

## 擬似木に基づく分散制約最適化問題の 精度保証付き非厳密解法の提案

沖 本 天 太<sup>†1</sup> ジョ ヨンジュン<sup>†1</sup>  
岩 崎 敦<sup>†1</sup> 横 尾 真<sup>†1</sup>

分散制約最適化問題 (DCOP) はマルチエージェントシステムにおける協調問題解決の基本的な枠組みである。DCOP は NP-hard であるため、大規模な問題に対して、比較的少ない計算で近似解を探索する非厳密解法を考える必要がある。しかしながら、既存の非厳密解法のほとんどは解品質を保証しない。数少ない例外として DALO, bounded max-sum 解法, ADPOP がある。本論文では、近似解の新しい評価基準  $p$ -optimality に基づく非厳密解法を提案する。本解法の特徴を以下に示す。本解法は、(i) 得られる解の絶対/相対誤差の上界をそれぞれ事前/事後に与えることができる、(ii) DCOP の厳密解法で広く用いられている擬似木に基づく解法である、(iii) エージェント数  $n$  に関して多項式時間で実行可能な one-shot type の解法である、(iv) 調整可能なパラメータ  $p$  を持つ。実験では本解法が、解品質を保証する既存の非厳密解法と比べ、より高品質な解および高精度な誤差の上界を与えることを示した。さらに本解法は、これらの非厳密解法と比べ、より高速に求解可能であることを示した。

### Pseudo-tree-based Incomplete Algorithm for Distributed Constraint Optimization with Quality Bounds

TENDA OKIMOTO,<sup>†1</sup> YONGJOON JOE,<sup>†1</sup>  
ATSUSHI IWASAKI<sup>†1</sup> and MAKOTO YOKOO<sup>†1</sup>

A Distributed Constraint Optimization Problem (DCOP) is a fundamental problem that can formalize various applications related to multi-agent cooperation. Since it is NP-hard, considering faster incomplete algorithms is necessary for large-scale applications. Most incomplete algorithms generally do not provide any guarantees on the quality of solutions. Some notable exceptions are DALO, the bounded max-sum algorithm, and ADPOP. In this paper, we develop a new solution criterion called  $p$ -optimality and an incomplete algorithm for obtaining a  $p$ -optimal solution. The characteristics of this algorithm are

as follows: (i) it can provide the upper bounds of the absolute/relative errors of the solution, which can be obtained a priori/a posteriori, respectively, (ii) it is based on a pseudo-tree, which is a widely used graph structure in complete DCOP algorithms, (iii) it is a one-shot type algorithm, and (iv) it has adjustable parameter  $p$ . The evaluation results illustrate that this algorithm can obtain better quality solutions and bounds compared to existing bounded incomplete algorithms, while the run time of this algorithm is shorter.

#### 1. はじめに

分散制約最適化問題 (Distributed Constraint Optimization Problem, DCOP) はマルチエージェントシステムにおける協調問題解決の基本的な枠組みである。この問題では、各エージェントは自身の変数を持ち、利得の総和を最大化するように変数への割当てを決定する。多くのマルチエージェントシステムの問題、特にセンサ網<sup>1)</sup> や会議スケジューリング<sup>2)</sup> を含む分散資源割当て問題が DCOP として形式化される。DCOP の解法として最適解を探索する ADOPT<sup>1)</sup>, DPOP<sup>2)</sup>, OptAPO<sup>3)</sup> 等の様々な厳密解法が提案されてきた。しかしながら、DCOP は NP-hard であるため、問題の規模に対して、計算/空間複雑度が指数関数的に増加する。そのため、大規模な問題に対して、比較的少ない計算で近似解を探索する非厳密解法を考える必要がある。DCOP の代表的な非厳密解法に DSA<sup>4)</sup>, MGM/DBA<sup>5),6)</sup>, ALS-DisCOP<sup>7)</sup> 等がある。

既存の非厳密解法のほとんどは解品質を保証しない。数少ない例外として DALO<sup>8)</sup>, bounded max-sum 解法<sup>9)</sup>, ADPOP<sup>10)</sup> がある。これらの解法の中でも、DALO は誤差の上界が事前に得られる唯一の非厳密解法である。すなわち、エージェントは近似解を得る前に、最適解に対する誤差の上界を得ることができる。また得られる誤差の上界は問題のインスタンスに依存しない。これに対し、bounded max-sum 解法および ADPOP は、誤差の上界が事後にのみ得られる非厳密解法である。すなわち、エージェントは近似解を求めた後に、最適解に対する誤差の上界を知ることができる。誤差の上界は事前に得られる方が望ましいが、多くの場合、事後に得られる誤差の上界の方がより精度が高い。

本論文では、近似解の新しい評価基準  $p$ -optimality に基づく非厳密解法を提案する。本解法は得られる解の絶対/相対誤差の上界をそれぞれ事前/事後に与えることができる。こ

<sup>†1</sup> 九州大学大学院システム情報科学府情報学専攻横尾研究室  
Graduate School of ISEE, Kyushu University

これらの誤差の上界は、制約グラフの誘導幅および各利得関数の値の最大値に基づいて与えられるが、問題のインスタンスには依存しない。誘導幅とは最適化問題の解法の複雑度を決定する指標である。本解法は擬似木に基づく解法である。擬似木とは DCOP の最適解を求める厳密解法で広く用いられているグラフ構造である。本解法は anytime 解法に頼ることなく、エージェント数  $n$  に関して多項式時間で実行可能な one-shot type の解法により、品質が十分高い解を得ることができる。このため、本解法は解精度を保証する品質が十分高い近似解を高速に求めたい場合に適している。さらに、本解法では解法中のパラメータ  $p$  を調整することにより、実行時間を犠牲にする代わりに、より高品質な解を得ることができる。

DALO は  $k$ -size/ $t$ -distance optimality<sup>8),11)</sup> と呼ばれる局所最適解の条件に基づく非厳密解法である。この解法は高品質な解を得るために、局所最適解を繰り返し求める anytime 解法であり、調整可能なパラメータ  $k/t$  を持つ。これに対し、本解法は one-shot type の解法である。また本解法では、よりタイトな誤差の上界を事前に得ることができる。

Bounded max-sum 解法は one-shot type の解法である。この解法は調整可能なパラメータを持たない。これに対し、本解法は調整可能なパラメータ  $p$  を持つ。また、本解法では誤差の上界を事前に得ることができる。よって、エージェントは実際に近似解を得る前に、パラメータ  $p$  を調整することで、より高品質な解を得ることができる。

