

辞書式最適化に基づく三角形分割における辺挿入パラダイム

大瀧 史^{†1} 玉木 久夫^{†1}

一定の条件を満たす最適化基準において、最悪値に関して最適な三角形分割を求める多項式時間アルゴリズムのひとつに辺挿入パラダイムがある。このアルゴリズムは辞書式最適化にも拡張できるが、その適用に際しては入力点集合に制約条件が課される。一般に、応用上では三角形分割は使用する三角形がつぶれていない方が良くとされているため、すべての三角形の評価値が問題となるので、最悪値最適化よりも辞書式最適化の方が望ましい。本稿では、制約条件を満たさない入力に対して辺挿入パラダイムを適用したときの解の質を、真の最適解と比較することにより実験的に評価する。

Edge insertion paradigm for triangulation with lexicographical optimization

FUMIHITO OHTAKI^{†1} and HISAO TAMAKI^{†1}

Edge insertion paradigm is one of the polynomial-time algorithms for optimal triangulation, which can be applied when the objective function satisfies certain conditions. This algorithm, which is primarily for optimizing with the worst-triangle measure, can be extended to the lexicographic measure, but with certain restrictions on the input point set. In practice, the lexicographic measure is preferred to worst-triangle measure, since the quality of all triangles are relevant. In this note, we experimentally evaluate the quality of solutions obtained by the edge insertion paradigm, applied to input point sets violating the restriction, comparing them with the true lexicographically optimal solutions.

^{†1} 明治大学
Meiji University

1. はじめに

平面での頂点集合 S 上における直線の辺のみを使用した極大平面グラフのことを、 S 上の三角形分割という。極大平面グラフとは、それ以上どの辺を加えても平面性が失われるような平面グラフのことである。三角形分割は、凸包などと並んで基本的な幾何構造であると同時に、コンピュータグラフィクスやメッシュ生成をはじめとして幅広い応用分野を持つ重要な研究テーマである。¹⁾

三角形分割の「良さ」の基準は、その応用に応じて様々なものがあるが、その多くは、グラフを構成する三角形ごとの評価値に基づいている。例えば、三角形の3つの角の最大値、最小値やアスペクト比などがそれにあたる。

理論的には、三角形の最悪の評価値を最良にする評価基準、例えば最大角最小化、最小角最大化などが用いられることが多いが、実用的には最悪以外の三角形の評価値も無視することはできない。例えば、最大角最小化の基準で図1の2つの三角形分割を考えると、最悪値が等しいので優劣がつかないが、それ以外の三角形を見れば右の方が良くない三角形を多く含んでいることは明らかである。

このような三角形分割を避けるために、全体としての三角形分割の質を比較するひとつの基準として、辞書式の基準がある。これは、グラフ中のすべての評価値を降順に並べて評価値ベクトルを作り、そのベクトル上で辞書式の比較をする方法である。三角形分割 T について、 T 中のすべての三角形の評価値を降順に並べたベクトル $M = \{m(1), m(2), \dots\}$ を、 T の評価値ベクトルと呼ぶ。2つの三角形分割 T_1, T_2 とその評価値ベクトル $M_1 = \{m_1(1), m_1(2), \dots\}$, $M_2 = \{m_2(1), m_2(2), \dots\}$ について、 T_1 の方が辞書式順序で評価が良いとは、ある k について $m_1(i) = m_2(i) (1 \leq i < k)$ かつ $m_1(k) < m_2(k)$ であることをいう。

最適な三角形分割を求めるアルゴリズムのひとつに、辺挿入パラダイム²⁾がある。辺挿入パラダイムは、「最悪の評価値の三角形を破断する辺をひとつ挿入し、これと交わる辺をすべて除いたのちに、この辺の両側にできるふたつの領域を再分割する」という処理を繰り返すことにより、最悪値の改善をめざすものである。

M. Bern ら²⁾は、三角形の評価関数が一定の条件を満たすときに、辺挿入パラダイムが評価値の最悪値を最良にする三角形分割を多項式時間で求められること、更に、入力点集合が一定の条件を満たすときに、辞書式基準についても最適な三角形分割を多項式時間で求められることを証明した。辞書式基準の最適化では、最悪値最適化アルゴリズムが、入力として頂点集合 S と S 上の辺集合 E を与えたときに、 E の辺をすべて含む三角形分割の中

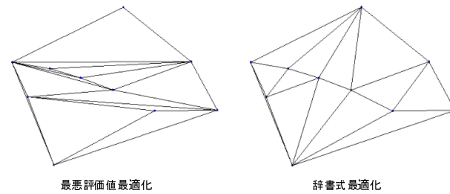


図 1 最悪値最適化と辞書式最適化による違い

Fig.1 Difference between worst-measure optimization and lexicographical optimization.

