Vol.2012-CVIM-180 No.23
2012/1/19

超精度くりこみ法

金 谷 健 一[†1] アリ・アルシャラドカー[†2]
ニコライ・チェルノフ[†3] 菅 谷 保 之[†4]

コンピュータビジョンの幾何学的推定を最小化原理によらない方法として重み反復法とくりこみ法を再定式化する．そして，くりこみ法の精度をさらに高める「超精度くりこみ法」を提案し，次のことを示す．重み反復法は最小二乗法を初期解とし，くりこみ法は Taubin 法を初期解とし，超精度くりこみ法は超精度最小二乗法を初期解とし，重みを反復更新するものであり，すべて解の共分散行列は高次の誤差項を除いて理論限界に一致する．重み反復法は偏差が大きく，くりこみ法は偏差が小さいが，超精度くりこみ法は高次の誤差項を除いて偏差が存在しないので，最も高精度とされる最尤推定より高精度である．

Hyper-Renormalization

Kenichi Kanatani,[†1] Ali Al-Sharadqah,[†2]
Nikolai Chernov[†3] and Yasuyuki Sugaya [†4]

We reformulate iterative reweight and renormalization for geometric estimation in computer vision and propose “hyper-renormalization”, further improving renormalization. We show the following: Iterative reweight starts from least squares, renormalization starts from the Taubin method, and hyper-renormalization starts from HyperLS. For all, the covariance matrix of the resulting solution achieves the theoretical limit except for high order noise terms. Iterative reweight yields large bias, and renormalization substantially reduces bias, while hyper-renormalization produces no bias achieves the theoretical limit except for high order noise terms and hence is more accurate than maximum likelihood, which is widely regarded as the best method.

†1 岡山大学大学院自然科学研究科 Department of Computer Science, Okayama University, Japan
†2 米国ミシシッピー大学数学科 Department of Mathematics, University of Mississippi, U.S.A.
†3 米国アラバマ大学数学科 Department of Mathematics, University of Alabama, U.S.A.
†4 豊橋技術科学大学情報工学系 Department of Information and Computer Sciences, Toyohashi University of Technology

1. まえがき

コンピュータビジョンの最も重要な基礎技術の一つは，幾何学的拘束を利用してノイズ（以下，データの誤差を「ノイズ」と呼ぶ）のある観測データから対象の 2 次元および 3 次元形状を計算することである．多くの問題では次のように定式化される．ノイズを含む N 個の観測データベクトル $\boldsymbol{x}_1$, ..., $\boldsymbol{x}_N$ が得られているとする．これらのノイズがない真値 $\bar{\boldsymbol{x}}_1$, ..., $\bar{\boldsymbol{x}}_N$ はどれもある拘束条件

$$F(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = 0 \tag{1}$$

を満たすとする．ただし，$\boldsymbol{\theta}$ は未知パラメータベクトルであり，これを精密に推定したい．以下このような問題を「幾何学的推定」と呼ぶ．このような研究は 1980 年代から筆者らを含む多くの研究者によって精力的に研究され，現在標準となっているのは再投影誤差を最小にする方法であり，Gold Standard とも呼ばれている[5)]．また，計算を容易にするような再投影誤差のいろいろな近似関数とその最小化手法が提案されている．

一方，工業，農業，医学，薬学などの分野ではパラメータを含むデータ発生モデルを仮定し，繰り返してサンプルしたデータからパラメータを推定することが重要である．以下これを「統計的推定」と呼ぶ．統計的推定においては古くから何らかの評価関数を最小にする方法（以下「最小化原理」と呼ぶ）が用いられていた．代表的なものは「最尤推定」であり，尤度の対数の符号を変えたもの（「負対数尤度」と呼ぶ）を最小にする．ところが近年は最小化ではなく，適切に与えた式（「推定関数[4)]」と呼ぶ）を 0 とする解を求める方法が広まっている．これは最小化原理の拡張であり，例えば最尤推定は負対数尤度のパラメータに関する導関数（「スコア関数」呼ぶ）が推定関数となる．このように推定関数は何らかの評価関数の導関数である必要はなく，解が望ましい性質を持つようにいろいろな工夫を加えることができるので，最小化原理よりも柔軟であり，最小化原理よりも高精度の解を得る可能性を秘めている．

コンピュータビジョンにおいて最小化ではない代表的な方法は，筆者らが提案した「くりこみ法[6),7)]」である．これは重み付き最小二乗法の解の偏差を反復的に除去するものである．くりこみ法は当時知られていたどの方法よりも著しく高精度であったため，世界中で注目された．しかし，幾何学的推定は何らかの評価関数を最小にすべきであるという先入観のためか，これが何を最小化するのかという疑問が繰り返して提出され，手法の正当性を疑う者もいた．これに対して Chojnacki ら[3)] は再投影誤差を非常によく近似する関数（今

日「サンプソン誤差」と呼ばれている[5)]）を最小化するくりこみ法に似た「FNS 法」と呼ぶ反復解法を提案した．そして，くりこみ法はサンプソン誤差を近似的に最小化する手法であると解釈すればその計算が正当化されると主張した[2)]．さらに Leedan ら[14)] や Matei ら[15)] が同じ関数を最小化する別の反復手段を提案した．これらは最小化原理に基づくという点で多くの人々に受け入れられ，今日の幾何学的推定の標準的な手法となっている．