本解法は ADPOP と類似している。ADPOP は one-shot type の解法であり、調整可能なパラメータを持つ。この解法はメッセージサイズを制限するために、変数間の制約辺を取り除く。これに対し、本解法は誘導幅を制限するために、変数間の制約辺を取り除く。さらに、本解法では誤差の上界を事前に得ることができるが、ADPOP では、どの制約辺を取り除くかをヒューリスティックを用いて決定するため、誤差の上界を事前に得ることができない。

以下に本論文の構成を示す。2 章では分散制約最適化問題およびグラフに関する基本用語を定義する。3 章では解品質を保証する非厳密解法および近似解の新しい評価基準  $p$ -optimality について述べる。4 章では実験、5 章では考察を行い、6 章では結論と今後の課題について述べる。

## 2. 準備

本章では、分散制約最適化問題およびグラフに関する基本用語を定義する。

定義 1 (分散制約最適化問題). 分散制約最適化問題は、エージェントの集合  $S$ , 変数の集合  $X$ , 二項制約の集合  $C$ , 二項利得関数の集合  $F$  により定義される。エージェント  $i$  は自身の

変数  $x_i$  を持つ。 $x_i$  は離散有限集合  $D_i$  に含まれる変数値をとる。制約  $(i, j)$  は  $x_i$  と  $x_j$  の間に制約があることを示す。制約で関係する 2 変数についての、ある割当て  $\{(x_i, d_i), (x_j, d_j)\}$  の利得は、二項利得関数  $r_{i,j}(d_i, d_j) : D_i \times D_j \rightarrow \mathbb{R}$  により定義される。すべての変数への割当て  $A$  に関して、

$$R(A) = \sum_{(i,j) \in C, \{(x_i, d_i), (x_j, d_j)\} \subseteq A} r_{i,j}(d_i, d_j)$$

を利得関数の合計値として、問題の最適解  $A^*$  は  $\arg \max_A R(A)$ , すなわち、 $R(A)$  を最大化する値の割当てである。

本論文では、エージェントと変数が 1 対 1 に対応することから、記述の簡略化のために、必要に応じて両者の区別をせずに用いる。また、すべての利得は非負とし、二項利得関数の値の上界値は制限されているものとする。すなわち、 $\forall i, \forall j$ , where  $(i, j) \in C$ ,  $\forall d_i \in D_i, \forall d_j \in D_j, 0 \leq r_{i,j}(d_i, d_j) \leq r_{max}$  が成立することを仮定する。

分散制約最適化問題はエージェント/変数をノードに、二項制約をリンクに対応させることにより、制約グラフを用いて表すことができる。本論文では、ある制約グラフから、いくつかの制約辺を取り除くことにより、得られるグラフを部分グラフとする。

グラフに関する基本用語を定義する。グラフ  $G = (V, E)$  とは、ノードの集合  $V = \{1, \dots, n\}$ , およびノード間のリンクの集合  $E$  により定義される。

定義 2 (ノード間の全順序関係). 全順序関係  $o$  はノードの列  $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$  の並べ替えであり、順序関係で先に出現するノードの方が、後に出現するノードより上位にあるという。また全順序関係  $o$  に関して、ノード  $i$  が  $j$  より上位であることを  $i \prec j$  と記述し、最上位のノードから  $i$  番目のノードを  $ord(i)$  と記述する。

定義 3 (祖先). グラフ  $G = (V, E)$ , 全順序関係  $o$ , ノード  $i \in V$  に関して、 $A(E, o, i) = \{j \mid (i, j) \in E \wedge j \prec i\}$  をノード  $i$  の祖先と呼ぶ。

定義 4 (順序に基づく弦グラフ). グラフ  $G = (V, E)$  と全順序関係  $o$  に関して、以下の性質が成立するときに、グラフ  $G$  は全順序関係  $o$  に基づく弦グラフであるという。

$$\forall i, \forall j, \forall k \in V, \text{ if } j, k \in A(E, o, i), \text{ then } (j, k) \in E.$$

定義 5 (順序に基づく誘導弦グラフ). グラフ  $G = (V, E)$  と全順序関係  $o$  に関して、以下の手続きによって得られる、全順序関係  $o$  に基づく弦グラフ  $G' = (V, E')$  を、グラフ  $G$  の

全順序関係  $o$  に基づく誘導弦グラフ<sup>\*1</sup>と呼ぶ.

(1) Set  $E'$  to  $E$ .

(2) choose each node  $i \in V$  from the last to the first based on  $o$  and apply the following procedure.

if  $\exists j, \exists k \in A(E', o, i)$  s.t.  $(j, k) \notin E'$ , then set  $E'$  to  $E' \cup \{(j, k)\}$ .

(3) Return  $G' = (V, E')$ .

誘導幅 (induced width) とは, グラフがどれくらい木に近いかを表すパラメータである<sup>12)</sup>. たとえば, 木の誘導幅は 1,  $n$  個のノードからなる完全グラフの誘導幅は  $n - 1$  となる. 定義 6 (順序に基づくグラフの幅). グラフ  $G = (V, E)$  と全順序関係  $o$ , ノード  $i \in V$  に関して,  $|A(E, o, i)|$  を全順序関係  $o$  に基づくノード  $i$  の幅と呼ぶ. また,  $\max_{i \in V} |A(E, o, i)|$  を, 全順序関係  $o$  に基づくグラフ  $G$  の幅と呼び,  $w(G, o)$  と記述する.

定義 7 (順序に基づくグラフの誘導幅). グラフ  $G = (V, E)$  と全順序関係  $o$  に関して, 全順序関係  $o$  に基づくグラフ  $G$  の誘導幅は, グラフ  $G$  と全順序関係  $o$  から得られる順序に基づく誘導弦グラフを  $G' = (V, E')$  として,  $w(G', o)$  で与えられる.

例 1 (順序に基づく誘導弦グラフの誘導幅). 図 1 (a) は 10 個のノードからなる制約グラフを表す. (b) は (a) の全順序関係  $o = 1 \prec \dots \prec 10$  に基づく誘導弦グラフを表す. ノード 10 の祖先ノード 7, 9 間には, 制約辺が存在しないため, 制約辺 (7, 9) が加えられる. 同様に, (b) にはいくつかの制約辺 (図中の点線) が加えられる. (b) の各ノードの幅の最大値は 3 である. よって, (b) の誘導幅は 3 となる.

擬似木は制約グラフに含まれるノード間に全順序関係を与えるようなグラフ構造である. 定義 8 (順序に基づく弦グラフの擬似木としての表現). 全順序関係  $o$  に基づく弦グラフ  $G = (V, E)$  は, 以下のように擬似木と見なすことができる.

