシェードのうちの1つのもの)である。



図 1 接線曲面によるランプシェード(左)とその展開図(右)

[†] 大阪市立大学大学院工学研究科都市系専攻
Department of Urban Engineering, Graduate School of Engineering, Osaka City University

この接線曲面の 2 つの導線をパラメトリック曲線 $P_1(\theta) = \langle x_1(\theta), y_1(\theta), z_1(\theta) \rangle$ と $P_2(\theta) = \langle x_2(\theta), y_2(\theta), z_2(\theta) \rangle$ (ただし $0 \leq \theta \leq 3\pi$) とし、そして接線曲面の幅(導線上の接線である母線の長さ)を $W_1(\theta)$ 、 $W_2(\theta)$ とすると、これらは下記式で表される(以下、座標系は y 軸プラス側が上方となる左手座標系を用いる)。

$$\begin{aligned} x_1(\theta) &= r(\theta)\cos\theta \\ y_1(\theta) &= 0.7\theta^2 + 40\theta + 7 \\ z_1(\theta) &= r(\theta)\sin\theta \\ W_1(\theta) &= 150 + 75 \left(1 - \left(\frac{\theta - 1.5\pi}{3\pi} \right)^2 - 50\cos(5\theta) \right) \\ x_2(\theta) &= -r(\theta)\cos\theta \\ y_2(\theta) &= 0.7\theta^2 + 40\theta + 7 \\ z_2(\theta) &= -r(\theta)\sin\theta \\ W_2(\theta) &= 150 + 75 \left(1 - \left(\frac{\theta - 1.5\pi}{3\pi} \right)^2 - 50\cos(5(\theta + \pi)) \right) \end{aligned}$$

ただし、 $r(\theta) = 82 \left(1 - \frac{\theta}{3\pi} \right) - 200 \frac{\theta}{3\pi} \left(\frac{\theta}{3\pi} - 1 \right)$



図 2 積層造形システムにより実体化されたランプシェードシェード

この式において、 $r(\theta)$ は、つるまき線の半径に相当する関数を表しており、 $\theta = 3\pi$ の時に $r(3\pi) = 0$ となる θ の二次関数となっている。

このようにデザインされたランプシェードは、実際に積層造形システムを用いて導線部分に接線方向の穴を開けたフレームを造形し、シェードを支持する副フレームを骨組みとしてここにシェード部分を貼り合わせる(図 2 参照)[a]ことで、シェード部分を平面から構成することが可能であることが示された[1]。

また、図 3 は楕円をベースにした空間曲線を導線として用いた接線曲面による照明器具である。導線となるパラメトリック曲線を $P(\theta) = \langle x(\theta), y(\theta), z(\theta) \rangle$ (ただし $0 \leq \theta \leq 3\pi$)、母線の長さを $W(\theta)$ とした場合にこれらの関数は $\theta' = \theta/3$ 、 $a = 144$ 、 $b = 36$ として下記で表される。

$$\begin{aligned} x(\theta) &= a \cos\theta \cos\theta' - b \sin\theta \sin\theta' \\ y(\theta) &= -100 \sin\left(\frac{5}{9}\theta + \pi/6\right) \\ z(\theta) &= a \cos\theta \sin\theta' + b \sin\theta \cos\theta' \\ W(\theta) &= 120 \times \frac{5}{2\pi} \theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{2}{5}\pi \right) \\ W(\theta) &= 120 \left(\frac{2}{5}\pi \leq \theta \leq 3\pi - \frac{2}{5}\pi \right) \\ W(\theta) &= 120 \times \frac{5}{2\pi} (3\pi - \theta) \left(3\pi - \frac{2}{5}\pi \leq \theta \leq 3\pi \right) \end{aligned}$$

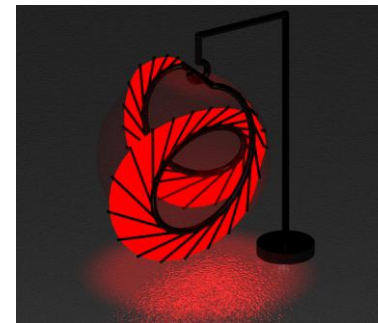


図 3 楕円をベースにした導線による接線曲面によりデザインされた照明器具

a) 図 2 に示したランプシェードは、本稿第 2 章で示した導線の式と母線長の式により規定される曲面を、積層造形システムによる造形の制約のために 80%の大きさにしたものである。