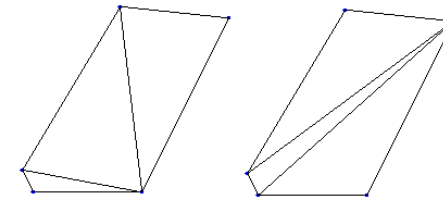


図 2 辞書式最適化が得られない入力の例

Fig.2 Example of the instance edge insertion paradigm cannot lexicographically optimize.

で最悪値について最適な S 上の三角形分割を得られる, という性質を利用している.

アルゴリズム 1 辺挿入パラダイムによる辞書式最適化アルゴリズム

任意の初期解を生成する

Repeat

辺挿入パラダイムによって最悪値について最適な三角形分割を求める

三角形分割中の最悪三角形の 3 辺を固定辺集合に加える

Until グラフ中のすべての辺が固定される

辞書式基準における最適化の条件とは, 入力となる頂点集合 S に評価値の等しい空三角形をなすような 3 頂点の組が複数存在しないことである. 条件を満たさない頂点集合に対してアルゴリズム 1 を実行したときに, 得られる解がどの程度の良さになるのかはわからない.

そこで本研究では, 三角形の最大角を評価基準に用いて, この条件が満たされない一般的な場合, すなわち頂点集合上に同評価値の空三角形が複数存在しうる場合を考え, 以下の 2 つについて述べる.

まず, 辺挿入パラダイムを利用して, 任意の頂点集合を入力として辞書式基準において最適な三角形分割を求められるアルゴリズムを構築する. アルゴリズム 1 では, 最悪値最適化によって最悪の三角形を求め, その 3 辺を必須の辺として最悪値最適化を繰り返す. このとき, 必須とする三角形を決めるステップにおいて, 最適解に含まれる三角形をすべて見つけて各々の場合について解くことで, 必ず最適解を求められるようにする. このアルゴリズムは, 必須の三角形をひとつ求めるたびに探索すべき状態が増える可能性があるため, 指数時間アルゴリズムになっている.

次に, 構築したアルゴリズムによって得られる最適解を用いて, 辺挿入パラダイムの解が

どの程度良いのかを評価する. アルゴリズム 1 の解が最適解と比べてどの程度悪くなるかは入力によって異なり, ほぼ最適解に一致する場合や, 2 番目に悪い三角形の評価値が最適解より 40 度も悪くなる場合など様々である. アルゴリズム 1 の解が実際にはどの程度良いものになるかを知るため, 入力の頂点集合 S が含む同評価値の空三角形の割合を変化させながら, いくつかの項目について最適解と比較することで, 実験的に評価する.

2. 辺挿入パラダイム

辺挿入パラダイムとは, M.Bern らによって示されたアルゴリズム²⁾で, 最大角最小化などのいくつかの評価基準において, 任意の入力に対して最悪値が最適な三角形分割を多項式時間で求めることが出来る.

また, このパラダイムを応用することで, 辞書式基準で最適な三角形分割を求めることもできる. ただし, その場合には入力の頂点集合が以下の条件を満たしている必要がある.

条件 2 辺挿入パラダイムにおける辞書式最適化の条件

頂点集合上の任意の空三角形 abc, xyz ($abc \neq xyz$) について $\mu(abc) \neq \mu(xyz)$ この条件を満たさない場合, 辺挿入パラダイムでは最適解が得られないことがある. 図 2 は, 最大角最小化の辞書式基準において最適解が得られない例であり, 左がこの頂点集合における最適解, 右が辺挿入パラダイムによって実際に得られた解である.