(1) 全順序関係  $o$  で最上位のノードをルートノードとする.

(2) 各ノード  $i$  に関して,  $A(E, o, i)$  中で最下位のノード  $j$  を  $i$  の親とする.

定義 9 (後退辺). 全順序関係  $o$  に基づく弦グラフ  $G = (V, E)$  を擬似木と見なす際に, ノード  $i$  に関して, 親以外の祖先ノードとのリンクを  $G$  におけるノード  $i$  の後退辺と呼ぶ. また, これらの後退辺を, より上位のノードと結ばれているものから順に,  $G$  における *first back-edge*, *second back-edge*, ..., *k-th back-edge* と呼ぶ.

\*1 文献 12) では, このようなグラフを単に誘導グラフ (induced graph) と呼んでいるが, 誘導はグラフ理論では, より一般的な意味として用いられている. ここでは特定の用語, 誘導弦グラフ, として用いる.

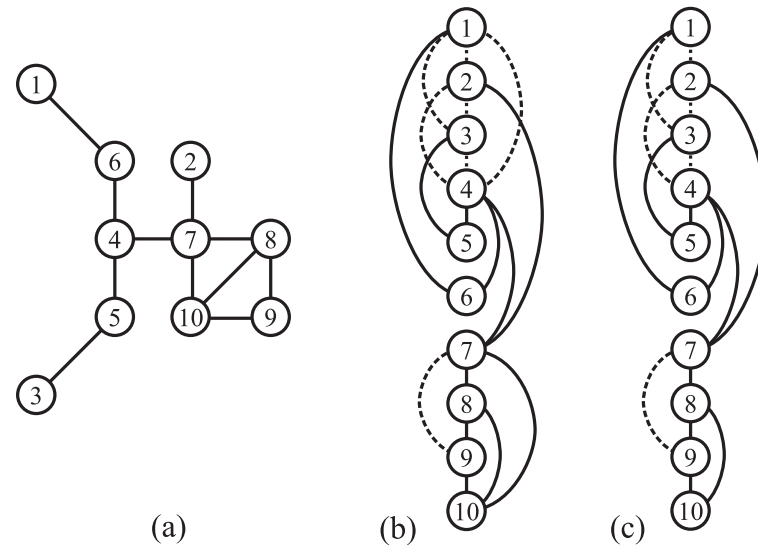


図 1 (a) は 10 個のノードからなる制約グラフを表す. (b) は (a) の全順序関係  $o = 1 \prec \dots \prec 10$  に基づく誘導弦グラフを表す. (b) の誘導幅は 3 である. (c) は (b) から制約辺 (1, 4) と (7, 10) を取り除いた (b) の部分グラフを表す. (c) では, 制約辺 (1, 4) と (4, 6) が存在するが制約辺 (1, 4) が存在しない. このため, (c) は順序に基づく弦グラフではない

Fig. 1 (a) shows a constraint graph with ten nodes. (b) shows the induced chordal graph of (a) based on  $o = 1 \prec \dots \prec 10$ . Induced width of (b) is three. (c) shows the subgraph of (b) obtained by removing edges (1, 4) and (7, 10). Since (1, 4) is missing despite the existence of (1, 6) and (4, 6), this graph is not chordal.

明らかに, 各ノードの後退辺の数は最大  $w(G, o) - 1$  本である.

### 3. 誘導幅に基づく精度保証付き非厳密解法

本章では, 解品質を保証する非厳密解法および近似解の新しい評価基準  $p$ -optimality を提案する. また, 本解法によって得られる解の絶対/相対誤差の上界をそれぞれ与える. 本解法は, あるグラフから, いくつかの制約辺を取り除くことにより, 誘導幅がパラメータ  $p$  によって制限されたグラフの最適解 ( $p$ -optimal な解) を, 元のグラフの近似解として用いる. 本解法では, グラフの誘導幅が制限されていることを保証するために, 順序に基づく誘導弦/弦グラフを用いる.

### 3.1 $p$ -optimal algorithm

本解法は以下の2つの段階によって構成される。

段階1: 順序に基づく誘導弦グラフから, いくつかの制約辺を取り除き, 誘導幅がパラメータ  $p$  によって制限された順序に基づく弦グラフを作る。

段階2: 段階1で得られたグラフの最適解を厳密解法を用いて求める。

段階1について記述する。ここでの目標は, 誘導幅が  $p$  になるような順序に基づく弦グラフを作る, かつ, 取り除く制約辺の数を制限できる, 制約辺の取り除き方を与えることである。一般に, このような制約辺の取り除き方は自明ではない。たとえば, ある誘導弦グラフから単純に, すべてのノードの後退辺の本数が  $p-1$  本以下になるように後退辺を取り除いたとする。このとき, 得られるグラフは弦グラフでない場合がある。よって, このグラフの誘導弦グラフには, いくつかの制約辺が加えられ, 誘導幅は  $p$  より大きくなることもある。例2(制約辺の取り除き方が自明でない例)。図1(c)は(b)から, 単純に制約辺(1,4)と(7,10)を取り除いた(b)の部分グラフを表す。(c)の各ノードの幅は2以下である。しかし, (c)では, 制約辺(1,6)と(4,6)が存在するが制約辺(1,4)が存在しない。このため, (c)は順序に基づく弦グラフではない。

段階1における誘導幅が制限された順序に基づく弦グラフの作り方を紹介する。

定義10 ( $p$ -reduced グラフ). 全順序関係  $o$  に基づく誘導弦グラフ  $G = (V, E)$  に関して, 以下の手続きによって得られるグラフ  $G' = (V, E')$  を  $G$  の  $p$ -reduced グラフと呼ぶ ( $1 \leq p \leq w(G, o)$ ).

- (1) Set  $E'$  to  $E$ .
- (2) repeat the following procedure  $w(G, o) - p$  times
  - For each  $i \in V$  where  $p + 1 \leq \text{ord}(i) \leq w(G, o)$  remove the first back-edge in  $G' = (V, E')$  from  $E'$  if there is one.
- (3) Return  $G' = (V, E')$ .