ただし、図3は上記曲線をz軸方向に90度回転したものである。本照明器具は、面光源として今後の活用が期待されている有機ELを用いた照明器具としてデザインされたものである。

このように、接線曲面は単純な錐面や柱面とは異なり、可展面でありながら複雑な曲面を構成することができる。しかし、この2例のように、導線を単一のパラメトリック曲線とした場合、曲面の構成には大きな制約が生じ、設計者が感覚的に曲面をコントロールすることが不可能となる。そこで、導線となる空間曲線を分割し、それぞれ別のパラメトリック曲線として表現されるセグメントをつなぎ合わせて1つの空間曲線とすることを試みることにした。しかしこの場合、各セグメントの両端は、隣接するセグメントとなめらかに接続されている必要がある。すなわち、隣接する2つのセグメントの接続する端部の座標は一致している必要があり、かつ接線も一致しなければならない。このような要求を満たす曲線としては、ベジエ曲線やエルミート曲線がよく知られている。

ベジエ曲線は、セグメント内を任意の個数の調整点で代表される曲線で表現するもので、両端の調整点がセグメント両端点となり、両端点以外の調整点は曲線は通過しない。これは、CGにおける自由曲線のモデリングなどによく用いられる手法である。

一方で、エルミート曲線は、両端点の位置ベクトルと方向ベクトルが与えられた場合に、内部の点の座標をこの4つのベクトルを元に内挿して連続的な曲線を得るものである。端点位置と端点における方向ベクトルが一致するようにこの曲線をつなげていけば、全体としてなめらかな曲線を得ることができる。この曲線は、CGアニメーションの制作などで、離散的に与えられるキーフレームの視点位置と視線ベクトルから、連続的な視点位置を表現する曲線を構築する場合などによく用いられる。

本研究の趣旨は、設計者が直感的に接線曲面をコントロールするためのインターフェースを提案することであり、あくまでも主体は曲面である。このため、最終的に生成される接線曲面の内部に含まれる方向ベクトルを意識しながらコントロールすることができるエルミート曲線のほうが有利であると考え、以降エルミート曲線を用いて接線曲面をコントロールすることとした。なお、特定の条件下では、ベジエ曲線とエルミート曲線は同一になることが知られている。

3. エルミート曲線による接線曲面のコントロール

3.1 重み関数に3次多項式を用いた場合のエルミート曲線

図4のように、セグメント内の曲線の両端の位置ベクトルを P_0 、 P_1 とし、それぞれの位置における曲線の接線方向ベクトルを V_0 、 V_1 とする。このセグメント内の曲線

を $P(t)$ (ただし、 $0 \leq t \leq 1$)とする時、 $P(t)$ の両端点が P_0 、 P_1 に一致し、かつ P_0 、 P_1 における接線方向ベクトルが V_0 、 V_1 に一致するためには、下記境界条件を満たす必要がある。

$$P(0) = P_0, P(1) = P_1, P'(0) = V_0, P'(1) = V_1$$

$$\text{ただし、} P'(t) = d/dt P(t)$$

ここで、 $P(t)$ を P_0 、 P_1 、 V_0 、 V_1 と重み関数 $H_i(t)$ (ただし $0 \leq i \leq 3$)を用いて次式のように表現することとする。

$$P(t) = H_0(t)P_0 + H_1(t)P_1 + H_2(t)V_0 + H_3(t)V_1$$

4つの重み関数 $H_i(t)$ (ただし $0 \leq i \leq 3$)それぞれに境界条件が4つあるため、 $H_i(t)$ を t の3次多項式とすれば与条件をすべて満たす $H_i(t)$ を求めることができ、 $P(t)$ を定めることができる。これが3次エルミート関数を用いたエルミート曲線に相当する。以下、境界条件より重み関数 $H_i(t)$ (ただし $0 \leq i \leq 3$)を求める。

