

有限要素法による構造解析のための自動データ作成法[†]

川面 恵 司^{††} 中村 正 人^{†††}
 荒木 裕 子^{††} 南 久 美 子^{†††}

Abstract

This paper Presents an automatic input data generation algorithm, which is composed of the generation methods of triangular elements, and boundary and load conditions, etc., for two-dimensional continuum with straight and arc surfaces.

Improvement is carried on the method of mesh generation. This improvement makes easy the distribution of variously sized elements and sure generation of reasonable elements. The automatic generation of boundary and load conditions minimizes manual intervention between the output of the automatic input data generation program and the input of the structural analysis programs.

Our program, AMGEN, has not only the functions of mesh generations, but also is implemented with automatic generation of the boundary and the load conditions. Examples are also given, which illustrate the validity of the algorithm and the faculty of AMGEN.

1. まえがき

有限要素法により、従来実際上解析が困難であった複雑な形状の構造体の応力および変形を求めることが可能となったが、一方、このために複雑な構造体の形状、境界条件、荷重条件などを電子計算機に認識させるために、多量のインプット・データを準備する必要が生じた。このデータの作成を人力で行なうとすれば長時間にわたって人に多大の労力を課すばかりでなくしばしば人はデータの作成ミスを犯すので所要の計算結果を得るまでに多くの日数を要する場合が多い。このことから、極力少ないデータを基にして、有限要素法による構造解析を行なうのに十分なデータを電子計算機によって自動的に作成するいわゆる「自動データ作成プログラム」を開発することが実用上極めて重要である。

この種の自動データ作成法の研究および実用化は各所で盛んに行なわれており、たとえば、2次元構造体に対する自動要素分割法について、J. L. Egeberg¹⁾、C. O. Fredrick^ら²⁾、栖原^ら³⁾などの研究が報告されている。Egebergの方法を含めほとんどの方法は、構造体をいくつかの部分に分割し、この部分ごとに要素分割を行なう方法であるが、部分間で共有する辺の分割を等しくしなければならぬため、要素分割の仕方がかなり制限される。Fredrickらの方法は、人力により構造体の内部および境界上に節点を作成し、この節点を基に、自動的に要素分割を行なわせる方法であるが、この場合には節点の作成を人力に頼るためかなりの労力を要する。栖原らの方法は、構造体をいくつかの部分に分割しその周辺上に人力で節点を与え、また、要素が局部的に細かくあるいは粗く分割できるように個々の部分ごとに平均分割長さを与え、これらのデータに基づき乱数を用いて各部分の内部に節点を作り、さらに要素を作るものである。この方法によれば任意の形状の構造体について、無理のない要素分割パターンを作成することができるが、実用性に問題があるように思われる。

ここで、筆者らは実用性に留意して、輪郭形状が円

[†] A Study on Two-Dimensional Automatic Mesh Generation for Structural Analysis by Use of Finite Element Method, by Keishi Kawano, Hiroko Araki (Central Research Laboratory, Mitsubishi Electric Corporation), Masahito Nakamura and Kumiko Minami (Information Processing Dep't, Mitsubishi Research Institute)

^{††} 三菱電機株式会社中央研究所

^{†††} 株式会社三菱総合研究所情報処理部

弧と直線とからなる2次元構造体について、有限要素法により構造解析を行なうのに必要なデータを作成する方法を検討し、プログラム化を試みたので、ここに報告する。

2. 自動データ作成法

2.1 自動データ作成法の条件

自動データ作成プログラムが具備していなければならない条件をつぎに列挙する。

- (1) 電子計算機による処理時間が短いこと。つまり、費用が安いこと。これは電子計算機を用いても人力で直接インプット・データを作成するのに較べはるかに高価であれば実用的であるといえないからである。
- (2) インプット・データが少量で、複雑でないこと。
- (3) 要素分割ばかりでなく、境界条件および荷重条件も自動的に作成し、これらのデータを構造解析プログラムへ、ほとんど人が介入することなしに容易に受け渡しできること。
- (4) 要素分割の粗密が容易に与えられること。有限要素法では応力集中部では要素分布が密にその他の部分では粗になるような要素パターンを作ることが重要であり、これが容易に行なわれること。
- (5) 複雑な構造体に対して適用できること。