$p$ -reduced グラフに関して以下の定理が成立する。

定理1. 全順序関係  $o$  に基づく誘導弦グラフ  $G = (V, E)$ , 任意の  $1 \leq p \leq w(G, o)$ ,  $G$  の  $p$ -reduced グラフ  $G' = (V, E')$  に関して以下が成立する。

- (1)  $G'$  は全順序関係  $o$  に基づく弦グラフである。
- (2)  $G'$  の全順序関係  $o$  に基づくグラフの幅  $w(G', o)$  は  $p$  である。

証明.  $p$ -reduced グラフを得るために, 各ノード  $i$  ( $p + 1 \leq \text{ord}(i) \leq w(G, o)$ ) では, first

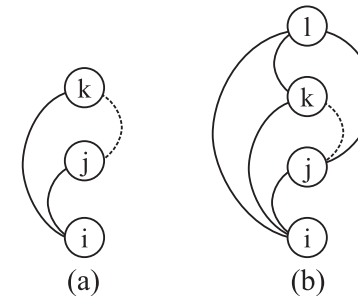


図2 (a) は  $j, k \in A(E'', o, i)$ ,  $(j, k) \notin E''$  が成立する  $p$ -reduced グラフ  $G'' = (V, E'')$  内のノードおよび制約辺を表す。(b) は制約辺  $(j, k)$  がノード  $j$  の first back-edge でないときの, グラフ  $G$  内のノードおよび制約辺を表す。 $G$  にはあるノード  $l$  が存在し,  $l \prec k$ ,  $(j, l) \in E$ ,  $(j, l) \notin E''$  が成立する  
 Fig. 2 (a) presents a part of  $p$ -reduced graph  $G'' = (V, E'')$ , where  $j, k \in A(E'', o, i)$ , and  $(j, k) \notin E''$ . (b) presents a situation where  $(j, k)$  is not  $j$ 's first back-edge in  $G$ , i.e., there exists node  $l$  s.t.  $l \prec k$ ,  $(j, l) \in E$ , and  $(j, l) \notin E''$ .

back-edge を  $w(G, o) - p$  回, 繰り返し取り除いている。幅  $w(G, o)$  を持つグラフでは, back-edge はただか  $w(G, o) - 1$  本しか存在しないので, 残りの back-edge の本数はただか  $p - 1$  本である。よって, ノード  $i$  の全順序関係  $o$  に基づく幅はただか  $p$  である。また, 少なくとも1つのノードにおいて, 最初の back-edge の本数は, ちょうど  $w(G, o) - 1$  本であり, 残りの back-edge の本数は  $p - 1$  となる。よって  $w(G', o)$  は  $p$  である。

次に,  $G'$  が全順序関係  $o$  に基づく弦グラフであることを示す。 $p$ -reduced グラフは, first back-edge を繰り返し削除することにより得られるため,  $G$  の各ノードから first back-edge を削除することによって得られるグラフ  $G'' = (V, E'')$  が, 全順序関係  $o$  に基づく弦グラフであることを示せばよい。以下, 背理法を用いてこのことを証明する。すなわち,  $\exists i \in V, \exists j, \exists k \in A(E'', o, i)$ , s.t.,  $(j, k) \notin E''$  を仮定して矛盾を導く(図2(a))。一般性を失うことなしに,  $k \prec j$  と仮定できる。

ここで,  $G = (V, E)$  は全順序関係  $o$  に基づく誘導弦グラフであることから,  $(j, k) \in E$  が成立し,  $(j, k)$  は  $G$  における  $j$  の first back-edge である。また,  $k \in A(E'', o, i)$  より,  $(i, k) \in E''$  が成立する。このため,  $l \prec k$  なるノード  $l$  が存在し,  $(i, l) \in E$  かつ  $(i, l) \notin E''$  が成立する。すなわち,  $(i, l)$  は  $G$  における  $i$  の first back-edge であり,  $E''$  では取り除かれている。さらに,  $G = (V, E)$  は全順序関係  $o$  に基づく誘導弦グラフであり,  $(i, l) \in E$ , かつ  $(i, j) \in E$  であるため,  $(j, l) \in E$  が成立する(図2(b))。しかしながら,  $l \prec k$  であるため,  $(j, k)$  は,  $G$  における  $j$  の first back-edge になりえず, 矛盾が生じる。よって,

$G'' = (V, E'')$  は全順序関係  $o$  に基づく弦グラフであることが得られる。 □

近似解の新しい評価基準  $p$ -optimality を紹介する。

定義 11 ( $p$ -optimality) 分散制約最適化問題  $\langle X, C, F \rangle$ , 全順序関係  $o$  に関して, 割当て  $A$  が  $p$ -optimal であるとは, 制約グラフを  $G = (X, C)$ , 全順序関係  $o$  で与えられる順序に基づく誘導弦グラフを  $G' = (X, C')$ ,  $G'$  の  $p$ -reduced グラフを  $G'' = (X, C'')$  として,  $A$  が  $G''$  における利得関数の合計値を最大化すること, すなわち, 任意の割当て  $A'$  に対して,  $R_{C''}(A) \geq R_{C''}(A')$  が成立することを意味する。

段階 2 について記述する。本解法は厳密解法を用いて得られる  $p$ -optimal な解を, 元の制約グラフの近似解として用いる。本解法では,  $p$ -optimal な解を求める際, どの厳密解法を用いてもかまわない。特に, 本解法では誘導幅が制限された擬似木が得られるので, ADOPT や DPOP 等の擬似木に基づく厳密解法を用いることは便利である。

### 3.2 最悪時の解の精度

本解法によって得られる解の絶対/相対誤差の上界をそれぞれ与える。絶対誤差 (absolute error) の上界は最適解との差により表され, 事前に与えることができる。すなわち, エージェントは近似解を得る前に, 最適解に対する誤差の上界を得ることができる。

定理 2. 分散制約最適化問題  $\langle X, C, F \rangle$ , その制約グラフ  $G = (X, C)$ , 全順序関係  $o$  に関して, 割当て  $A$  が  $p$ -optimal である場合,  $A$  の利得と最適解  $A^*$  の利得の間に以下の不等式が成立する。

$$R(A^*) - R(A) \leq r_{max} \times \sum_{k=1}^{w(G,o)-p} (|X| - (k + 1))$$

証明.  $A$  が  $p$ -optimal であることから, 全順序関係  $o$  で与えられる順序に基づく誘導弦グラフを  $G' = (X, C')$ ,  $G'$  の  $p$ -reduced グラフを  $G'' = (X, C'')$  として,  $R_{C''}(A^*) \leq R_{C''}(A)$  が成立する。また,  $C'$  は  $C$  にいくつかの制約辺を加えたものであり,  $C''$  は  $C'$  から, たかだか  $\sum_{k=1}^{w(G,o)-p} (|X| - (k + 1))$  本の制約辺を取り除いたものである。各制約辺の利得の最大値は  $r_{max}$  で制限されているため,

$$R(A^*) \leq R_{C''}(A^*) + r_{max} \times \sum_{k=1}^{w(G,o)-p} (|X| - (k + 1))$$