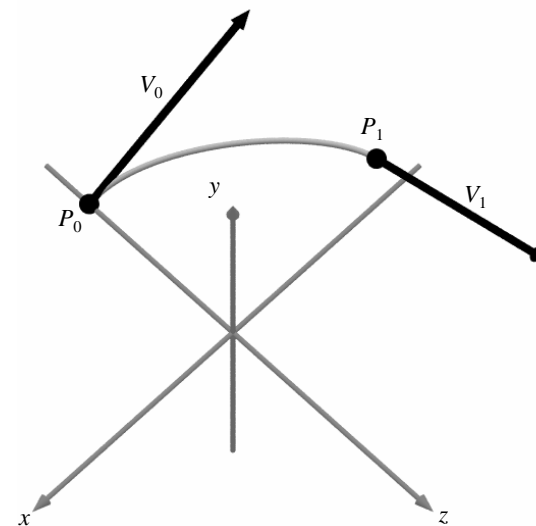


図4 重み関数に3次多項式を用いる場合のエルミート曲線とパラメータ

$$P(0) = P_0 \text{ より、 } H_0(0) = 1, H_1(0) = 0, H_2(0) = 0, H_3(0) = 0$$

$$P(1) = P_1 \text{ より、 } H_0(1) = 0, H_1(1) = 1, H_2(1) = 0, H_3(1) = 0$$

$$P'(0) = V_0 \text{ より、 } H_0'(0) = 0, H_1'(0) = 0, H_2'(0) = 1, H_3'(0) = 0$$

$$P'(1) = V_1 \text{ より、 } H_0'(1) = 0, H_1'(1) = 0, H_2'(1) = 0, H_3'(1) = 1$$

ここで、 $H_i(t) = a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d_i$ とし、与えられた条件を満たすように $a_i \sim d_i$ を定めると、 $H_i(t)$ は次の通りとなる。

$$H_0(t) = (t-1)^2(2t+1)$$

$$H_1(t) = t^2(3-2t)$$

$$H_2(t) = t(t-1)^2$$

$$H_3(t) = t^2(t-1)$$

図5に、このようにして求められた $P(t)$ と、その接線曲面のサンプルを示す。この例では、2つのセグメントにおける境界条件は下記のように設定している。

第1セグメント

$$P_0 = \langle 0, 0, -100 \rangle, V_0 = \langle -100, 50, 0 \rangle$$

$$P_1 = \langle -100, 50, 0 \rangle, V_1 = \langle 0, 50, 100 \rangle$$

第2セグメント

$$P_0 = \langle -100, 50, 0 \rangle, V_0 = \langle 0, 50, 100 \rangle$$

$$P_1 = \langle 0, 0, 100 \rangle, V_1 = \langle 100, -50, 0 \rangle$$

また、母線の長さは本来 $P(t)$ とは独立であるが、ここでは接線ベクトル $P'(t)$ の長さとも一致させている。このように表される曲線をセグメント内部に用いた場合、隣接するセグメントの端部で曲線の位置と接線の傾きを共有すれば、セグメントの連続として表現される曲線全体は1階導関数レベルで連続となり、セグメント間で滑らかに接続される。しかし、本研究の目的は、接線曲面の導線としての曲線の生成であり、セグメント端部で2階導関数が不連続な場合は、図5に示したように生成される接線曲面はセグメント間で滑らかに接続されない。しかし、接線曲面を造形に利用する限りにおいては、利用する材料の弾性を考慮すれば、この部分は実用的には滑らかに接続されると考えられる。