本論文ではくりこみ法が最小化原理に基づいていない点を最大限に活用して，計算手順を改良して FNS 法および最尤推定を上回る精度の推定ができることを示す．提案方法は統計的推定における推定関数の方法に相当しているとみなすことができる．

2. 幾何学的推定

式 (1) 中の $F(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$ は一般に $\boldsymbol{x}$ の複雑な非線形関数であるが，実用的な多くの問題では未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ に関しては線形であったり，パラメータをつけ直して線形に表せたりすることが多い．そのような場合は式 (1) が次の形に表せる．

$$(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\theta}) = 0 \tag{2}$$

ここに $\boldsymbol{\xi}(\cdot)$ は $\mathcal{R}^m$ から $\mathcal{R}^n$ への非線形写像である（m, n はそれぞれデータ $\boldsymbol{x}_\alpha$ とパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の次元）．以下ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の内積を $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ と書く．ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ には定数倍の不定性があるので $\|\boldsymbol{\theta}\| = 1$ と正規化する．

【例１】（**楕円の当てはめ**）与えられた点 (x_α, y_α)，$\alpha = 1, ..., N$ に楕円

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0 \tag{3}$$

を当てはめる問題を考える．このとき

$$\boldsymbol{\xi} = (x^2\ \ 2xy\ \ y^2\ \ 2x\ \ 2y\ \ 1)^\top, \qquad \boldsymbol{\theta} = (A\ \ B\ \ C\ \ D\ \ E\ \ F)^\top \tag{4}$$

と定義すると，式 (3) は式 (2) の形になる．

【例２】（**基礎行列の計算**）同一シーンを異なる位置から撮影した 2 画像において，第 1 画像の点 (x, y) が第 2 画像の点 (x', y') に対応しているとき，両者は次の「エピ極線方程式」を満たす[5)]．

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{F}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \tag{5}$$

ただし，$\boldsymbol{F}$ はそれぞれの画像を撮影したカメラの相対位置や内部パラメータに依存するランク 2 の行列であり,「基礎行列」と呼ばれる．これを画像中の対応点から計算することにより，カメラ位置やシーンの 3 次元形状を計算することができる．このとき，

$$\boldsymbol{\xi} = (xx'\ xy'\ x\ yx'\ yy'\ y\ x'\ y'\ 1)^\top, \qquad \boldsymbol{\theta} = (F_{11}\ F_{12}\ F_{13}\ F_{21}\ F_{22}\ F_{23}\ F_{31}\ F_{32}\ F_{33})^\top \tag{6}$$

と定義すると，式 (5) は式 (2) の形になる．

各データ $\boldsymbol{x}_\alpha$ はその真の値 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ に期待値 $\boldsymbol{0}$，共分散行列 $\sigma^2 V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ の独立な正規分布に従うノイズ $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ が加わると仮定する．$V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ はノイズの方向依存性を表す既知の行列であり,「正規化共分散」と呼ぶ．一方 σ はノイズの絶対的な大きさを表す未知の定数であり,「ノイズレベル」と呼ぶ．以下 $\boldsymbol{x}_\alpha$ を変換した $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}_\alpha)$ を $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ と書く．その真の値 $\boldsymbol{\xi}(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha)$ を $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ と書くと $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ は次のように展開できる．

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha = \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha + \Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha + \Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha + \cdots \tag{7}$$

以下，バーはノイズのない項を表し，Δ_k はノイズの k 次の項 $O(\sigma^k)$ を意味する．写像 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ のヤコビ行列を用いると 1 次の誤差項 $\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha$ は次のように書ける．

$$\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha = \left.\frac{\partial\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha}\Delta\boldsymbol{x}_\alpha \tag{8}$$

そこで $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の共分散行列を次のように定義する（$E[\cdot]$ は期待値）．

$$V[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top] = \left.\frac{\partial\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha} E[\Delta\boldsymbol{x}_\alpha\Delta\boldsymbol{x}_\alpha^\top] \left.\frac{\partial\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha}^\top = \sigma^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \tag{9}$$

ただし次のように置いた．

$$V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \equiv \left.\frac{\partial\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha} V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \left.\frac{\partial\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha}^\top \tag{10}$$

式 (10) は真の値 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ を含んでいるので実際の計算では観測値 $\boldsymbol{x}_\alpha$ で近似する．多くの実験でこの近似は最終結果に影響を及ぼさないことが確認されている．また $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ はヤコビ行列による 1 次近似に基づいているが，2 次以上の項を考慮しても最終結果に影響がないことが確認されている．

3. 重み反復法

古くから用いられた最小化に基づかない方法に次の「重み反復法」がある．

(1) $W_\alpha = 1$, $\alpha = 1, ..., N$ と置き，$\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{0}$ とする．
(2) 次の行列 $\boldsymbol{M}$ を計算する．

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \tag{11}$$

(3) 固有値問題 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta} = \lambda\boldsymbol{\theta}$ を解いて，最小の固有値に対する単位固有ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を計算する．

(4) 符号を除いて $\boldsymbol{\theta} \approx \boldsymbol{\theta}_0$ なら $\boldsymbol{\theta}$ を返して終了する．そうでなければ次のように更新してステップ (2) に戻る．

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})}, \qquad \boldsymbol{\theta}_0 \leftarrow \boldsymbol{\theta} \tag{12}$$