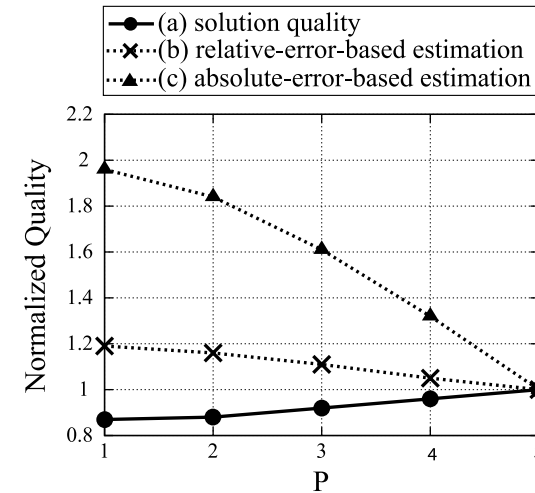


図 3 ノード数 20, 誘導幅 5, 制約密度 0.4 のグラフにおける  $p$ -optimal な解法の (a), (b) および (c) の評価。(a), (b) および (c) の値は 1 に近いほど望ましい

Fig. 3 (a), (b), and (c) in  $p$ -optimal algorithm for graphs with 20 nodes, induced width 5, and density 0.4. Value closer to 1 is desirable.

が成立し,  $R_{C''}(A^*) \leq R_{C''}(A) \leq R(A)$  より,

$$R(A^*) - R(A) \leq r_{max} \times \sum_{k=1}^{w(G,o)-p} (|X| - (k + 1))$$

が成立する。 □

相対誤差 (relative error) の上界は ADPOP<sup>10)</sup> と同様の方法を用いて与えることができる。ただし, この誤差の上界は事後にのみ与えることができる。すなわち, エージェントは近似解を求めた後に, 最適解に対する誤差の上界を知ることができる。直感的には, もしノード  $i$  の後退辺  $(i, j)$  が取り除かれたとすると, 単項制約を持たないノード  $j$  のコピー  $j'$  を作り, ノード  $i$  に新しい制約辺  $(i, j')$  をつなげる。もし  $j$  と  $j'$  間に等式制約を加えると, この問題は元の問題と同等である。本解法では, このような制約を無視することで, 緩い問題を得ることができる。ただし, この緩い問題の誘導幅は  $p$  である。変数間のいくつかの依存性を無視する方法は minibucket elimination<sup>12)</sup> に類似している。

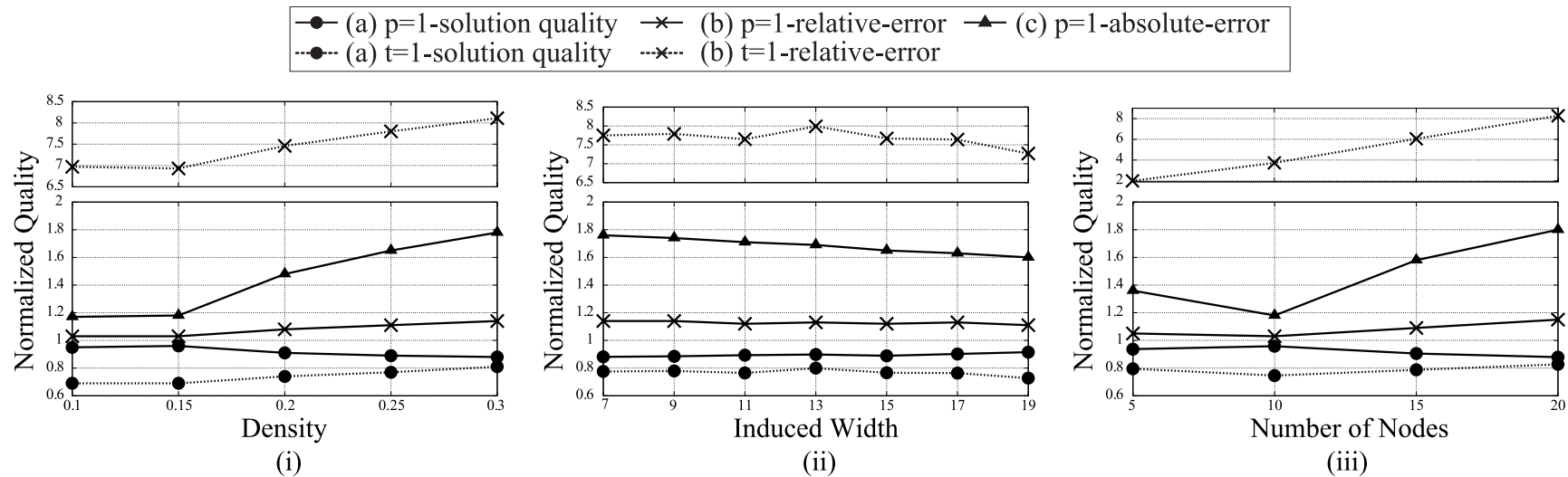


図 4 (i) ノード数 20, 誘導幅 5, (ii) ノード数 20, 制約密度 0.3, (iii) 誘導幅 3, 制約密度 0.3 のグラフにおける  $p = 1$ -optimal な解法と DALO- $t = 1$  の (a), (b) および (c) の評価. 図中の点線は DALO- $t = 1$  の実験結果を表す. (a), (b) および (c) の値は 1 に近いほど望ましい  
 Fig. 4 (a), (b), and (c) in  $p = 1$ -optimal algorithm and DALO- $t = 1$  for graphs with (i) 20 nodes, induced width 5, (ii) 20 nodes, density 0.3, and (iii) density 0.3, induced width 3. Broken line indicates results for DALO- $t = 1$ . Value closer to 1 is desirable.

