Vol.2011-MPS-86 No.23
Vol.2011-BIO-27 No.23
2011/12/2

総頂点間短縮経路長を最大にする完全K分木連結ピン型組織構造の根との関係追加モデル

澤　田　　清[†1]

本研究では，高さ H の完全 K 分木の全兄弟が隣接化されている完全 K 分木連結ピン型組織構造に対して，組織のトップと下位メンバーとの間に関係を追加するモデルを提案する．ここでは，根と深さ N の一つの頂点との間に一辺を追加する場合に，完全 K 分木連結ピン型組織構造の全頂点対の最短経路の短縮長を合計した総頂点間短縮経路長を定式化し，総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さ N^* を求める．

A Model of Adding Relation between the Top and a Member of a Complete *K*-ary Linking Pin Organization Structure Maximizing Total Shortening Distance

Kiyoshi Sawada[†1]

This study proposes a model of adding relation between the top and a member of a complete K-ary linking pin organization structure where every pair of siblings in a complete K-ary tree of height H is adjacent. When a new edge between the root and a node with a depth N is added, we formulate the total shortening distance where the sum of shortening distances of the shortest paths between every pair of all nodes and obtaine an optimal depth N^* which maximizes the total shortening distance.

1. はじめに

企業などの組織の構造には，上下間の一元的な命令系統に基づくピラミッド組織構造や，ピラミッド組織構造に部門内の横方向の協力関係を付加した連結ピン型組織構造（Likert[1]の組織分類では，システム４と呼ばれている）などがある．ピラミッド組織構造は，構成主体を頂点に，上下の主体間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる[2]．また，連結ピン型組織構造は，根付き木の兄弟（同じ親を持つ頂点）を隣接化した構造として表すことができる．このとき，各頂点間の経路は組織内の主体間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，これらの組織構造に辺を追加することは，組織にあらかじめ設定された主体間関係以外の追加的関係の形成に相当する．

筆者らは，すでに，完全 K 分木 $(K = 2, 3, \ldots)$ のピラミッド組織構造および連結ピン型組織構造を対象とした関係追加モデル，(1) 同じ深さの２頂点間に辺を１本追加する，(2) 同じ深さの全頂点間に辺を追加する，について，総頂点間経路長（全頂点間の最短経路長の総和）を最小にする辺の追加位置を解析的に求めた[3),4)]．ここで，完全 K 分木は，すべての葉の深さが同じで，かつすべての内部頂点の子の数が K である K 分木を指す．また，深さは根からその頂点までの経路長（経路の辺の数）を表す．本研究では，高さ $H(H = 2, 3, \ldots)$ の完全 K 分木の全兄弟が隣接化されている完全 K 分木連結ピン型組織構造に対して，組織のトップである根と深さ $N(N = 2, 3, \ldots, H)$ の１つの頂点を隣接化するモデルを提案する．

完全 K 分木連結ピン型組織構造の２頂点 v_i と $v_j (i, j = 1, 2, \ldots, (K^{H+1} - 1)/(K - 1))$ の間の最短経路長を $l_{i,j}$ とすると（ただし $l_{i,j} = l_{j,i}$，$l_{i,i} = 0$），$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す．また，上述したように根と深さ N の頂点を隣接化した後の２頂点 v_i，v_j 間の最短経路長を $l'_{i,j}$ とすると，$l_{i,j} - l'_{i,j}$ は隣接化により２頂点間の最短経路長がどれだけ短縮されたかを表す．ここでは，これを２頂点間の短縮経路長と呼ぶ．さらに，全頂点間の短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j} - l'_{i,j})$ を，総頂点間短縮経路長と定義する．ここで，総頂点間短縮経路長を最大にすることは，総頂点間経路長を最小にすることを意味する．

2. で上述した完全 K 分木連結ピン型組織構造への隣接化モデルについて，総頂点間短縮経路長を定式化し，3. で総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さ N^* を求める．

2. 総頂点間短縮経路長の定式化

根と隣接化する深さ N の頂点を v_N とし，v_N の子孫の集合を V_1，v_N の親の祖先の集合を V_2 とする．ただし，子孫および祖先はその頂点自身も含む．また，完全 K 分木連結ピン型組織構造の全頂点集合から V_1，V_2 を除いた頂点の集合を V_3 とする．