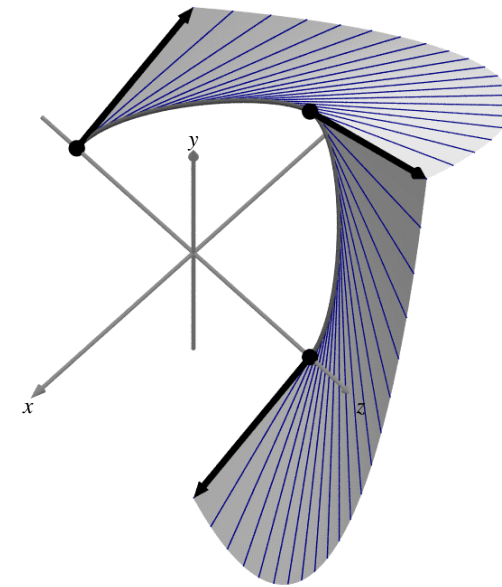


図5 重み関数に3次多項式を用いる場合のエルミート曲線と接線曲面のサンプル

3.2 重み関数に4次多項式を用いた場合のエルミート曲線

2階導関数レベルでの連続性についても検討を行った。前節の $P(t)$ の表現を基に、セグメント内の曲線の2階導関数ベクトル $D(t) = d^2/dt^2 P(t)$ の $t=0$ おける値である D_0 も組み込み、セグメント内の曲線を下記のように表現することとした。

$$P(t) = H_0(t)P_0 + H_1(t)P_1 + H_2(t)V_0 + H_3(t)V_1 + H_4(t)D_0$$

ここで、連続するセグメントにおいて、前のセグメントで計算される $D(1)$ の値を次のセグメントの D_0 とすれば、両セグメントの接続部において曲線は2階導関数レベルで連続となり、生成される接線曲面も連続となる。このため、 D_0 については、第1セグメントの開始時の値のみ与えることとなる。以下、境界条件より重み関数 $H_i(t)$ (ただし $0 \leq i \leq 4$) を求める。

$P(0) = P_0$ より、

$$H_0(0) = 1, H_1(0) = 0, H_2(0) = 0, H_3(0) = 0, H_4(0) = 0$$

$P(1) = P_1$ より、

$$H_0(1) = 0, H_1(1) = 1, H_2(1) = 0, H_3(1) = 0, H_4(1) = 0$$

$P'(0) = V_0$ より、

$$H_0'(0) = 0, H_1'(0) = 0, H_2'(0) = 1, H_3'(0) = 0, H_4'(0) = 0$$

$P'(1) = V_1$ より、

$$H_0'(1) = 0, H_1'(1) = 0, H_2'(1) = 0, H_3'(1) = 1, H_4'(1) = 0$$

$P''(0) = D_0$ より、

$$H_0''(0) = 0, H_1''(0) = 0, H_2''(0) = 0, H_3''(0) = 0, H_4''(0) = 1$$

となる。それぞれの重み関数 $H_i(t)$ (ただし $0 \leq i \leq 4$) ごとに境界条件が 5 つ存在するため、 $H_i(t)$ を t の 4 次多項式とすれば、すべての与条件を満たす $H_i(t)$ を求めることができる。

ここで、 $H_i(t) = a_i t^4 + b_i t^3 + c_i t^2 + d_i t + e_i$ とし、与えられた条件を満たすように $a_i \sim e_i$ を定めると、 $H_i(t)$ は下記の通りとなる。

$$H_0(t) = (t-1)^2(3t^2 + 2t + 1)$$

$$H_1(t) = t^3(4 - 3t)$$

$$H_2(t) = t(t-1)^2(2t + 1)$$

$$H_3(t) = t^3(t-1)$$

$$H_4(t) = \frac{1}{2}t^2(t-1)^2$$

図 6 に、 t ($0 \leq t \leq 1$) と上記の 5 つの重み関数 $H_i(t)$ (ただし $0 \leq i \leq 4$) の値の関係を示した。また、このような重み関数を用いた $P(t)$ により表されるセグメント曲線を用