ある評価基準が辺挿入パラダイムによって最適解を得られるものかどうかは, 十分条件を考えることで判断できる. 条件には弱条件と強条件の 2 つがあり, 辺挿入パラダイムを用いると, 弱条件を満たす評価基準に対しては $O(n^3)$ の計算量で, 強条件を満たす評価基準に対しては $O(n^2 \log n)$ の計算量で最適な三角形分割を得ることができる.

三角形分割 T の評価値 $\mu(T)$ を, $\mu(T) = \mu(abc)$ と定める. abc は T における最悪三角

形, $\mu(abc)$ はその評価値である. 2つの三角形分割 T_1, T_2 について, $\mu(T_1) > \mu(T_2)$ または $\mu(T_1) = \mu(T_2)$ かつ T_2 の最悪三角形の集合が T_1 の最悪三角形の真部分集合であるとき, T_2 は T_1 の改善であるといい, $T_1 \succ T_2$ と表す.

辺挿入パラダイムには辺挿入という基本処理が存在する. 辺挿入は次のような関数として定義される. A が三角形分割, qs は A に存在しない辺である.

関数 3 辺挿入 (A, qs)

三角形分割 A に辺 qs を加える

qs と交差するすべての辺を A から取り除く

qs の両側にできる2つの領域 P, R を新たに三角形分割する

このとき, 領域 P, R の再分割には耳分割アルゴリズムを用いる. 耳とは, 多角形領域の隣り合った辺2本と多角形の対角線によって作られる三角形のことである. 耳分割アルゴリズムは, 評価値が閾値よりも良い耳を順次多角形領域 P から切り落としていくことで, 多角形領域を三角形に分割していく.

辺挿入パラダイムは, 三角形分割 T に対して, 最悪の評価値を持つ三角形を破断するように辺挿入を行うことにより T の改善 T' を作り出す, という処理を改善が起これなくなるまで繰り返す. 三角形分割 T が空三角形 xyz を y で破断するとは, T に辺 xz と交差する辺 yt が存在することをいう.

アルゴリズム 4 辺挿入パラダイムによる最悪値最適化アルゴリズム

任意の初期解 T を生成する

repeat

for グラフ T 中の評価値が最悪の三角形 pqr do

while pqr を破断する辺 qs do

辺 qs について辺挿入を行い, T' をつくる

$T \succ T'$ であれば $T \leftarrow T'$ として for ループを抜ける

そうでなければ次の挿入辺候補 qs を探す

endwhile

endfor

until T が改善できなくなる

辺 qs の探索方法は, 評価基準が弱条件を満たすか, 強条件を満たすかによって異なり, 強条件を満たすときの方が効率の良い探索が出来るため, 全体として計算量が良くなる.

さらに, このアルゴリズムはグラフ中の任意の辺を固定したグラフに対しても最適な三角

形分割を得ることができる. すなわち, 頂点集合 S と S 上の辺集合 E が入力として与えられたときに, E の辺をすべて含む三角形分割で最適なものを得ることができる. この性質により, 辺挿入パラダイムを応用して辞書式順序で最適な三角形分割を求めることができる. 辞書式最適化アルゴリズムについても, 計算量は最悪値最適化と同じく, 評価基準が弱条件を満たせば $O(n^3)$, 強条件を満たせば $O(n^2 \log n)$ になる.

3. 任意の入力に対する辞書式最適化アルゴリズム

3.1 アルゴリズムの目的

アルゴリズム 1 では, 入力の頂点集合が同評価値の空三角形を複数含む場合に, 解の最適性が保証されない. しかし, 実際に入力に対してアルゴリズムを実行すると, 最適解が得られるという場合や, 最適ではないが, それに近い良い解が得られるという場合も多い. そして, どの程度良い解が得られるのかという点に関しては, アルゴリズムそのものからは導かれていない.

そこで, 任意の入力に対して辞書式の基準で最適な三角形分割を得られるアルゴリズムを構築し, 最適解とアルゴリズム 1 の解を比較して, どの程度良い解が得られるのかを実験的に確かめる. 任意の入力に対する辞書式最適化アルゴリズムは, 辺挿入パラダイムの性質を利用して構築する.