背景．この方法の動機は次式を最小にする「重み付き最小二乗法」である．

$$\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha (\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\theta})^2 = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta}). \tag{13}$$

よく知られているように，上式を最小にする $\boldsymbol{\theta}$ は行列 $\boldsymbol{M}$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルである．統計学でよく知られているように，各項の重み W_α はその項の分散の逆数に比例するようにとるのが最適である[17]．$(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \boldsymbol{\theta}) = 0$ であるから $(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\theta}) = (\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\theta}) + \cdots$ であり，分散の主要項は

$$E[(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\theta})^2] = E[\boldsymbol{\theta}^\top \Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \boldsymbol{\theta}] = (\boldsymbol{\theta}, E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top]\boldsymbol{\theta}) = \sigma^2(\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta}) \tag{14}$$

である．ゆえに $W_\alpha = 1/(\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})$ とするのが最適であるが，$\boldsymbol{\theta}$ は未知である．そこで反復を行い，前回の反復で求めた $\boldsymbol{\theta}$ から重み W_α を定め，これを反復する．

注意．$W_\alpha = 1$ として最初に計算される解（便宜上「初期解」と呼ぶ）は $\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\theta})^2$ を最小にするものであり，古くから知られている「最小二乗法」(「代数距離最小化」,「DLT 法」などとも呼ばれる[5]）である．これから出発して式 (12) のように重みを更新すると，次式が最小化されるように思える．

$$J = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\theta})}{(\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})} \tag{15}$$

これが「サンプソン誤差」と呼ばれているものである．しかし，重み反復法はこれを最小にするものではない．なぜなら，反復の各ステップで分母を定数とみなして分子を最小にする $\boldsymbol{\theta}$ を計算しているから，反復が収束した時点ではすべての $\boldsymbol{\theta}'$ に対して

$$\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\theta})^2}{(\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})} \leq \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\theta}')^2}{(\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})} \tag{16}$$

となっているが，次式が成り立つとは限らない．

$$\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\theta})^2}{(\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})} \leq \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\theta}')^2}{(\boldsymbol{\theta}', V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta}')} \tag{17}$$

問題点．文献 10) の解析によると，得られる解 $\boldsymbol{\theta}$ の共分散行列 $V[\boldsymbol{\theta}]$ は $O(\sigma^4)$ を除いて「KCR 下界[1),8)–10)]」と呼ばれる精度の理論限界に一致することが示される．したがって解の分散をこれ以上改善することはできない．しかし，実験によると[9]，この方法は非常に大きな偏差があるために精度が非常に低い（文献 10) に誤差の理論評価が示されている）．例えば楕円当てはめではほとんど常に小さめの楕円が当てはまってしまう．これを改善する方法として次の二つが考えられる．

- 解の偏差を除去する．
- 式 (18) のサンプソン誤差を厳密に最小化する．

筆者らのくりこみ法は前者のアプローチであり，Chojnacki ら[3] の FNS 法や Leedan ら[14] や Matei ら[15] の HEIV 法は後者のアプローチである．

4. くりこみ法

筆者らが提案したくりこみ法[6),7)] は次のように記述できる．

(1) $W_\alpha = 1$, $\alpha = 1, ..., N$ と置き，$\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{0}$ とする．

(2) 次の行列 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ を計算する．

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top, \qquad \boldsymbol{N} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \tag{18}$$

(3) 一般固有値問題 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta} = \lambda\boldsymbol{N}\boldsymbol{\theta}$ を解いて，絶対値最小の一般固有値に対する単位一般固有ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を計算する．

(4) 符号を除いて $\boldsymbol{\theta} \approx \boldsymbol{\theta}_0$ なら $\boldsymbol{\theta}$ を返して終了する．そうでなければ次のように更新してステップ (2) に戻る．

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})}, \qquad \boldsymbol{\theta}_0 \leftarrow \boldsymbol{\theta} \tag{19}$$

文献 6)，7) ではステップ (3) を固有値問題に置き換えて解く方法されて示しているが，解は同一である[9]．

背景．式 (18) の行列 $\boldsymbol{M}$ を真値 $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ によって定義したものを $\bar{\boldsymbol{M}}$ とすると，$(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \boldsymbol{\theta}) = 0$ であるから $\bar{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}$ である．そこで $\bar{\boldsymbol{M}}$ を推定する．$E[\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha] = 0$ であるから $\boldsymbol{M}$ の期待値は次のようになる．

$$E[\boldsymbol{M}] = E[\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha)(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha)^\top] = \bar{\boldsymbol{M}} + \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha E[\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top]$$
$$= \bar{\boldsymbol{M}} + \frac{\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = \bar{\boldsymbol{M}} + \sigma^2\boldsymbol{N}. \tag{20}$$

ゆえに $\bar{\boldsymbol{M}} = E[\boldsymbol{M}] - \sigma^2\boldsymbol{N} \approx \boldsymbol{M} - \sigma^2\boldsymbol{N}$ であるから $\bar{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}$ の代わりに $(\boldsymbol{M} - \sigma^2\boldsymbol{N})\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}$ すなわち $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta} = \sigma^2\boldsymbol{N}\boldsymbol{\theta}$ を解く．σ^2 は小さいと仮定して，絶対値最小の一般固有値とみなす．そして，重み反復法と同様に W_α を $1/(\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})$ に近付くように反復更新する．