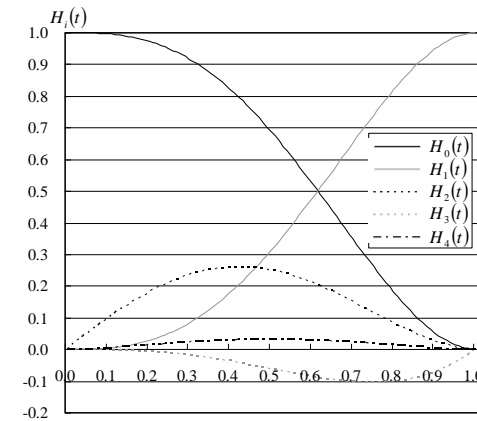


図 6 t の値と $H_i(t)$ の関係

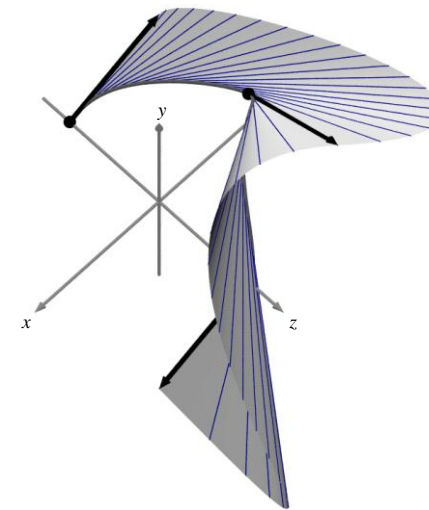


図 7 重み関数に 4 次多項式を用いる場合のエルミート曲線と接線曲面のサンプル
いた場合の接線曲面のサンプルを図 7 に示す。図 7 は、2 つのセグメントにおける $P(t)$
と $P'(t)$ の境界条件は図 5 の場合と同一としており、これに加え、2 階導関数の初期値

の条件として、第1セグメントにおいて $P''(0) = \langle 0, 0, 1 \rangle$ という条件を追加している。このように、図5の場合と異なり、セグメント間において曲面が滑らかに接続されることが分かる。しかし一方で、第2セグメントにおける曲線の変化が激しくなり、曲面も境界条件から直感的に想起される面よりも複雑な変化を見せている。これは、 $H_i''(t)$ における t の係数が非常に大きな値となるため(例えば、 $H_0''(t) = 36t^2 - 24t$)、図6に示したように D_0 の重みである $H_4(t)$ の影響は小さくても、 D_0 そのものが大きな値となり、曲線の形状に及ぼす影響が増大してしまうためと考えられる。このように、重み関数に4次多項式を用いる手法は、連続する曲面を生成することができるが、造形的には、境界条件から想定される範囲を超えた意外な結果を求める場合以外には利用が難しいと考えられる。

4. 利用例

重み関数を3次多項式とし、計8セグメントにおける境界条件を表1のように(9つの点の位置と接線ベクトルで表現)定めた場合の曲線を図8に、この曲線を導線とする接線曲面を図9に示す。ただし、接線曲面の母線の長さは本例では150で一定値としている。

また、重み関数を4次多項式とし、計2セグメントにおける境界条件を表2のように(3つの点の位置と接線ベクトル、及び第1セグメントにおける2階導関数初期値で表現)定めた場合の曲線を導線とする接線曲面を1つのユニットとし、これを回転対

表1 サンプルとなる曲線(重み関数は3次多項式)の境界条件

	位置ベクトル	接線ベクトル
第1点	$40 * \langle 1, -1, 0 \rangle$	$50 * \langle 0, 0.5, -1 \rangle$
第2点	$50 * \langle 0, -0.5, -1 \rangle$	$50 * \langle -1, 0.5, 0 \rangle$
第3点	$60 * \langle -1, 0, 0 \rangle$	$50 * \langle 0, 0.5, 1 \rangle$
第4点	$70 * \langle 0, 0.5, 1 \rangle$	$50 * \langle 1, 0.5, 0 \rangle$
第5点	$80 * \langle 1, 1, 0 \rangle$	$50 * \langle 0, 0, -1 \rangle$
第6点	$90 * \langle 0, 0.5, -1 \rangle$	$50 * \langle -1, -0.5, 0 \rangle$
第7点	$100 * \langle -1, 0, 0 \rangle$	$50 * \langle 0, -0.5, 1 \rangle$
第8点	$110 * \langle 0, -0.5, 1 \rangle$	$50 * \langle 1, -0.5, 0 \rangle$
第9点	$120 * \langle 1, -1, 0 \rangle$	$50 * \langle 0, 0, -1 \rangle$