2.2 自動データ作成法の概要

前述の条件を十分に満足させるために、対象とする構造体は輪郭形状が円弧と直線とからなる構造体限り、また、要素の自動分割ばかりでなく、境界条件および荷重条件の作成も自動的におこなえるようにした。対象構造体の外形を上記のように制限することにより、インプット・データを大幅に少量化することができる。しかも、実際の構造の多くは外形が円弧と直線とから構成されているので、この制限により、本方法の実用性はほとんど失なわれることはないであろう。

要素分割の粗密を容易に行なえる一方法として、要素の分布密度を定義する一つの単位としての要素の集まり（以後これを **PART** と呼ぶことにする。）を考え、対象構造体をこの **PART** 単位で分割し、要素分割はこの **PART** ごとに行なう方法が考えられる。文献 1), 3) の方法を含め多くの自動分割法では、この方法を採用しており、本方法でもこれを用いることに

した。ただし、文献 3) の方法を除きいずれの方法も相隣りあう **PART** が共有する辺に沿っての要素の密度分布を等しく（つまり、共有する辺の要素分割数が両 **PART** で等しい。）しなければならないという制限がある。このため、要素分布の密度を局部的に変えることに不自由さがあった。本方法ではこの共有する辺に沿っての要素分布を2つの **PART** で独立に設定できるように工夫し、この不自由さをとりのぞいた。

自動分割と同時に、境界条件および荷重条件を自動的に作成するという事は、文献 1) でもおこなっているが、インプット・データの与え方によっては、1つの節点に対して、2つ以上の境界条件が設定されてしまう場合がある。文献 1) はこの場合の処理が不十分であるが、本方法では同一節点に設定された境界条件の内容を分類し、1つの境界条件に設定しなおすとともに、インプット・データの矛盾をチェックできるようにした。

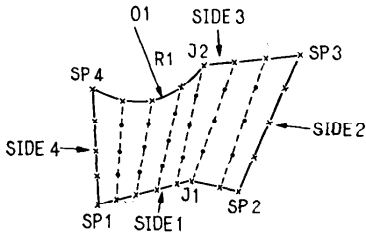
3. 自動要素分割のアルゴリズム

構造体の境界上および内部に節点を作成し番号づけを行ない、さらに、この節点を基に3角形要素を作成し番号づけする一連の処理を自動的に行なう作業を自動要素分割と呼ぶ。この具体的なプロセスは次のとおりである。

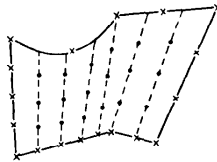
- (1) 構造体の全領域を幾つかの4辺形状の **PART** に分割し、各 **PART** を構成する主要な点の座標データ、ならびに各 **PART** の各辺に対して要素分割数を与える。
- (2) (1) で与えたインプット・データに基づいて、電算機が自動的に各 **PART** の結合状態調べ、構造体の形状を認識する。
- (3) 各 **PART** ごとに、インプット・データで指定した分割数に従って、電算機が自動的に **PART** を分割し、その境界上および内部に節点を作り、節点番号を付す。
- (4) さらに、この節点に基づいて、自動的に各 **PART** ごとに小さな4辺形状の部分を作り、さらに、これから3角形要素を作成し番号を付す。

3.1 PART の定義

図 3.1(a) に示すように、各 **PART** ごとに4つの辺（以後これを **SIDE** と呼ぶ）を定義し、各 **SIDE** の始点 ($SP1 \sim SP4$) の座標、形状変化点 ($J1, J2, \dots$) の座標、**SIDE** のすべてあるいはその一部が円弧の場合には曲率半径 ($R1, \dots$)、曲率中心 ($O1, \dots$) の座



(a) 相手のPARTのSIDE分割数が等しいか,多い場合



× : SIDE上の節点
○ : PART内部の節点

(b) 相手のPARTのSIDE分割数が少ない場合

図 3.1 節点の作成

Fig. 3.1 Node generation

標,ならびに各 SIDE の要素分割数をインプット・データで与える.