このとき，V_1 と V_2 の頂点間の短縮経路長の総和は，

†1 流通科学大学
University of Marketing and Distribution Sciences

Vol.2011-MPS-86 No.23
Vol.2011-BIO-27 No.23
2011/12/2

$$A_H(N) = M(H-N)\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}(N-2i+1) \tag{1}$$

と表される．ただし，$M(h)(h=0,1,2,\ldots)$ は高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．また，$\lfloor\cdot\rfloor$ は $\cdot$ を超えない最大の整数を表す．次に，V_2 内の頂点間および，V_1 と V_3 の頂点間の短縮経路長の総和は，それぞれ，

$$B(N) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -i}(N-2i-2j+1), \tag{2}$$

$$C_H(N) = M(H-N)\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}(K-1)M(H-i)(N-2i) \tag{3}$$

で与えられる．ただし，$\sum_{i=1}^{0}\cdot = 0$ と定義する．さらに，V_2 と V_3 の頂点間および，V_3 内の頂点間の短縮経路長の総和は，それぞれ，

$$\begin{aligned} D_H(N) = &\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor -1}(K-1)M(H-i)\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor -i}(N-2i-2j) \\ &+ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}(K-1)M(H-N+i-1)\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor -i+1}(N-2i-2j+2), \end{aligned} \tag{4}$$

$$E_H(N) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1}(K-1)M(H-N+i-1)\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -i}(K-1)M(H-j)(N-2i-2j+1) \tag{5}$$

となる．ただし，$\sum_{i=1}^{-1}\cdot = 0$ と定義する．

以上より，総頂点間短縮経路長 $S_H(N)$ は，

$$S_H(N) = A_H(N) + B(N) + C_H(N) + D_H(N) + E_H(N) \tag{6}$$

と定式化される．

3. 最適深さ

2. で定式化した総頂点間短縮経路長 $S_H(N)$ を最大にする頂点深さ N^* を求める．

深さ N を $N=2L$（ただし，$L=1,2,\ldots,\lfloor \frac{H}{2} \rfloor$）と $N=2L+1$（ただし，$L=1,2,\ldots,\lfloor \frac{H-1}{2} \rfloor$）の 2 通りの場合に分けて考える．このとき，次の補題 1 と補題 2 が成り立つ．

補題 1

(i) $L=1$ のとき，$S_H(2L) < S_H(2L+1)$ である．

(ii) $L \geq 2$ のとき，$S_H(2L) > S_H(2L+1)$ である．ただし，$L=2,3,\ldots,\lfloor \frac{H-1}{2} \rfloor$ である．

補題 2 $L \geq 2$ のとき，$S_H(2L) > S_H(2L+2)$ であるので（ただし，$L=2,3,\ldots,\lfloor \frac{H}{2} \rfloor - 1$），$L \geq 2$ の中で $S_H(2L)$ を最大にする L は $L^*=2$ である．

補題 1 の (i) より，$H \geq 3$ のとき，$N \leq 3$ の中で $S_H(N)$ を最大にする N は $N^*=3$ である．また，補題 1 の (ii) および補題 2 より，$H \geq 4$ のとき，$N \geq 4$ の中で $S_H(N)$ を最大にする N は $N^*=4$ である．また，$S_H(3)$ と $S_H(4)$ について，次の補題 3 が成り立つ．

補題 3

(i) $H=4$ のとき，$S_H(3) > S_H(4)$ である．

(ii) $H \geq 5$ のとき，$S_H(3) < S_H(4)$ である．

以上の補題より，次の定理 4 を得る．

定理 4

(i) $H=2$ のとき，$S_H(N)$ を最大にする N は $N^*=2$ である．

(ii) $3 \leq H \leq 4$ のとき，$S_H(N)$ を最大にする N は $N^*=3$ である．

(iii) $H \geq 5$ のとき，$S_H(N)$ を最大にする N は $N^*=4$ である．

参考文献

1) Likert, R. and Likert, J.G.: *New Ways of Managing Conflict*, McGraw-Hill, New York (1976).
2) Takahara, Y. and Mesarovic, M.: *Organization Structure: Cybernetic Systems Foundation*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2003).
3) Sawada, K. and Wilson, R.: Models of Adding Relations to an Organization Structure of a Complete K-ary Tree, *European Journal of Operational Research*, Vol.174, No.3, pp.1491–1500 (2006).
4) Sawada, K.: Adding Relations in the Same Level of a Linking Pin Type Organization Structure, *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, Vol.38, No.1, pp.20–25 (2008).