注意. $W_\alpha = 1$ とする初期解は $\Big((1/N)\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{\xi}_\alpha\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\Big)\boldsymbol{\theta} = \lambda\Big((1/N)\sum_{\alpha=1}^{N}V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\Big)\boldsymbol{\theta}$ を解くものであり，これは $\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{\theta})^2$ を $(\boldsymbol{\theta}, \sum_{\alpha=1}^{N}V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta}) = 1$ のもとに最小化する「Taubin 法[18]」にほかならない．Taubin 法は非常に精度が高いことが知られ，文献 10) に誤差の理論評価が示されている．くりこみ法は Taubin 法から出発して重み W_α を更新する反復とみなせる．実験によるとくりこみ法は Taubin 法よりも精度が高く，ほぼ FNS 法，HEIV 法に匹敵する解が得られることが知られて，その理論的誤差評価は文献 10) に示されている．

課題. 文献 10) の解析によると，解 $\boldsymbol{\theta}$ の共分散行列 $V[\boldsymbol{\theta}]$ は $O(\sigma^4)$ を除いて「KCR 下界[1),8)–10)]」に一致するので，解の分散をこれ以上改良できない．一方，偏差は非常に小さいが 0 ではない．その偏差の評価式には行列 $\boldsymbol{N}$ が含まれる．したがって，**偏差が最小になるように $\boldsymbol{N}$ を選べば**さらに精度が改善される可能性がある．これは $\boldsymbol{N} = (1/N)\sum_{\alpha=1}^{N}W_\alpha V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] + \cdots$ となることが予想される．これを定めるために文献 10) の方法論を用いて誤差解析を行う．

5. 誤差解析

式 (7) を式 (18) の行列 $\boldsymbol{M}$ に代入すると次のように展開される．

$$\boldsymbol{M} = \bar{\boldsymbol{M}} + \Delta_1\boldsymbol{M} + \Delta_2\boldsymbol{M} + \cdots \tag{21}$$

$\Delta_1\boldsymbol{M}$, $\Delta_2\boldsymbol{M}$ はそれぞれ次のようになる．

$$\Delta_1\boldsymbol{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top + \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\Big) + \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\Delta_1\bar{W}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top, \tag{22}$$

$$\Delta_2\boldsymbol{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top + \Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top + \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\Big) + \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\Delta_1 W_\alpha(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top$$
$$+\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top) + \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\Delta_2 W_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top \tag{23}$$

求まる $\boldsymbol{\theta}$ を $\boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{\theta}} + \Delta_1\boldsymbol{\theta} + \Delta_2\boldsymbol{\theta} + \cdots$ と展開する．反復が収束した時点では $W_\alpha = 1/(\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})$ となっているから，$\boldsymbol{\theta}$ の展開を代入して $W_\alpha = \bar{W}_\alpha + \Delta_1 W_\alpha + \Delta_2 W_\alpha + \cdots$ と展開すると，$\Delta_1 W_\alpha$, $\Delta_2 W_\alpha$ はそれぞれ次のようになる．

$$\Delta_1 W_\alpha = -2\bar{W}_\alpha^2(\Delta_1\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}), \tag{24}$$

$$\Delta_2 W_\alpha = \frac{(\Delta_1 W_\alpha)^2}{\bar{W}_\alpha} - \bar{W}_\alpha^2\Big((\Delta_1\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\Delta_1\boldsymbol{\theta}) + 2(\Delta_2\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\Big) \tag{25}$$

未知の λ, $\boldsymbol{N}$ も同様に展開すると一般固有値問題 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta} = \lambda\boldsymbol{N}\boldsymbol{\theta}$ は次のように書ける．

$$(\bar{\boldsymbol{M}} + \Delta_1\boldsymbol{M} + \Delta_2\boldsymbol{M} + \cdots)(\bar{\boldsymbol{\theta}} + \Delta_1\boldsymbol{\theta} + \Delta_2\boldsymbol{\theta} + \cdots)$$
$$= (\bar{\lambda} + \Delta_1\lambda + \Delta_2\lambda + \cdots)(\bar{\boldsymbol{N}} + \Delta_1\boldsymbol{N} + \Delta_2\boldsymbol{N} + \cdots)(\bar{\boldsymbol{\theta}} + \Delta_1\boldsymbol{\theta} + \Delta_2\boldsymbol{\theta} + \cdots) \tag{26}$$

誤差がない項を取り出すと $\bar{\boldsymbol{M}}\bar{\boldsymbol{\theta}} = \bar{\lambda}\boldsymbol{N}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ であるが $\bar{\boldsymbol{M}}\bar{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{0}$ であるから $\bar{\lambda} = 0$ である．式 (26) の両辺の 1 次，2 次の誤差項を等値すると次式を得る．

$$\bar{\boldsymbol{M}}\Delta_1\boldsymbol{\theta} + \Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}} = \Delta_1\lambda\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tag{27}$$

$$\bar{\boldsymbol{M}}\Delta_2\boldsymbol{\theta} + \Delta_1\boldsymbol{M}\Delta_1\boldsymbol{\theta} + \Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}} = \Delta_2\lambda\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}} \tag{28}$$

式 (27) の両辺と $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ との内積をとると

$$(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{M}}\Delta_1\boldsymbol{\theta}) + (\bar{\boldsymbol{\theta}}, \Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}) = \Delta_1\lambda(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}}) \tag{29}$$