3.2 PART 結合状態の認識

電算機はインプット・データに基づき,各 PART の各 SIDE について,これの両端の2点(これは PART の相隣る2つの始点である)の座標が他の PART の SIDE の両端の始点の座標と一致しているかどうか調べ,また同時に,その SIDE に形状変化点があれば,その一致性についても調べて,各 PART の結合状態を認識する.

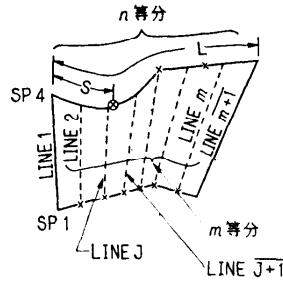
3.3 節点の作成

節点の作成は各 PART ごとに,まず(1)SIDE上の節点の作成,ついで,(2)この節点に基づいて PART 内部の節点を作成する過程よりなる.

3.3.1 SIDE 上の節点

各 SIDE は図 3.1 に示すようにインプット・データで指定した分割数に等分し,この等分した点をもって境界上の節点とする.

本方法ではある SIDE が他の PART の SIDE と接しているとき,両者の SIDE 分割数が等しくない場合がおこるので,次のように処理することにする.すなわち,相手の SIDE の分割数がこの SIDE の分割数に等しいか,あるいは多い場合には指定どおりの



○ : 注目している節点
× : SIDE 1あるいはSIDE 3上の節点

図 3.2 節点の分類

Fig. 3.2 Node grouping

分割数によって,相手の SIDE の分割数が少ない場合には相手の SIDE の分割数によって,この SIDE 上に節点を作ることにする.図 3.1 にはこの境界上の節点を×印で示してある.

3.3.2 PART 内部の節点

PART 内部の節点は SIDE 1 上の節点とこれに相对应する SIDE 3 上の節点(この節点は相手の SIDE の分割数に関係なくインプット・データで指示した分割数により作成した節点)を直線で結合して得られる線分を SIDE 2, 4 の指定した分割数で等分割することにより得られる.この節点を図 3.1 に●印で示してある.

3.3.3 節点の番号づけ

次に述べる前処理により節点の番号づけ,および後述の要素の作成・番号づけを効率よく行なえるようにする.

図 3.2 に示すように, SIDE 2, SIDE 4 および内部の節点を作成するために利用した線分を LINE と呼び,この LINE を SIDE 4 側から SIDE 2 側に向け順序をつけ,PART 内のすべての節点をこの LINE 内に含める.図 3.1(a) の場合はすべての節点を容易に LINE 上に含めることができるが,図 3.1(b) の場合は次の操作を行なう.いま,図 3.2 に示すように,この PART の SIDE 1, 3 の指定分割数が m で, SIDE 1 あるいは SIDE 3 が実際には n で分割されており, SIDE 1 あるいは SIDE 3 の長さを L , SIDE 1 の始点 SP 1 あるいは SIDE 4 の始点 SP 4 から SIDE 1 あるいは SIDE 3 上の任意の節点までの SIDE に沿って測った長さを S とする.このとき S の値が次式

$$\frac{L}{m} \times J \leq S < \frac{L}{m} \times (J+1) \quad (3.1)$$

を満足すれば、この節点は **LINE J** にあるとする。

節点の番号づけは **LINE 1** から順次、**SIDE 1** 側から、**SIDE 3** 側にむけて行なう。上述の番号づけと並行して各 **PART** について、各 **LINE** ごとに **LINE** 上の節点番号を格納したテーブルを作成する。

3.3.4 要素の作成

要素の作成は近接した4つの節点を選び4辺形を作る過程と、この4辺形を2つに分離して2つの3角形要素を作る過程とからなる。

(1) 過程 1

注目している節点 C_i を含む **LINE** とその次の **LINE** を選び、先のテーブルを用いて、この相隣る2つの **LINE** 内の節点から C_i に最も近い3節点を選んで4辺形を作る。この C_i もこのテーブルを用いて順次選び出すことができる。 C_i に対して2つの節点しか選べないことがあるが、この場合には直接3角形を作る。