#### 4. 評価実験

本章では, 本解法によって得られる解品質および最適解に対する誤差の上界を評価する. また, 本解法と DALO- $t^{13)}$  および bounded max-sum 解法<sup>9)</sup> との比較実験を行う. 実験における, 各変数のドメインサイズを 3 とし, 各制約の利得は 0 から 99 の整数値を一様分布の乱数により選択した. 問題のインスタンスは誘導幅を固定し, ランダムに生成した. 実験結果は 30 インスタンスの平均値を表す. ドメインサイズおよびノード数に関しては, DCOP の解法を評価するうえで, 一般的な値を用いている. 利得の範囲に関しては,  $r_{max}$  が大きくなる範囲を選び, ここでは  $r_{max} = 99$  とした. 誘導幅および制約密度に関しては, 問題設定により生成されるインスタンスの, ほとんどすべての範囲で実験を行った. 制約密度とは, あるグラフが持つエッジ数を  $m$ , そのグラフが持つ最大のエッジ数を  $n$  とし,  $m/n$  で与えられる. インスタンスの制約密度の最大値は誘導幅が固定されているため制限されている. 本解法 (段階 2) では FRODO<sup>14)</sup> (version 2.7.1) を用い, 厳密解

法 DPOP で解を求めた.  $t$ -distance-optimality は  $k$ -size-optimality を改善しているため<sup>8)</sup>, 実験では  $t$ -distance-optimal な解が得られる DALO- $t^{13)}$  を用いた.

一般に,  $p$ -optimality と  $t$ -distance optimality は異なる評価基準であるため両者の間に依存関係はない. すなわち,  $p$ -optimal な解は  $t$ -distance optimal になる必要はなく, また  $t$ -distance optimal な解が  $p$ -optimal になる保証もない. 本解法および DALO- $t$  は  $p$  および  $t$  の値を 1 としたとき, それぞれ最も速く求解可能である. 実験では, より高速に求解することを目的とし, 主に  $p$  および  $t$  の値を 1 としたときの比較を行った.

まず  $p$ -optimal な解法に関して, (a) 得られる解品質, (b) 相対誤差の上界に基づく最適解の推定値, (c) 絶対誤差の上界に基づく最適解の推定値を示す. (a), (b) および (c) の値は最適解によって正規化されており, (a) の値は 1 より小さく, (b) および (c) の値は 1 より大きくなる. 具体的には,  $R(A)$  を得られた利得,  $R(A^*)$  を実際の最適解,  $E_{rel}$  を相対誤差の上界,  $E_{abs}$  を絶対誤差の上界とする. このとき, (a), (b) および (c) の値はそれぞれ (a)  $R(A)/R(A^*)$ , (b)  $\frac{R(A)}{E_{rel} \cdot R(A^*)}$ , (c)  $\frac{R(A) + E_{abs}}{R(A^*)}$  で表される. また, (a), (b) および



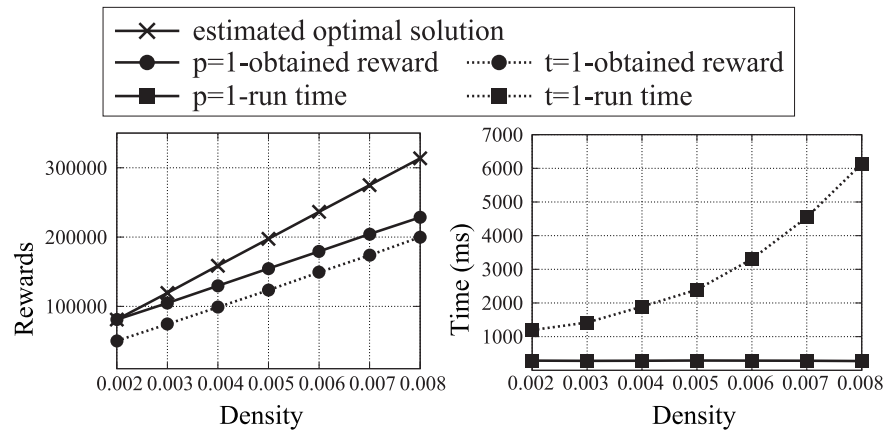


図5 ノード数 1,000, 誘導幅 5 のグラフにおける,  $p = 1$ -optimal な解法と DALO- $t = 1$  によって実際に得られた利得および実行時間. 図中の点線は DALO- $t = 1$  の実験結果を表す  
 Fig. 5 Obtained rewards (not normalized) and run time (ms) for graphs with 1,000 nodes and induced width 5. Broken line indicates results for DALO- $t = 1$ .

(c) の値はそれぞれ 1 に近いほど望ましい. 図 3 にノード数 20, 誘導幅 5, 制約密度 0.4 のグラフにおける各  $p$  での (a), (b) および (c) の値を示す. ノード数 20, 誘導幅 5 の設定では制約密度が 0.6 より大きいグラフは存在しない. 本解法では, 多くの場合, 品質が十分高い解および誤差の上界が得られることが分かった. 例外として,  $p$  が 1 のとき (c) の値は悪くなった. これは取り除かれる制約辺の数が大きいためである. このような場合, より高精度の解を保証するには,  $p$  の値を上げる必要がある.

次に,  $p = 1$ -optimal な解法と DALO- $t = 1$  の比較実験を行う. DALO- $t$  は anytime 解法であるため, 本論文では DALO- $t$  が最初に  $t$ -distance-optimal な解をみつけた時点での評価を行った. 図 4 (i) に制約密度を変えながら, ノード数 20, 誘導幅 5 のグラフにおける  $p = 1$ -optimal な解法と DALO- $t = 1$  の (a), (b) および (c) の値を示す. 図中の点線は DALO- $t = 1$  の実験結果を表す. 図 4 (i) より,  $p = 1$ -optimal な解法における (a), (b) および (c) の値は, DALO- $t = 1$  と比べ, より高品質および高精度であることが分かった. また  $p = 1$ -optimal な解法の (b) および (c) の値は制約密度が上がるにつれ悪くなった. これは制約密度の高いグラフでは取り除かれる制約辺の数が多いためである. 図 4 (ii) にノード数 20, 制約密度 0.3 のグラフにおける異なる誘導幅での実験結果を示す. 図 4 (ii) より, 誘導幅が

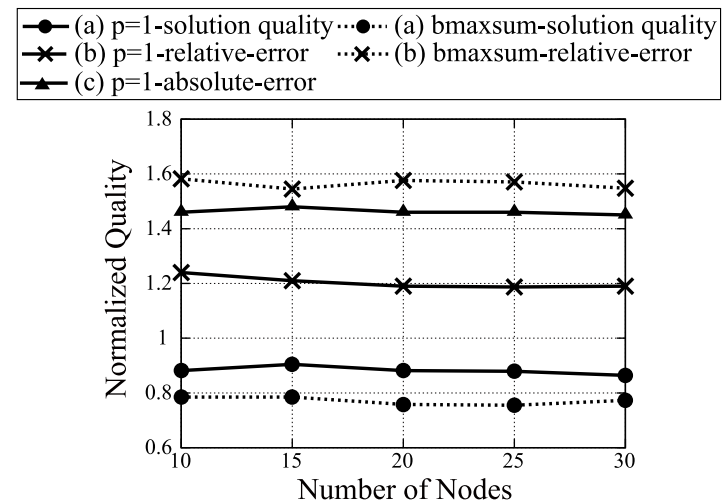


図6 誘導幅 2 のグラフにおける  $p = 1$ -optimal な解法と bounded max-sum (bmaxsum) 解法の (a), (b) および (c) の評価. 図中の点線は bounded max-sum 解法の実験結果を表す. (a), (b) および (c) の値は 1 に近いほど望ましい  
 Fig. 6 (a), (b), and (c) in  $p = 1$ -optimal algorithm and bounded max-sum algorithm for graphs with induced width 2. Broken line indicates results for bounded max-sum (bmaxsum) algorithm. Value closer to 1 is desirable.