3.2 アルゴリズムの構築

アルゴリズム 1 では, 入力の頂点集合が同評価値の空三角形を複数持つ場合に解の最適性が保証されない. これは, アルゴリズムの各ステップにおいて固定する最悪三角形が唯一に定まらないことがあるためである. どの最悪三角形を固定するかによって, その後構成できる三角形分割が異なるので, 最終的に得られる解が変わってしまう. ただし, 最悪値最適化については任意の入力に対して最適解が得られることが分かっているので, 固定すべき三角形の評価値については常に最適性が保証される. この性質を利用して, 任意の入力に対して最適解を得るアルゴリズム 5 を構築する.

基本的な構造はアルゴリズム 1 と同じであり, 最悪値最適化アルゴリズムを繰り返し実行することによって最悪評価値の三角形の3辺を固定していく. ただし, 固定する三角形と同じ評価値を持つ空三角形が複数存在する場合には, いずれの三角形を固定するかによって探索が分岐する. 各ステップにおいて求められる最悪値に関しては最適性が保証されているので, 評価値の等しい空三角形すべての場合に関して探索することで必ず最適解を得ることができる.

ただし、このアルゴリズムは、三角形の3辺を固定するたびに分岐の可能性が生じるため、探索の対象が指数的に増えていく。分岐の条件は、求めた最悪値と等しい評価値を持つ空三角形が複数存在することであるため、頂点集合が同評価値の空三角形を多く含むと、実行時間が爆発的に大きくなってしまふ。

4. 実 験

4.1 実験の内容

辺挿入パラダイムの辞書式最適化条件を満たさないような入力に対して、アルゴリズム5を用いて最適解 OPT を求め、他のアルゴリズムの解と比較する。実験には SAC , WAC , SSH , $WAC2$ の4つのアルゴリズムを用意する。 SAC 及び WAC はともにアルゴリズム1で、辺挿入パラダイムに $O(n^2 \log n)$ のアルゴリズムを採用した場合と $O(n^3)$ のアルゴリズムを採用した場合である。 SSH は三角形の3辺を固定する際に、グラフ中に挿入しても最悪値が変化しないような空三角形の中で最長辺が最短のものを選択するヒューリスティックである。固定する三角形が小さい方が他の分割領域に与える影響がより少ないのではないかと、という予想をもとにこのアルゴリズムを用意した。三角形の大きさを表す値には三角形の最長辺を利用している。 $WAC2$ は、 SAC と WAC の結果に違いが生じた原因を確かめるために追加したアルゴリズムで、 WAC の一部を改変したものである。 WAC と $WAC2$ の違いについては4.3節で述べる。

評価基準には、強条件を満たす評価基準の一つである最大角最小化を用いる。入力の頂点集合は、同評価値の空三角形の割合を示すパラメータ P を固定した上でランダムに生成する。 P は、頂点集合上の空三角形の総数 T と、それらの持つ評価値の種類 M を用いて $P = M/T$ と定義する。 P が小さいほど同一評価値の三角形が多く現れる頂点集合になる。頂点集合に対する初期解は平面走査法を用いたアルゴリズム³⁾によって生成する。

頂点数 N と P の値を変化させ、各 N , P の値の組でそれぞれ5つのテストケースについて各アルゴリズムを実行し、最適解と比較する。比較項目には ave , $worse$, μ'/μ の3つを用いる。 ave は、三角形分割中の全三角形に対する評価値の平均値である。 $worse$ は、評価値ベクトルを成分ごとに比較したときに、最適解よりも値が悪くなっている成分の割合を表す。この値は0から1までの値をとり、0のとき評価値ベクトルが最適解と完全に一致する。 μ'/μ は、評価値ベクトルの各成分における最適解との比の最大値を表す。この値は1以上の値をとり、値が大きいほど最適解との開きが大きい箇所があることを示す。

4.2 実験結果

表1から表5に実験結果を示す。表中における空欄(-)は、アルゴリズムの実行が時間内に終了せず、結果が得られなかったことを示している。

まず、最適解と各アルゴリズムの解の一致率について考察する。 SAC については、ほとんどの N , P の組み合わせについて、半分以上のテストケースで最適解と一致したのに対して、 WAC と SSH については、 N , P の値にかかわらず、最適解と一致するテストケースがほとんどなかった。以上のことから、最適解を得る確率が最も高いアルゴリズムが SAC であったことがわかる。ただし、 N が大きく、 P が小さい場合にはアルゴリズムの実行が終了しないケースがあったため、十分な結果が得られなかった。