であるが，$(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{M}}\Delta_1\boldsymbol{\theta}) = (\bar{\boldsymbol{M}}\bar{\boldsymbol{\theta}}, \Delta_1\boldsymbol{\theta}) = 0$ であり，また式 (22) より $(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}) = 0$ である．ゆえに $\Delta_1\lambda = 0$ である．行列 $\bar{\boldsymbol{M}}$ はランク $n-1$ であり（n は $\boldsymbol{\theta}$ の次元），$\bar{\boldsymbol{\theta}}$ がその零ベクトルである．ゆえに，$\bar{\boldsymbol{M}}$ の一般逆行列を $\bar{\boldsymbol{M}}^-$ とすると，$\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{M}}$ は $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ 方向への射影行列 $\boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$ である．したがって式 (27) の両辺に $\bar{\boldsymbol{M}}^-$ を掛けることによって $\Delta_1\boldsymbol{\theta}$ が次のように書ける．

$$\Delta_1\boldsymbol{\theta} = -\bar{\boldsymbol{M}}^-\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}} \tag{30}$$

ただし，$\boldsymbol{\theta}$ が常に単位ベクトルに正規化されることから $\Delta_1\boldsymbol{\theta}$ が $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ に直交し，したがって $\boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}}\Delta_1\boldsymbol{\theta} = \Delta_1\boldsymbol{\theta}$ であることを用いた．式 (28) に式 (30) を代入すると次のようになる．

$$\Delta_2\lambda\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}} = \bar{\boldsymbol{M}}\Delta_2\boldsymbol{\theta} - \Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^-\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}} + \Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}} = \bar{\boldsymbol{M}}\Delta_2\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}} \tag{31}$$

ただし行列 $\boldsymbol{T}$ を次のように定義した．

$$\boldsymbol{T} \equiv \Delta_2 \boldsymbol{M} - \Delta_1 \boldsymbol{M} \bar{\boldsymbol{M}}^- \Delta_1 \boldsymbol{M} \tag{32}$$

$\boldsymbol{\theta}$ は単位ベクトルであるから伸縮しないので，変化として関心があるのは $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ に直交する成分である．そこで 2 次の変動の直交する成分を次のように定義する．

$$\Delta_2^{\perp}\boldsymbol{\theta} \equiv \boldsymbol{P}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}} \Delta_2 \boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{M}}^- \bar{\boldsymbol{M}} \Delta_2 \boldsymbol{\theta} \tag{33}$$

式 (31) の両辺に $\bar{\boldsymbol{M}}^-$ を掛けると $\Delta_2^{\perp}\boldsymbol{\theta}$ が次のように得られる．

$$\Delta_2^{\perp}\boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{M}}^- (\Delta_2 \lambda \bar{\boldsymbol{N}} - \boldsymbol{T}) \bar{\boldsymbol{\theta}} \tag{34}$$

式 (31) の両辺と $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ との内積をとり，$(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{M}} \Delta_2 \boldsymbol{\theta}) = 0$ に注意すると $\Delta_2 \lambda$ が次のように求まる．

$$\Delta_2 \lambda = \frac{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}})}{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}})} \tag{35}$$

ゆえに式 (34) は次のように書き直せる．

$$\Delta_2^{\perp}\boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{M}}^- \Big(\frac{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}})}{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}})} \bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}} \Big) \tag{36}$$

6. 超精度くりこみ法

式 (30) より $E[\Delta_1 \boldsymbol{\theta}] = \boldsymbol{0}$ である．ゆえに偏差は $E[\Delta_2^{\perp}\boldsymbol{\theta}]$ で評価できる．これは式 (36) より次のように書ける．

$$E[\Delta_2^{\perp}\boldsymbol{\theta}] = \bar{\boldsymbol{M}}^- \Big(\frac{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, E[\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}])}{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}})} \bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}} - E[\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}] \Big) \tag{37}$$

ゆえに，ある定数 c に対して $E[\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}] = c\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ となるような $\boldsymbol{N}$ を選べば

$$E[\Delta_2^{\perp}\boldsymbol{\theta}] = \bar{\boldsymbol{M}}^- \Big(\frac{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, c\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}})}{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}})} \bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}} - c\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}} \Big) = \boldsymbol{0} \tag{38}$$

となる．その結果，偏差は $O(\sigma^4)$ となる（ノイズの奇数次の項の期待値は 0 であることに注意）．$\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ の期待値は次の $\bar{\boldsymbol{N}}$ を用いれば $E[\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}] = \sigma^2 \bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ と表せる（導出は付録）．

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{N}} = & \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{W}_\alpha \Big(V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] + 2\mathcal{S}[\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha^\top] \Big) \\ & - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{W}_\alpha^2 \Big((\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^- \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha) V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] + 2\mathcal{S}[V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \bar{\boldsymbol{M}}^- \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top] \Big) \end{aligned} \tag{39}$$

ただし $\mathcal{S}[\,\cdot\,]$ は対称化作用素であり $(\mathcal{S}[\boldsymbol{A}] = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top)/2)$，ベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha$ を次の関係式によって定義する．

$$E[\Delta_2 \boldsymbol{\xi}_\alpha] = \sigma^2 \boldsymbol{e}_\alpha \tag{40}$$

これから次の「超精度くりこみ法」が得られる．

(1) $W_\alpha = 1$, $\alpha = 1, ..., N$ と置き，$\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{0}$ とする．