大きくなっても,  $p = 1$ -optimal な解法における (a), (b) および (c) の値は, DALO- $t = 1$  と比べ, より高品質および高精度であることが分かった. 図 4 (iii) に誘導幅 3, 制約密度 0.3 のグラフにおける異なるノード数での実験結果を示す. ここでの結果は図 4 (i) での結果に類似していた.  $p = 1$ -optimal な解法における (b) および (c) の値はノード数が大きくなるにつれ悪くなった.

さらに, 最適解が求解困難な問題設定で比較実験を行う. 図 5 にノード数 1,000, 誘導幅 5 のグラフにおける異なる制約密度での実験結果を示す. ここでは最適解が求まらないため, 実際に得られた利得 (正規化されてない) を示す. ノード数 1,000, 誘導幅 5 の設定では制約密度が 0.01 より大きなグラフは存在しない. 図 5 より,  $p = 1$ -optimal な解法では, より多くの利得が, より速く得られることが分かった.

最後に,  $p = 1$ -optimal な解法と bounded max-sum (bmaxsum) 解法の比較実験を行う. 実験は文献 9) で用いられた色塗り問題と同じ設定で行う. ただし, ここでは各制約の

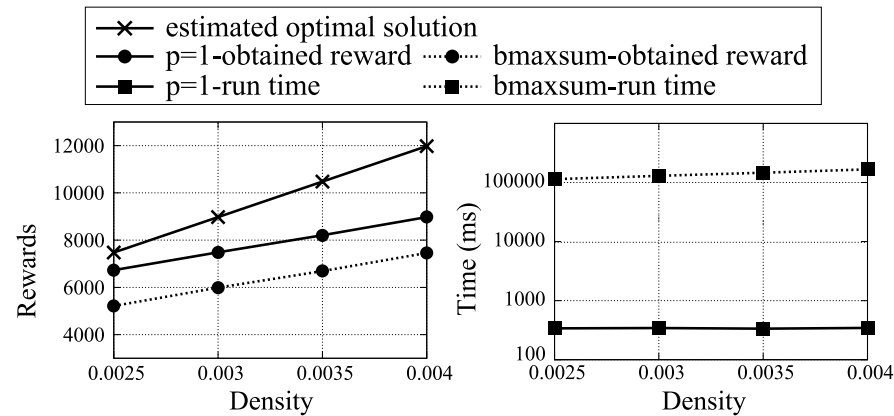


図7 ノード数 1,000, 誘導幅 2 のグラフにおける,  $p = 1$ -optimal な解法と bounded max-sum 解法によって実際に得られた利得および実行時間. 図中の点線は bounded max-sum 解法の実験結果を表す  
 Fig. 7 Obtained rewards (not normalized) and run time (ms) for graphs with 1,000 nodes and induced width 2. Broken line indicates results for bounded max-sum (bmaxsum) algorithm.

利得の範囲を  $[0, \dots, 6]$  とし,  $r_{max} = 6$  とした. 図 6 に誘導幅 2 における異なるノード数での実験結果を示す. 図中の点線は bounded max-sum 解法の実験結果を表す. 図 6 より,  $p = 1$ -optimal な解法における (a), (b) および (c) の値は, bounded max-sum 解法と比べ, より高品質および高精度であることが分かった.

さらに, 最適解が求解困難な問題設定で比較実験を行う. 図 7 にノード数 1,000, 誘導幅 2 のグラフにおける異なる制約密度での実験結果を示す. 図 5 での実験同様, ここでは最適解が求まらないため, 実際に得られた利得 (正規化されてない) を示す. ノード数 1,000, 誘導幅 2 の設定では制約密度が 0.004 より大きなグラフは存在しない. 図 7 より,  $p = 1$ -optimal な解法では, より多くの利得が, より速く得られることが分かった.

以上の実験結果から,  $p = 1$ -optimal な解法では, DALO- $t = 1$  および bounded max-sum 解法と比べ, (i) より高品質な解, (ii) より高精度な誤差の上界が, (iii) より速く得られることが分かった.

ここでは, ADPOP と本解法の比較は行わない. 本解法は ADPOP と類似しており, 得られる解品質および相対誤差の上界には, ほとんど差がない. ただし, 本解法の利点は, 誤差の上界が事前に得られることである.

## 5. 考 察

本章では, 本解法が DALO- $t = 1$  および bounded max-sum 解法と比べ, 良い結果を得た理由について考察する. DALO- $t$  や bounded max-sum 解法では元の問題に対し, 近似解を求めている. これに対し, 本解法では元の問題からいくつかの制約辺を取り除いた緩い問題に対し, 最適解を求めている. もし緩くなった問題と元の問題が似たような問題であるとき, すなわち, 誘導幅が小さいとき, 本解法は高品質な解を高速に求めることができると考える.

本解法では, 誤差の上界を得るための条件として, 事前に誘導幅と  $r_{max}$  が与えられていることを仮定している. これに対し,  $k/t$ -optimality によって事前に得られる誤差の上界は問題のインスタンスに依存しない. もし  $r_{max}$  が制約辺の利得の平均値に対し, 極端に大きい場合, 本解法によって事前に得られる絶対誤差の上界は悪くなると考える.

本解法では, 解法中のパラメータ  $p$  を調整することにより, 実行時間を犠牲にする代わりに, より高品質な解を得ることができる. たとえば, パラメータ  $p$  を大きくした場合, 元の問題から取り除かれる制約辺の数は少なくなる. このとき, 本解法は元の問題と似たような緩くなった問題を解くことで, より高品質な解を得ることができる. 一方,  $p$  が小さい場合の緩くなった問題の誘導幅は,  $p$  が大きい場合の緩くなった問題の誘導幅に比べ, 大きくなるので計算量/通信量は増加すると考えられる.