(2) 過程 2

4辺形を3角形に分割する方法として、偏平状の3角形の生成を避けるために、4辺形の2つの対角線の長さを比較し、短い対角線について3角形を作成するいわゆる「対角線法」が一般に用いられているが、この方法は必ずしも万能でなく、本方法では次に述べる方法(以後これを「面積法」と呼ぶ)と「対角線法」と併用している。

「面積法」は分割される2つの3角線の面積比に關する後述の関係式を用いて、面積がほぼ等しくなるように分割する方法である。3角形の面積は図3.3に示すように4つの頂点を反時計方向に採番した4辺形□1234から任意に番号順に選んだ3頂点からなる3角形△ijkの面積として次式により定義する。

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

いま、図3.3に示すように□1234を△123と△134および△124と△234とに分割したとする。A1, A2, A3, A4をこの4つの3角形の面積とすると $A1 \geq A2$, $A3 \geq A4$ であれば、面積比は次式

$$1 \geq \frac{A2}{A1} > k \geq \frac{A4}{A3} > 0, \quad (3.3)$$

† 有限要素法では演算精度の観点から極端な鋭角をもつような偏平状の3角形要素を作らないようにする必要がある。

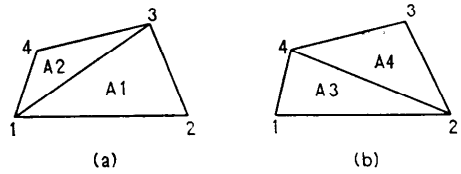


図 3.3 4 辺形の 3 角形要素分割

Fig. 3.3 Division of quadrilateral into triangular elements

表 3.1 3 角形要素分割例

Table 3.1 Examples of triangular element division

例	4 辺形	対角線法	本方法 (面積法+対角線法)	分割結果
1				<ul style="list-style-type: none"> 対角線法: △124と△234に分割 本方法: 式(3.4)により△124と△234に分割
2				<ul style="list-style-type: none"> 対角線法: △123と△134に分割 本方法: 式(3.3)により△124と△234に分割
3				<ul style="list-style-type: none"> 対角線法: △123と△143に分割 本方法: 面積法では△143が成立しないので、式(3.4)により△124と△234に分割
4				<ul style="list-style-type: none"> 対角線法: △123と△234に分割 本方法: 式(3.5)が成立するので対角線法により△124と△234に分割

$$1 \geq \frac{A4}{A3} > k \geq \frac{A2}{A1} > 0, \quad (3.4)$$

$$1 \geq \frac{A2}{A1} > k, \text{ および } 1 \geq \frac{A4}{A3} > k \quad (3.5)$$

のいずれかを満足する。A1とA2およびA3とA4の大小関係が逆の場合には上式中の面積比はこれの逆数を用いる。ここで、kは1より小さな正の実数で、この値は適当に選定する。

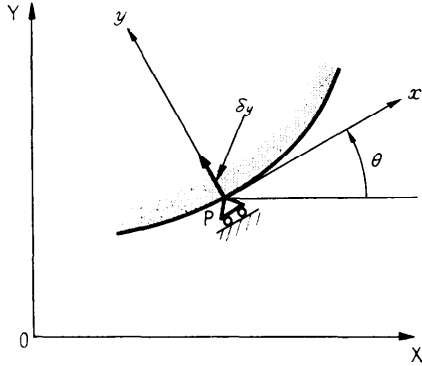
「面積法」は式(3.3)を満足する場合に図3.3(a)の分割を、式(3.4)を満足する場合に図3.3(b)の分割を行なうように判定するが、式(3.5)を満足する場合には「面積法」で判定しないで、「対角線法」を用いて判定する。

本方法による分割例を「対角線法」と対比して表3に示す。表より本方法が「対角線法」に較べ、すぐれていることがわかる。とくに例題3のように凹状の4辺形に対して「対角線法」は誤った要素分割を行なうことがある。