(2) 次の行列 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ を計算する．

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \tag{41}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N} = & \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \Big(V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] + 2\mathcal{S}[\boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha^\top] \Big) \\ & - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha^2 \Big((\boldsymbol{\xi}_\alpha, \boldsymbol{M}_{n-1}^- \boldsymbol{\xi}_\alpha) V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] + 2\mathcal{S}[V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \boldsymbol{M}_{n-1}^- \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top] \Big) \end{aligned} \tag{42}$$

ただし，$\boldsymbol{M}_{n-1}^-$ は行列 $\boldsymbol{M}$ のランク $n-1$ の一般逆行列，すなわち $\boldsymbol{M}$ の最小固有値を 0 に置き換えた一般逆行列である．

(3) 一般固有値問題 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta} = \lambda \boldsymbol{N}\boldsymbol{\theta}$ を解いて，絶対値最小の一般固有値に対する単位一般固有ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を計算する．

(4) 符号を除いて $\boldsymbol{\theta} \approx \boldsymbol{\theta}_0$ なら $\boldsymbol{\theta}$ を返して終了する．そうでなければ次のように更新してステップ (2) に戻る．

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\boldsymbol{\theta}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})}, \qquad \boldsymbol{\theta}_0 \leftarrow \boldsymbol{\theta} \tag{43}$$

これから分かるのは，$W_\alpha = 1$ とする初期解は筆者らの「超精度最小二乗法[11),12),16)]」に一致していることである（式 (42) の W_α を 1 としたものは文献 11)，16) の式より項数が少ないが，解は同じである）．したがって，超精度くりこみ法は超精度最小二乗法から出発して重み W_α を更新する反復とみなせる．そして，反復の途中で得られる $\boldsymbol{\theta}$ はすべて $O(\sigma^4)$ を除いて偏差が存在しないことが示される（詳細省略）．

一般固有値問題 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta} = \lambda \boldsymbol{N}\boldsymbol{\theta}$ を解く通常のライブラリツールでは $\boldsymbol{N}$ が正値対称行列と仮定されているが，式 (42) のように定義した $\boldsymbol{N}$ は正値対称行列ではなく，負の固有値を含むことが知られている（それに対して Taubin 法やくりこみ法の $\boldsymbol{N}$ は半正値対称行列である）．しかし，$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta} = \lambda \boldsymbol{N}\boldsymbol{\theta}$ は次のように書き直せる．

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta} \tag{44}$$

式 (41) の行列 $\boldsymbol{M}$ はノイズのあるデータに対しては正値対称行列であるから（ノイズがないときのみ最小固有値が 0 となる），式 (44) を解くことによって一般固有ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ が求まる．

7. まとめ

本論文ではコンピュータビジョンの幾何学的推定を最小化原理によらない方法として重み反復法とくりこみ法を再定式化した．そしてくりこみ法の精度をさらに高めるために，計算中に現れる行列 $\boldsymbol{N}$ をノイズレベル σ に対して $O(\sigma^4)$ を除いて偏差が 0 となるように定める超精度くりこみ法を導出した．次のように整理できる．

- 重み反復法は最小二乗法を初期解とし，重みを反復更新するものであり，解の共分散行列は $O(\sigma^4)$ を除いて KCR 下界に一致する．しかし偏差が大きい．
- くりこみ法は Taubin 法を初期解とし，重みを反復更新するものであり，解の共分散行列は $O(\sigma^4)$ を除いて KCR 下界に一致する．しかも偏差が小さい．
- 超精度くりこみ法は超精度最小二乗法を初期解とし，重みを反復更新するものであり，解の共分散行列は $O(\sigma^4)$ を除いて KCR 下界に一致する．そして $O(\sigma^4)$ を除いて偏差が存在しない．

これらは統計学における最小化原理によらない推定関数の方法[4] に対応しているとみなせる．幾何学的推定において最小化原理を用いる FNS 法，HEIV 法，およびそれらを反復して計算される厳密な最尤推定[13] はすべて $O(\sigma^2)$ の偏差があるので，提案手法のほうが高精度であるといえる．また初期解（超精度最小二乗法）自体が高精度なので数回の反復で収束する．これらは実験によっても確認される[19]．