次に、各評価項目の値について考察する。 ave , $worse$ を見ると、ほぼすべてのテストケースについて SAC , WAC , SSH の順で最適解に近い値となった。 μ'/μ を見ると、 SAC についてはすべてのテストケースについて $\mu'/\mu \leq 1.05$ となり、最適解が得られない場合でも、評価値ベクトルの各成分は最適解からそれほど離れていないことがわかる。 WAC は P が小さい場合に値が大きくなることが多く、 SSH は全体的に値が大きくなってしまった。

以上のことから、強条件を満たす評価基準については、アルゴリズム1に $O(n^2 \log n)$ の辺挿入パラダイムを用いることで、最適解にかなり近い解を得られることが確認できた。特に $P \geq 0.6$ の場合においては、高い割合で最適解が得られた。しかし、弱条件のみを満たし強条件を満たさない評価基準では $O(n^3)$ の辺挿入パラダイムを用いる必要があるため、強条件のときほど良い解が得られなかった。

4.3 SAC と WAC の結果の差に関する考察

今回の実験では、ほとんどのテストケースについて SAC の方が WAC よりも最適に近い結果が得られた。その差が生じた原因について考察する。2つのアルゴリズムの差は、最悪値最適化アルゴリズムの部分のみであるから、その違いが最終的な結果の差につながっている筈である。2つの最悪値最適化アルゴリズムの違いとして、解を改善する際の挿入辺 qs の選び方が挙げられる。弱条件アルゴリズムでは、 qs の各候補に対して選択する順番について明確な基準がないが、強条件アルゴリズムでは qs と交差する辺が少ないものから選んでいる。この違いによって最終的な差が生まれていると考えられるので、この点について実験によって確かめる。

実験のために、新たにアルゴリズム $WAC2$ を実装する。弱条件アルゴリズム WAC においては、挿入辺の候補 qs を選ぶときにその順番を考慮していなかったが、 $WAC2$ ではこれを候補の中で交差する辺の数が少ないものから順に選ぶように変更する。 $WAC2$ を先

の実験と同じテストケースに対して実行し、その結果を *SAC*、*WAC* と比較する。

実験の結果、すべてのテストケースに対して *WAC2* の解が *SAC* の解と同じものとなり、*WAC* よりも良い結果が得られた。この結果から、*SAC* と *WAC* の違いは、挿入辺の選び方によって生じていたことが確認できた。

5. まとめと課題

5.1 まとめ

辺挿入パラダイムについて、最適解を保証するための条件を満たさない入力に対して得られる解が最適解にどれほど近いのかを実験的に検証した。実験の結果、強条件を満たすような評価基準に対しては、辺挿入パラダイムによって最適解もしくはそれに近い解を得られることが確認できた。また、弱条件アルゴリズムのみを満たす場合でも、アルゴリズム中で挿入辺の候補を選ぶ際に交差数の少ないものから選んでいくことにより、強条件を満たす場合と同等の解を得ることができた。

5.2 課題

今回、300 頂点に対する実験では、*P* の値が小さい場合に実行時間がかかりすぎたために最適解を得られず、実験を行うことができなかった。より厳密な検証のためには、最適解を得るアルゴリズムを高速化する、もしくは他の方法で最適解を求めることで、頂点数が大きい場合についても実験を行い検証する必要がある。また、実験の際に三角形分割の評価基準として最大角最小化を用いたが、他の評価基準に対しても同様の結果を得ることができるのかも検証する必要がある。今後、交差数の少ない辺から選んだ方が良い解が得られるという実験結果についての理論的な解明も目指したい。

参考文献

- 1) 今井桂子：三角形分割全体の離散構造とその性質。離散構造とアルゴリズム VI（藤重悟（編）），pp.1-49，近代科学社（1999）。
- 2) M.Bern, H.Edelsbrunner, D.Eppstein, S.Mitchell, and T.S.Tan.: Edge Insertion for Optimal Triangulation, *Discrete Computational Geometry*, Vol.10, No.1, pp. 47-65 (1993).
- 3) Herbert Edelsbrunner.: *Algorithms in Combinatorial Geometry*, pp. 142-145, Springer-Verlag, Heidelberg (1987).