## 6. おわりに

本論文では, 分散制約最適化問題の精度保証付き非厳密解法および近似解の新しい評価基準  $p$ -optimality を提案した. また本解法によって得られる解の絶対/相対誤差の上界をそれぞれ与えた. 実験では  $p = 1$ -optimality における本解法が, 既存の  $t = 1$ -distance-optimality における DALO- $t$  および bounded max-sum 解法と比べ, より高品質な解および高精度な誤差の上界を与えることを示した. さらに本解法は, これらの非厳密解法と比べ, より高速に求解可能であることを示した.

今後の課題として, 本解法を前処理として用い, Adopt/BnB-Adopt<sup>15)</sup> の実行時間や DPOP のメッセージサイズがどれくらい減少するかを調べる. 文献 16) では同様のアイデア, すなわち, ADOPT に対して ADPOP を前処理として用いる解法が紹介されている.

謝辞 本研究を進めるにあたり, 日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (A) (課題番号 20240015), 基盤研究 (C) (課題番号 23500184), 挑戦的萌芽研究 (課題番号 23650073)



の助成を受けました。ここに深く感謝いたします。

### 参 考 文 献

- 1) Modi, P., Shen, W.-M., Tambe, M. and Yokoo, M.: ADOPT: Asynchronous distributed constraint optimization with quality guarantees, *Artificial Intelligence*, Vol.161, No.1-2, pp.149–180 (2005).
- 2) Petcu, A. and Faltings, B.: A scalable method for multiagent constraint optimization, *Proc. 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp.266–271 (2005).
- 3) Mailler, R. and Lesser, V.: Using cooperative mediation to solve distributed constraint satisfaction problems, *Proc. 3rd International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, pp.446–453 (2004).
- 4) Fitzpatrick, S. and Meertens, L.: Distributed coordination through anarchic optimization, *Distributed Sensor Networks: A Multiagent Perspective*, Lesser, V., Ortiz, C. and Tambe, M. (Eds.), pp.257–295, Kluwer Academic Publishers (2003).
- 5) Pearce, J., Tambe, M. and Maheswaran, R.: Solving multiagent networks using distributed constraint optimization, *AI Magazine*, Vol.29, No.3, pp.47–66 (2008).
- 6) Zhang, W., Wang, G., Xing, Z. and Wittenburg, L.: Distributed stochastic search and distributed breakout: properties, comparison and applications to constraint optimization problems in sensor networks, *Artificial Intelligence*, Vol.161, No.1-2, pp.55–87 (2005).
- 7) Zivan, R.: Anytime local search for distributed constraint optimization, *Proc. 23rd National Conference on Artificial Intelligence*, pp.393–398 (2008).
- 8) Kiekintveld, C., Yin, Z., Kumar, A. and Tambe, M.: Asynchronous algorithms for approximate distributed constraint optimization with quality bounds, *Proc. 9th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, pp.133–140 (2010).
- 9) Rogers, A., Farinelli, A., Stranders, R. and Jennings, N.: Bounded approximate decentralised coordination via the max-sum algorithm, *Artificial Intelligence*, Vol.175, No.2, pp.730–759 (2011).
- 10) Petcu, A. and Faltings, B.: Approximations in distributed optimization, *Proc. 11th International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming*, pp.802–806 (2005).
- 11) Pearce, J. and Tambe, M.: Quality guarantees on k-optimal solutions for distributed constraint optimization problems, *Proc. 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp.1446–1451 (2007).
- 12) Dechter, R.: *Constraint Processing*, Morgan Kaufmann Publishers (2003).
- 13) Yin, Z.: USC dcopt repository, University of Southern California, Department of

Computer Science (2008).

- 14) Léauté, T., Ottens, B. and Szymanek, R.: FRODO 2.0: An open-source framework for distributed constraint optimization, *Proc. 12th International Workshop on Distributed Constraint Reasoning*, pp.160–164 (2009).
- 15) Yeoh, W., Felner, A. and Koenig, S.: Bnb-adopt: An asynchronous branch-and-bound dcopt algorithm, *Journal of Artificial Intelligence Research*, Vol.38, pp.85–133 (2010).
- 16) Atlas, J., Warner, M. and Decker, K.: A memory bounded hybrid approach to distributed constraint optimization, *Proc. 11th International Workshop on Distributed Constraint Reasoning*, pp.37–51 (2008).

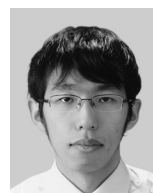
(平成 23 年 4 月 4 日受付)

(平成 23 年 9 月 12 日採録)



沖本 天太

2008 年 9 月ドイツ・フライブルグ大学情報学部の学部修士一貫教育である Diplom 課程修了。現在、九州大学大学院システム情報科学府博士後期課程在籍中。分散制約充足/最適化問題、ネットワーク科学、群論に関する研究に興味を持つ。人工知能学会学生会員。



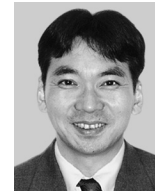
ジョ ヨンジュン

現在、九州大学大学院システム情報科学府博士前期課程在籍中。分散制約充足/最適化問題、ゲーム理論、意思決定論に関する研究に興味を持つ。



岩崎 敦 (正会員)

2002年神戸大学大学院自然科学研究科博士課程修了。同年より2004年までNTTコミュニケーション科学基礎研究所に勤務。2004年より九州大学大学院システム情報科学研究院助教。ゲーム理論, 学習, オークション, 実験経済学に関する研究に従事。博士(学術)。人工知能学会会員。



横尾 真 (フェロー)

1984年東京大学工学部電子工学科卒業。1986年同大学院修士課程修了。同年NTTに入社。1990~1991年ミシガン大学客員研究員。2004年より九州大学大学院システム情報科学研究院教授。マルチエージェントシステム, 制約充足問題に関する研究に従事。エージェントの合意形成メカニズム, 制約充足/分散制約充足等に興味を持つ。博士(工学)。1992年, 2002年人工知能学会論文賞, 1995年情報処理学会坂井記念特別賞, 1999年, 2005年人工知能学会全国大会優秀論文賞, 2004年 Association for Computing Machinery (ACM) Special Interest Group on Artificial Intelligence (SIGART) Autonomous Agent Research Award, 2005年ソフトウェア科学会論文賞, 2006年学士院学術奨励賞, 2010年人工知能学会業績賞, International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems influential paper award 受賞。情報処理学会フェロー, 人工知能学会, 日本ソフトウェア科学会, 電子情報通信学会, AAAI 各会員。2011年 AAAI フェロー。