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 (C 21500172) の助成によった．

参考文献

1) N. Chernov and C. Lesort, Statistical efficiency of curve fitting algorithms, *Comp. Stat. Data Anal.*, **47**-4 (2004-11), 713–728.
2) W. Chojnacki, M. J. Brooks and A. van den Hengel, Rationalising the renormalization method of Kanatani, *J. Math. Imaging Vis.*, **21**-11 (2001-2), 21–38.
3) W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel, and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22**-11 (2000-11), 1294–1303.
4) V. P. Godambe (Ed.), *Estimating Functions*, Oxford University Press, New York, U.S.A., 1991.
5) R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
6) K. Kanatani, Renormalization for unbiased estimation, *Pro. 4th Int. Conf. Comput. Vis. (ICCV'93)*, May 1993, Berlin, Germany, pp. 599–606.
7) 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35**-2 (1994-2), 201–209.
8) 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36**-88 (1995-8), 1865–1873.
9) K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice* Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted, Dover, York, NY, U.S.A., 2005.
10) K. Kanatani, Statistical optimization for geometric fitting: Theoretical accuracy analysis and high order error analysis, *Int. J. Comput. Vis.*, **80**-2 (2008-11), 167–188.
11) K. Kanatani and P. Rangarajan, Hyper least squares fitting of circles and ellipses, *Comput. Stat. Data Anal.*, **55**-6 (2011-6), 2197–2208.
12) K. Kanatani, P. Rangarajan, Y. Sugaya and H. Niitsuma, HyperLS and its applications, *IPSJ Trans. Comput. Vis. Appl.*, **3** (2011-10), 80–94.
13) K. Kanatani and Y. Sugaya, Unified computation of strict maximum likelihood for geometric fitting, *J. Math. Imaging Vis.*, **38**-1 (2010-9), 1–13.
14) Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vis.*. **37**-2 (2000-6), 127-150.
15) J. Matei and P. Meer, Estimation of nonlinear errors-in-variables models for computer vision applications, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **28**-10 (2006-10), 1537–1552.
16) P. Rangarajan and K. Kanatani, Improved algebraic methods for circle fitting, *Electronic J. Stat.*, **3** (2009-10), 1075–1082.
17) 菅谷保之, 金谷健一, [講座] 画像の三次元理解のための最適化計算 [I]–[IV] 電子情報通信学会会誌, **92**-3, 4, 6, 7 (2009-3, 4, 6, 7), 229–233, 301–306, 463–468, 573–578.
18) G. Taubin, Estimation of planar curves, surfaces, and non-planar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13**-11 (1991-11), 1115–1138.
19) 横田健太，村田和洋，菅谷保之，金谷健一，楕円当てはめの精度比較：最小二乗法から超精度くりこみ法まで，情報処理学会研究報告, 2012-CVIM-180-?? (2012-1), 1–8.

付録

$\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}} = \Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}} - \Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^-\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ の期待値を評価する．

A.1 $E[\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}]$ の評価

$\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ の期待値を考える．$(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{\theta}}) = 0$ に注意すると式 (22) から次の関係が成り立つ．

$$\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top + \Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top + \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\Big)\bar{\boldsymbol{\theta}}$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\Delta_1 W_\alpha(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top+\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top)\bar{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\Delta_2 W_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top\bar{\boldsymbol{\theta}}$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha((\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha+(\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)+\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\Delta_1 W_\alpha(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha \tag{45}$$

ゆえに $E[\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}]$ は次のようになる．

$$E[\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}]=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Big(E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top]\bar{\boldsymbol{\theta}}+(E[\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha],\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\Big)+\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(E[\Delta_1 W_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha],\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$$
$$=\frac{\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Big(V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}+(\boldsymbol{e}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\Big)+\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(E[\Delta_1 W_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha],\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha \tag{46}$$

次に $\Delta_1 W_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の期待値を考える．式 (22), (24), (30) より次の関係が成り立つ．

$$\Delta_1 W_\alpha=-2\bar{W}_\alpha^2(\Delta_1\boldsymbol{\theta},V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})=2\bar{W}_\alpha^2(\bar{\boldsymbol{M}}^-\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}},V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})$$
$$=2\bar{W}_\alpha^2\Big(\bar{\boldsymbol{M}}^-\Big(\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\bar{W}_\beta\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^\top+\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^\top\Big)+\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\Delta_1\bar{W}_\beta\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^\top\Big)\bar{\boldsymbol{\theta}},V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}\Big)$$
$$=\frac{2}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2\bar{W}_\beta(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta,\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta,V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})=\frac{2}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2\bar{W}_\beta(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta,\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta,\bar{\boldsymbol{\theta}}), \tag{47}$$

$$E[\Delta_1 W_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha]=E[\frac{2}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2\bar{W}_\beta(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta,\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta,\bar{\boldsymbol{\theta}})\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha]$$
$$=\frac{2}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2\bar{W}_\beta(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta,\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^\top]\bar{\boldsymbol{\theta}}$$
$$=\frac{2}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2\bar{W}_\beta(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta,\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\sigma^2\delta_{\alpha\beta}V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}=\frac{2\sigma^2}{N}\bar{W}_\alpha^3(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha,\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tag{48}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(E[\Delta_1 W_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha],\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(\frac{2\sigma^2}{N}\bar{W}_\alpha^3(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha,\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}},\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$$
$$=\frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^3(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha,\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\theta}},V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha=\frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha,\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha \tag{49}$$

ただし，$\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の誤差が各 α ごとに独立であり，$E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^\top]=\delta_{\alpha\beta}V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$（$\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカのデルタ）となることを用いた．以上より $E[\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}]$ が次のようになる．

$$E[\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}]=\frac{\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Big(V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}+(\boldsymbol{e}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\Big)+\frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha,\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha \tag{50}$$

A.2 $E[\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^-\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}]$ の評価

次に $\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^-\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ の期待値を考える．式 (22) より次のように書ける．

$$\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top+\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top\Big)\bar{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\Delta_1\bar{W}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top\bar{\boldsymbol{\theta}}=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \tag{51}$$

$$\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^-\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}=\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^-\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$$
$$=\Big(\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\bar{W}_\beta\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^\top+\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^\top\Big)+\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\Delta_1\bar{W}_\beta\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^\top\Big)\bar{\boldsymbol{M}}^-\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$$
$$=\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{W}_\beta\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^\top+\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^\top\Big)\bar{\boldsymbol{M}}^-(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$$
$$+\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Delta_1\bar{W}_\beta\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^\top\bar{\boldsymbol{M}}^-(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$$
$$=\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{W}_\beta(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^\top+\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^\top\Big)\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$$
$$+\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Delta_1\bar{W}_\beta(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^\top\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$$
$$=\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{W}_\beta(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta,\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta\quad(\equiv\boldsymbol{t}_1\text{ と置く})$$
$$+\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{W}_\beta(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta,\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta\quad(\equiv\boldsymbol{t}_2\text{ と置く})$$
$$+\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Delta_1\bar{W}_\beta(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha,\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta,\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta\quad(\equiv\boldsymbol{t}_3\text{ と置く}) \tag{52}$$