表 1 実験結果 (P=0.8)

Table 1 result of experimentation with $P = 0.8$

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 300$		
	ave (度)	worse	μ'/μ	ave (度)	worse	μ'/μ	ave (度)	worse	μ'/μ
OPT	97.044	-	-	96.837	-	-	95.881	-	-
SAC	97.044	0.000	1.000	96.837	0.000	1.000	95.881	0.000	1.000
WAC	96.977	0.284	1.007	96.836	0.183	1.019	96.021	0.848	1.010
WAC2	97.044	0.000	1.000	96.837	0.000	1.000	95.881	0.000	1.000
SSH	99.597	0.693	1.226	97.818	0.615	1.112	99.123	0.990	1.273
OPT	100.494	-	-	95.307	-	-	97.452	-	-
SAC	100.494	0.000	1.000	95.307	0.000	1.000	97.504	0.506	1.005
WAC	100.494	0.000	1.000	95.361	0.384	1.010	97.585	0.570	1.010
WAC2	100.494	0.000	1.000	95.307	0.000	1.000	97.504	0.506	1.005
SSH	101.801	0.527	1.081	95.592	0.455	1.059	103.156	0.977	1.257
OPT	95.873	-	-	96.593	-	-	95.653	-	-
SAC	95.873	0.000	1.000	96.593	0.000	1.000	95.653	0.000	1.000
WAC	95.918	0.089	1.014	96.635	0.181	1.010	96.216	0.712	1.042
WAC2	95.873	0.000	1.000	96.593	0.000	1.000	95.653	0.000	1.000
SSH	97.292	0.955	1.092	102.822	0.987	1.338	98.355	0.826	1.176
OPT	96.379	-	-	95.393	-	-	95.863	-	-
SAC	96.379	0.000	1.000	95.420	0.131	1.012	95.912	0.207	1.018
WAC	96.379	0.000	1.000	95.462	0.455	1.009	95.846	0.225	1.018
WAC2	96.379	0.000	1.000	95.420	0.131	1.012	95.912	0.207	1.018
SSH	99.000	0.967	1.156	98.137	0.942	1.127	97.072	0.549	1.116
OPT	99.334	-	-	97.230	-	-	94.849	-	-
SAC	99.334	0.000	1.000	97.230	0.000	1.000	94.849	0.000	1.000
WAC	99.845	0.667	1.028	97.337	0.592	1.012	94.940	0.304	1.013
WAC2	99.334	0.000	1.000	97.230	0.000	1.000	94.849	0.000	1.000
SSH	101.364	0.825	1.149	106.356	0.989	1.280	95.097	0.509	1.060

表 2 実験結果 (P=0.7)

Table 2 result of experimentation with $P = 0.7$

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 300$		
	ave (度)	worse	μ'/μ	ave (度)	worse	μ'/μ	ave (度)	worse	μ'/μ
OPT	95.310	-	-	99.573	-	-	95.528	-	-
SAC	95.310	0.000	1.000	99.573	0.000	1.000	95.559	0.304	1.007
WAC	95.796	0.717	1.042	99.612	0.238	1.010	96.269	0.885	1.032
WAC2	95.310	0.000	1.000	99.573	0.000	1.000	95.559	0.304	1.007
SSH	96.286	0.428	1.089	113.852	0.974	1.306	102.616	0.986	1.340
OPT	99.268	-	-	96.295	-	-	95.048	-	-
SAC	99.268	0.000	1.000	96.295	0.000	1.000	95.048	0.000	1.000
WAC	99.502	0.514	1.022	96.715	0.638	1.023	95.308	0.794	1.030
WAC2	99.268	0.000	1.000	96.295	0.000	1.000	95.048	0.000	1.000
SSH	102.346	0.834	1.153	97.470	0.811	1.058	101.538	0.995	1.247
OPT	100.671	-	-	95.661	-	-	95.372	-	-
SAC	100.671	0.000	1.000	95.638	0.029	1.004	95.404	0.304	1.005
WAC	100.979	0.557	1.028	95.859	0.588	1.019	95.606	0.727	1.016
WAC2	100.671	0.000	1.000	95.638	0.029	1.004	95.404	0.304	1.005
SSH	105.054	0.645	1.202	98.076	0.698	1.182	97.159	0.983	1.174
OPT	99.780	-	-	95.421	-	-	95.779	-	-
SAC	99.780	0.000	1.000	95.421	0.000	1.000	95.779	0.000	1.000
WAC	99.846	0.168	1.031	95.600	0.526	1.013	95.936	0.318	1.019
WAC2	99.780	0.000	1.000	95.421	0.000	1.000	95.779	0.000	1.000
SSH	104.220	0.805	1.154	107.252	0.984	1.354	98.911	0.949	1.187
OPT	99.491	-	-	95.672	-	-	95.675	-	-
SAC	99.491	0.000	1.000	95.672	0.000	1.000	95.675	0.000	1.000
WAC	99.767	0.436	1.045	95.715	0.427	1.019	96.245	0.751	1.034
WAC2	99.491	0.000	1.000	95.672	0.000	1.000	95.675	0.000	1.000
SSH	100.480	0.615	1.096	101.802	0.907	1.264	101.256	0.991	1.221