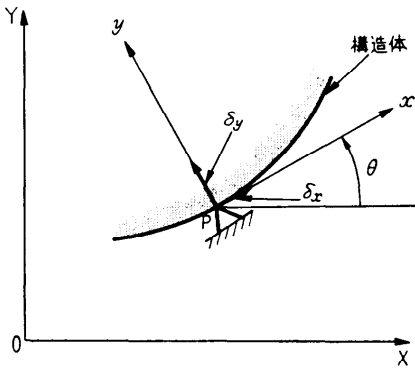
4. 境界条件のアルゴリズム

4.1 境界条件の種類

境界条件あるいは強制変位 (Permanent set; 変位量



(a) ローラ支持



(b) ピン支持

図 4.1 支持条件の種類

Fig. 4.1 Kinds of support condition

を指定する場合) を構造体の境界上、あるいは内部の 1 点に対して与える場合 (以後これを点境界条件と呼ぶ) と、連続的に与える場合 (これを連続境界条件と呼ぶ) について、境界条件を規定できるようにした。

点境界条件ではインプット・データの座標値に最も近い節点を選び出し、この節点に対して、また連続境界条件ではインプット・データを指定した 2 つの点の座標値に最も近い位置にある 2 つの節点を選び出し、この 2 節点を直線で結んだ線分上の節点に対して、境界条件あるいは強制変位量を与える。強制変位量を与えられる場合には、両端の変位量を与えることにより、上記線分上の変位量は変位分布が線形に変化するとして内挿法により求める。

4.2 支持条件の種類

点境界条件あるいは連続境界条件で選び出された節点はインプット・データの指示に従いローラ支持、ピン支持のいずれかの境界条件が設定される。ここでは図 4.1 に示すようにローラ支持は x 方向の移動に対して自由であるが、 y 方向の移動を拘束し、ピン支持は x, y 方向の移動を拘束するという通常の意味以外にローラ支持は y 方向の強制変位 δy 、ピン支持は x, y 方向の初期変位量 $\delta x, \delta y$ を規定することもできる。ここで $O-XY$ は基準座標系、 $P-xy$ は境界条件のための局所座標系である。

4.3 境界条件が重なる場合の処理

上記の手法により境界条件を設定する際、同一節点に対して 2 個以上の境界条件が与えられる場合があるが、2 個ずつ処理して、1 個の境界条件に変換し、これを繰返して最終的には 1 個の境界条件に設定しなおす。

2 個の境界条件の組合せとして、(i) 両者ともローラ支持、(ii) 一方がローラ支持、他方がピン支持、

表 4.1 境界条件の変換

Table 4.1 Transformation of boundary condition.

境界条件の組合せ	両境界条件の局所座標系の関係	変換された境界条件			
		支持の種類	x_i 方向の初期変位量	y_i 方向の初期変位量	条 件 式
両者ともローラ支持	2 つの座標系が一致している。あるいは互いに 180° 傾いている。 上記以外の場合	ローラ支持	自 由	δy_i	$\delta y_i = \delta y_j \cos(\theta_j - \theta_i)$
		ピン支持	$-\delta y_j \sin(\theta_j - \theta_i)$	δy_i	
一方がローラ支持、 他方がピン支持	すべての場合	ピン支持	δx_i	δy_i	$\delta x_i = -\delta y_j \sin(\theta_j - \theta_i)$ $\delta y_i = \delta y_j \sin(\theta_j - \theta_i)$
両者がピン支持の場合	すべての場合	ピン支持	δx_i	δy_i	$\delta x_i = \delta x_j \cos(\theta_j - \theta_i)$ $-\delta y_j \sin(\theta_j - \theta_i)$ $\delta y_i = \delta x_j \cos(\theta_j - \theta_i)$ $+\delta y_j \sin(\theta_j - \theta_i)$

(iii) 両者ともピン支持の場合が考えられる。いま、2個の境界条件を第 i 番目、第 j 番目とし、これらの強制変位量を $\delta x_i, \delta y_i$, および $\delta x_j, \delta y_j$, 局所座標系の傾き角を、それぞれ θ_i, θ_j とする。具体的には、第 j 番目の境界条件を第 i 番目の局所座標系に変換し、これと第 i 番目の境界条件とを組合せて新しい境界条件を生成する方式をとっている。上記境界条件の組合せに対して変換された境界条件は表 4.1 に示すとおりである。表中の条件式とは、第 j 番目の強制変位量を i 番目の局所座標系に変換した値と第 i 番目の強制変位量との比較式であって、上式を満足しないことは両境界条件式の設定値に矛盾があることを意味し、プログラムでは上式を境界条件のインプット・データのチェックに利用している。