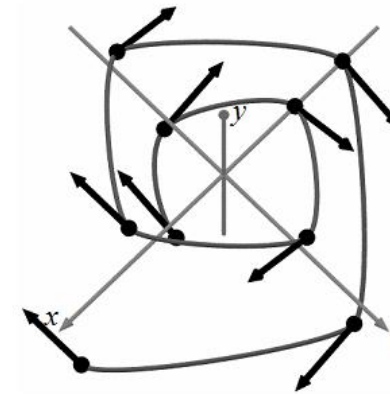


図8 複数のセグメントから成る曲線(重み関数は3次多項式)のサンプルとその境界条件

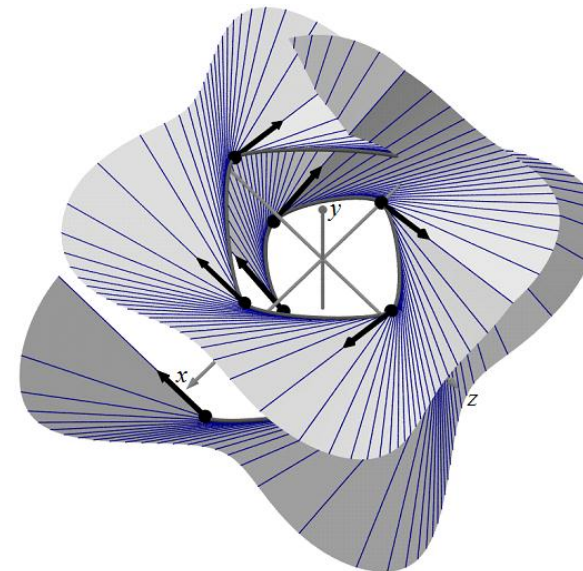


図9 図8に示した曲線を導線とする接線曲面

表 2 サンプルとなる曲線(重み関数は 4 次多項式)の境界条件

第 1 点位置	$70 \cdot \langle \cos(0), 0, \sin(0) \rangle$
第 1 点接線	$100 \cdot \langle 0, 1, 0 \rangle$
第 2 点位置	$\langle 80 \cdot \cos(\pi/4), 250, 80 \cdot \sin(\pi/4) \rangle$
第 2 点接線	$\langle 300 \cdot \cos(7/8\pi), 150, 300 \cdot \sin(7/8\pi) \rangle$
第 3 点位置	$\langle 120 \cdot \cos(\pi/2), 180, 120 \cdot \sin(\pi/2) \rangle$
第 3 点接線	$100 \cdot \langle 0, -1, 0 \rangle$
2 階導関数初期値	$\langle 1, 0, 0 \rangle$

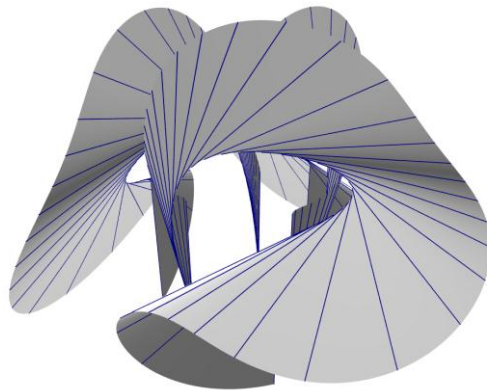


図 10 重み関数を 4 次多項式とした 2 セグメントから成る曲線による接線曲面を 3 ユニット配置したサンプル

称に 3 つ配置したものを図 10 に示す。本サンプルにおいては接線曲面の母線の長さは 180 で一定値としている。

5. まとめ

本稿では、単一の関数によるパラメトリック曲線を導線とした接線曲面の限界を指摘し、これを克服するため、セグメントにエルミート曲線を用いる手法を提案した。そして、境界条件から曲線を発生させる方法として、曲線を構成する重み関数に 3 次多項式を用いる場合と 4 次多項式を用いる場合を示し、3 次多項式を用いる場合は、境界条件から直感的に想起される曲面に近い形が出現するがセグメント間が滑らかに

接続しないこと、4 次多項式を用いる場合は、セグメント間は滑らかに接続するが、境界条件から直感的に想起される曲面よりも複雑な曲面が出現することなどを明らかにした。

今後は、境界条件をリアルタイムでグラフィカルに操作可能で同時に展開図が得られるモデラーの開発を行うと共に、セグメントを構成するパラメトリック曲線の関数の選択についても検討を続けたいと考えている。

参考文献

- 1) 鈴木広隆: ランプシェードデザインにおける接線曲面の活用, 日本図学会 2010 年度秋季大会講演論文集, pp.133-136(2010)