各項の期待値を考える．第 1 項 $\boldsymbol{t}_1$ の期待値は次のようになる．

$$E[\boldsymbol{t}_1]=\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{W}_\beta(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta,\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top]\bar{\boldsymbol{\theta}}$$
$$=\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{W}_\beta(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta,\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\sigma^2\delta_{\alpha\beta}V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}=\frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha,\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}} \tag{53}$$

第 2 項 $\boldsymbol{t}_2$ の期待値は次のようになる．

$$E[\boldsymbol{t}_2] = \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{W}_\beta(\bar{\boldsymbol{\theta}}, E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^\top]\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta$$
$$= \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{W}_\beta(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \sigma^2\delta_{\alpha\beta}V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta$$
$$= \frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2(\bar{\boldsymbol{\theta}}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha = \frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha \tag{54}$$

最後に第 3 項 $\boldsymbol{t}_3$ の期待値を考える．まず式 (47), (48) から次の関係が得られる．

$$\Delta_1 W_\beta = \frac{2}{N}\sum_{\gamma=1}^{N}\bar{W}_\beta^2\bar{W}_\gamma(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\gamma, \bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\gamma, V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})$$
$$= \frac{2}{N}\sum_{\gamma=1}^{N}\bar{W}_\beta^2\bar{W}_\gamma(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\gamma, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\gamma, \bar{\boldsymbol{\theta}}), \tag{55}$$

$$E[\Delta_1 W_\beta\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha] = E[\frac{2}{N}\sum_{\gamma=1}^{N}\bar{W}_\beta^2\bar{W}_\gamma(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\gamma, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\gamma, \bar{\boldsymbol{\theta}})\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha]$$
$$= \frac{2}{N}\sum_{\gamma=1}^{N}\bar{W}_\beta^2\bar{W}_\gamma(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\gamma, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\gamma^\top]\bar{\boldsymbol{\theta}}$$
$$= \frac{2}{N}\sum_{\gamma=1}^{N}\bar{W}_\beta^2\bar{W}_\gamma(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\gamma, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})\sigma^2\delta_{\alpha\gamma}V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}$$
$$= \frac{2\sigma^2}{N}\bar{W}_\beta^2\bar{W}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}, \tag{56}$$

$$(E[\Delta_1\bar{W}_\beta\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha], \bar{\boldsymbol{\theta}}) = (\frac{2\sigma^2}{N}\bar{W}_\beta^2\bar{W}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})$$
$$= \frac{2\sigma^2}{N}\bar{W}_\beta^2\bar{W}_\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\theta}}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{2\sigma^2}{N}\bar{W}_\beta^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}}) \tag{57}$$

したがって $\boldsymbol{t}_3$ の期待値が次のようになる．

$$E[\boldsymbol{t}_3] = \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Big(\frac{2\sigma^2}{N}\bar{W}_\beta^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})\Big)(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta, \bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta$$
$$= \frac{2\sigma^2}{N^3}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{W}_\beta^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta, \bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta$$
$$= \frac{2\sigma^2}{N^3}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{W}_\beta^2\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^\top\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta$$
$$= \frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\beta=1}^{N}\bar{W}_\beta^2\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^\top\bar{\boldsymbol{M}}^-\Big(\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top\Big)\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta$$
$$= \frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\beta=1}^{N}\bar{W}_\beta^2\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^\top\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{M}}\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta = \frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\beta=1}^{N}\bar{W}_\beta^2\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^\top\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta$$
$$= \frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\beta=1}^{N}\bar{W}_\beta^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta \tag{58}$$

以上より $\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^-\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ の期待値は次のようになる．

$$E[\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^-\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}} + \frac{3\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha \tag{59}$$

A.3 $E[\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}]$ の評価

以上より $\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ の期待値は次のようになる．

$$E[\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Big(V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}} + (\boldsymbol{e}_\alpha, \bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\Big) - \frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}$$
$$-\frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$$
$$= \frac{\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Big(V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}} + \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha^\top\bar{\boldsymbol{\theta}}\Big) - \frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}$$
$$-\frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}$$
$$= \frac{\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\Big(V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}} + (\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha^\top + \boldsymbol{e}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top)\bar{\boldsymbol{\theta}}\Big) - \frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}$$
$$-\frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha^2\Big(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] + V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^\top\Big)\bar{\boldsymbol{\theta}} = \sigma^2\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}} \tag{60}$$

ただし，式 (40) によって定義した $\boldsymbol{e}_\alpha$ を用いている．また一般固有値問題に対する $\boldsymbol{N}$ は対称行列でなければならないので，$(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \boldsymbol{\theta}) = 0$ を利用して，$\boldsymbol{N}$ が対称行列になるように 0 となる項を追加している．