5. 荷重条件のアルゴリズム

5.1 集中荷重条件

インプット・データの座標値に最も近い節点を選び出し、この節点に集中荷重を与える。

5.2 分布荷重条件

インプット・データで指示した2つの点の座標値と分布荷重値を与えて、これらの点に最も近い位置にある2つの節点を選び、この2節点を結ぶ線分上の節点に対して等価節点荷重を与える。

また、インプット・データで円弧の両端の座標、半径、中心の座標、分布荷重値などを指定し、指定した円弧上の節点を選び出し、これに等価節点力を与える。ここで、分布荷重値より等価節点力を求める方法は文献(4)によった。

6. プログラムの適用

以上の方法に基いて、自動データ作成プログラム **AMGEN** を開発した。本方法の実用性を確かめるために **AMGEN** により、(1) データの作成率、(2) 処理時間、(3) 要素分割状況、(4) 境界条件、荷重条件の設定状況などについて試験計算を実施した。ここで、データの作成率は **AMGEN** のインプット・データのカード枚数とアウトプット・データ(構造解析プログラムのインプット・データ)のカード枚数の比である。電算機は **IBM 370/165**, プロッタは **CALCOMP 763/780 PLOTTER**, 磁気テープ装置は **IBM 3420-003** を用いた。試験結果を表 6.1 に示す。本プログラムによりデータ量が約5倍～約20倍程度生成され、また処理時間は約10 sec～約30 sec であって、構造解

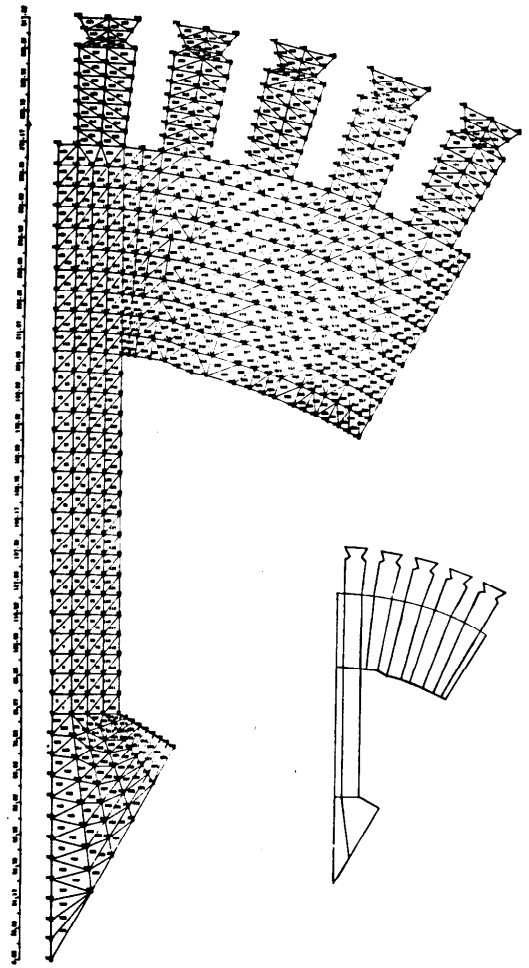


図 6.1 回転電気機器の回転子(要素図)

Fig. 6.1 Rotor of rotating electric machine (Element map)

析のための演算時間に比べ、各計算例題においていづれも同程度、ないしはそれ以下であった。したがって、本プログラムを使用することによってデータ作成作業を大幅に軽減できるばかりでなく、データ作成費用は比較的安価におさえることができる。