表 3 実験結果 (P=0.6)

Table 3 result of experimentation with $P = 0.6$

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 300$		
	ave (度)	worse	μ'/μ	ave (度)	worse	μ'/μ	ave (度)	worse	μ'/μ
OPT	97.181	-	-	95.728	-	-	95.597	-	-
SAC	97.181	0.000	1.000	95.728	0.000	1.000	95.597	0.000	1.000
WAC	97.606	0.588	1.039	96.238	0.662	1.021	97.119	0.852	1.089
WAC2	97.181	0.000	1.000	95.728	0.000	1.000	95.597	0.000	1.000
SSH	102.808	0.912	1.242	110.504	0.984	1.400	104.060	0.991	1.306
OPT	98.511	-	-	95.794	-	-	97.002	-	-
SAC	98.511	0.000	1.000	95.794	0.000	1.000	97.002	0.000	1.000
WAC	99.552	0.511	1.079	96.089	0.654	1.021	97.201	0.506	1.014
WAC2	98.511	0.000	1.000	95.794	0.000	1.000	97.002	0.000	1.000
SSH	110.754	0.940	1.368	114.623	0.995	1.437	105.774	0.970	1.293
OPT	97.689	-	-	96.295	-	-	98.245	-	-
SAC	97.689	0.000	1.000	96.295	0.000	1.000	98.245	0.000	1.000
WAC	98.443	0.636	1.042	96.478	0.614	1.037	98.710	0.701	1.019
WAC2	97.689	0.000	1.000	96.295	0.000	1.000	98.245	0.000	1.000
SSH	104.146	0.973	1.223	109.654	0.997	1.339	113.822	0.962	1.389
OPT	98.376	-	-	95.912	-	-	-	-	-
SAC	98.376	0.000	1.000	95.912	0.000	1.000	-	-	-
WAC	98.860	0.609	1.033	96.372	0.729	1.026	-	-	-
WAC2	98.376	0.000	1.000	95.912	0.000	1.000	-	-	-
SSH	103.514	0.853	1.151	106.197	0.966	1.338	-	-	-
OPT	96.677	-	-	96.750	-	-	94.307	-	-
SAC	96.677	0.000	1.000	96.750	0.000	1.000	94.307	0.000	1.000
WAC	96.554	0.104	1.018	97.046	0.488	1.015	94.975	0.810	1.028
WAC2	96.677	0.000	1.000	96.750	0.000	1.000	94.307	0.000	1.000
SSH	99.138	0.659	1.131	99.565	0.958	1.159	109.496	0.991	1.450

表 4 実験結果 (P=0.5)