図 6.1, 図 6.2 にはそれぞれ回転電気機器の回転子の部分および压力容器の部分のプロッタ図を示す。付図は **PART** 分割図である。

これらの図より明らかなように、特に要素分割状況に不適当な箇所は認められず、本プログラムを正しく使用すれば、適切な自動要素分割が行なえる。

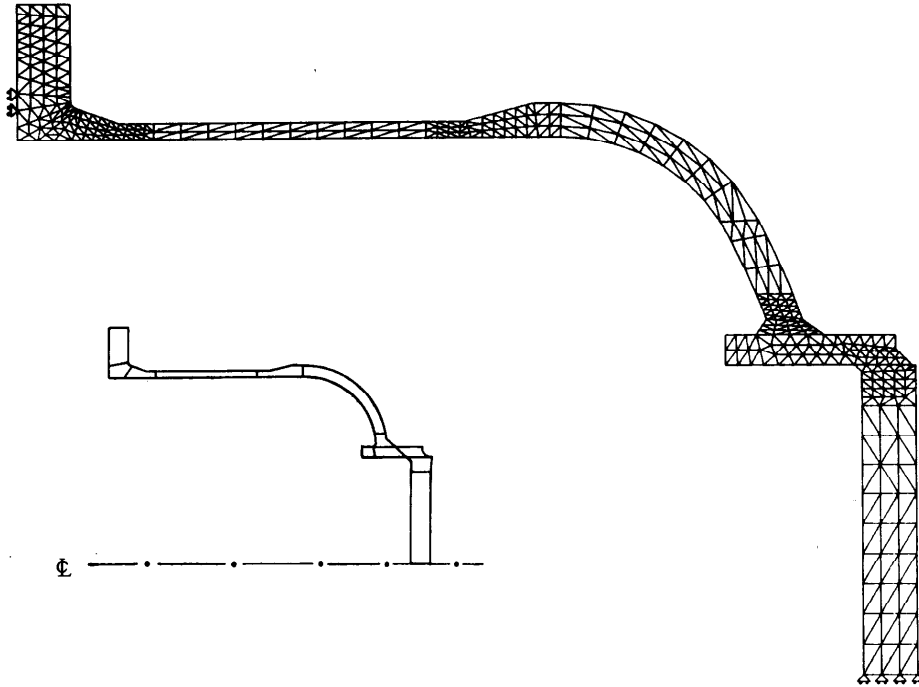


図 6.2 圧力容器 (境界条件図)

Fig. 6.2 Pressure vessel (Boundary condition map)

表 6.1 試算結果
Table 6.1 Test run.

試算 算例	節点 総数	要素 総数	データ作成率 (アウトプット) ↑ インプット	プロッタ図		処理時 間↑↑↑ (sec)	プロッタ 稼働時間 (min)
				図数↑↑	サイズ (cm)		
1	417	718	12.5	3	75	29	39
2	426	694	18.2	3	75	27	39
3	298	528	18.5	4	75	24	38
4	186	316	9.8	4	30	11	16
5	187	311	14.9	4	75	16	26
6	340	505	6.2	3	75	19	27
7	340	594	6.4	3	75	23	34
8	167	282	12.1	3	75	13	23

↑ カード枚数比
 ↑↑ 図数3は節点図, 要素図, 境界条件図
 図数4は節点図, 要素図, 境界条件図, 荷重条件図
 ↑↑↑ 節点, 要素, 境界条件, 荷重条件の作成時間, ならびにプロッタのためのデータ処理時間

7. むすび

以上, 有限要素法による構造解析のための一自動インプット・データ作成法について述べるとともに, これに基づいて作成したプログラム **AMGEN** の試算結果を紹介した. 本プログラムにより, 人が行なうの

と同程度の自動分割が行なえるばかりでなく, かなりの労力の軽減をはかることができた.

参考文献

- 1) J.L. Egeberg: MESHGEN-A Computer Code for Automatic Finite Element Mesh Generation, United States Atomic Energy Commission の依頼研究, Contract, No. AT-(29-1)-789 (1969).
- 2) C.O. Frederick, et al.: Two-Dimensional Automatic Mesh Generation For Structural Analysis, Int. Jr. of Numerical Methods in Eng., Vol. 2, (1970), pp. 133~144.
- 3) 柄原二郎他: 有限要素法における精度を考慮した自動分割について, 日本鋼構造協会第5回大会研究集会, マトリックス構造解析法研究発表論文集 (1971), pp. 70~79.
- 4) O.C. Zienkiewicz & Y.K. Cheung, The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, London (1967).

(昭和 47 年 12 月 22 日受付)