Table 4 result of experimentation with $P = 0.5$

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 300$		
	ave (度)	worse	μ'/μ	ave (度)	worse	μ'/μ	ave (度)	worse	μ'/μ
OPT	95.465	-	-	96.149	-	-	-	-	-
SAC	95.584	0.188	1.021	96.189	0.158	1.008	-	-	-
WAC	96.988	0.757	1.116	97.711	0.794	1.101	-	-	-
WAC2	95.584	0.188	1.021	96.189	0.158	1.008	-	-	-
SSH	104.436	0.956	1.352	117.561	0.997	1.488	-	-	-
OPT	97.370	-	-	95.470	-	-	94.063	-	-
SAC	97.370	0.000	1.000	95.470	0.000	1.000	94.109	0.324	1.028
WAC	98.048	0.764	1.040	95.795	0.492	1.020	94.347	0.573	1.021
WAC2	97.370	0.000	1.000	95.470	0.000	1.000	94.109	0.324	1.028
SSH	106.616	0.857	1.336	108.453	0.992	1.305	108.183	0.997	1.414
OPT	98.915	-	-	95.241	-	-	95.467	-	-
SAC	98.971	0.087	1.018	95.241	0.000	1.000	95.470	0.068	1.006
WAC	98.983	0.306	1.026	96.227	0.643	1.063	95.973	0.661	1.023
WAC2	98.971	0.087	1.018	95.241	0.000	1.000	95.470	0.068	1.006
SSH	108.439	0.574	1.316	120.071	0.997	1.469	111.648	0.957	1.379
OPT	98.133	-	-	96.567	-	-	-	-	-
SAC	98.133	0.000	1.000	96.634	0.272	1.010	-	-	-
WAC	98.762	0.584	1.043	97.296	0.825	1.035	-	-	-
WAC2	98.133	0.000	1.000	96.634	0.272	1.010	-	-	-
SSH	110.138	0.995	1.306	113.006	0.976	1.386	-	-	-
OPT	97.973	-	-	95.505	-	-	94.658	-	-
SAC	97.973	0.000	1.000	95.505	0.000	1.000	94.658	0.000	1.000
WAC	98.974	0.624	1.050	96.619	0.653	1.055	97.477	0.946	1.134
WAC2	97.973	0.000	1.000	95.505	0.000	1.000	94.658	0.000	1.000
SSH	112.863	0.935	1.423	105.686	0.989	1.269	112.304	0.956	1.462

表 5 実験結果 (P=0.4)

Table 5 result of experimentation with $P = 0.4$

	$n = 100$			$n = 200$			$n = 300$		
	ave (度)	worse	μ'/μ	ave (度)	worse	μ'/μ	ave (度)	worse	μ'/μ
OPT	95.270	-	-	95.688	-	-	-	-	-
SAC	95.270	0.000	1.000	95.792	0.327	1.011	-	-	-
WAC	96.198	0.707	1.040	96.203	0.586	1.029	-	-	-
WAC2	95.270	0.000	1.000	95.792	0.327	1.011	-	-	-
SSH	122.188	0.995	1.490	106.860	0.929	1.299	-	-	-
OPT	94.542	-	-	93.754	-	-	-	-	-
SAC	94.542	0.000	1.000	93.754	0.000	1.000	-	-	-
WAC	94.707	0.255	1.021	94.956	0.616	1.058	-	-	-
WAC2	94.542	0.000	1.000	93.754	0.000	1.000	-	-	-
SSH	115.273	0.984	1.415	98.748	0.979	1.135	-	-	-
OPT	95.231	-	-	96.113	-	-	-	-	-
SAC	95.231	0.000	1.000	96.151	0.074	1.011	-	-	-
WAC	96.262	0.616	1.061	97.364	0.706	1.056	-	-	-
WAC2	95.231	0.000	1.000	96.151	0.074	1.011	-	-	-
SSH	130.166	0.989	1.626	120.962	0.976	1.490	-	-	-
OPT	98.813	-	-	94.075	-	-	-	-	-
SAC	98.828	0.038	1.008	94.075	0.000	1.000	-	-	-
WAC	99.042	0.232	1.030	95.150	0.645	1.053	-	-	-
WAC2	98.828	0.038	1.008	94.075	0.000	1.000	-	-	-
SSH	125.312	0.995	1.471	106.197	0.984	1.424	-	-	-
OPT	97.524	-	-	95.545	-	-	-	-	-
SAC	97.541	0.022	1.023	95.545	0.000	1.000	-	-	-
WAC	97.888	0.339	1.032	98.339	0.832	1.102	-	-	-
WAC2	97.541	0.022	1.023	95.545	0.000	1.000	-	-	-
SSH	121.872	0.962	1.490	116.846	0.984	1.391	-	-	-