

テクニカルノート

情報エントロピーと不平等指数について

— 森 哲 男^{†1}

厚生経済学では所得分布の不平等の測り方に相当な関心が注がれてきた．一般化エントロピー指数はそのための不平等測度のクラスであり，その要素としては多くの有名な測度，たとえば，タイル指数，アトキンソン指数を含み，結果，所得分布の不平等を測る尺度として重宝されてきた．この一般化エントロピー指数は厚生経済学の中で，情報理論から独立して開発された指数ではあるが，本ノートではこの指数がレニーのエントロピーと等価であることを示す．また，所得分布変化測度としてカウエルにより提案された測度はレニー情報量（ダイバージェンス）と等価であることを示す．

On Information Entropy and Inequality Measures

TETSUO ICHIMORI^{†1}

There has been considerable interest in the ways of measuring the inequality in the distribution of income. The generalized entropy index is a general formula for measuring income inequality. It contains various well-known inequality indices, for example, the Theil index and the Atkinson index. In this note, it is shown that the generalized entropy index is ordinally equivalent to the Rényi entropy. In addition, it is shown that the measurement of distributional change proposed by Cowell is ordinally equivalent to the Rényi divergence.

1. はじめに

経済学には厚生経済学という分野がある．そこでは，所得格差の測り方に相当な関心が注がれてきた．所得格差に対する適切な測度が定義できれば，たとえば，現在の日本の所得

分布と 30 年前の所得分布を比較して，この 30 年間に，格差は縮小したのか，拡大したのかが判明する．あるいは，アメリカの所得分布と日本のそれと比較して，両国の所得格差を比較することもできる．

そのため，厚生経済学では，所得格差を計量する指数（測度）がたくさん提案されてきた．その中で，最も有名なものの 1 つとしてタイル指数が知られている．これが本質的にシャノンのエントロピーそのものであることは既知であるが，アトキンソン指数や一般化エントロピー指数などがレニーのエントロピーと等価であることは知られていない．あるいは，ある所得分布が変化したとき，たとえば，課税前と課税後の所得分布を考えたとき，両者間の分布変化測度がカウエルにより提案されているが，それはレニー情報量（ダイバージェンス）と等価であることも知られていない．本ノートの目的はこれらの情報量と経済指数との関連性を明らかにすることである．

2. タイル指数

所得分布 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を考える．ここで， $n \geq 1$ は人数を表し， $x_i \geq 0$ は個人 i の所得を表す．この所得分布の格差，すなわち，不平等を測る指数 T としてタイルは，所得の平均値を $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n > 0$ として

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\bar{x}} \log \frac{x_i}{\bar{x}}$$

を 1967 年に提案した¹⁾．あるいは，すべての個人の総所得 $X = \sum_{i=1}^n x_i$ に対して，個人 i の所得の割合 $s_i = x_i / X$ を用いて所得分布 $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ を表現すれば，タイル指数は

$$T = \sum_{i=1}^n s_i \log n s_i$$

と書き換え可能である．これは全員の所得が同じ場合，すなわち，すべての i に対し $s_i = 1/n$ であれば，タイル指数 T はゼロになり，1 人の個人が全所得をすべてとれば $T = \log n$ となる（ただし， $0 \log 0 \equiv 0$ と約束する）．すなわち， $0 \leq T \leq \log n$ であり，所得格差がないとき T は最小値ゼロをとり，格差が最大のとき最大値 $\log n$ の値をとる．

一方，シャノンは確率分布 $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ に対して情報エントロピー $H(p) = \sum_{i=1}^n -p_i \log p_i$ を 1948 年に提案した²⁾．すべての確率が $1/n$ に近づくときエントロピーは増大し，最大値 $\log n$ に近づく．情報理論や統計力学ではエントロピーは無秩序の尺度で

^{†1} 大阪工業大学

Osaka Institute of Technology

あり, 所得分布のばらつきを所得分布の無秩序と見なせば, エントロピーを用いて所得分布の不平等を表すことも可能である. ただし, 所得格差がないときは不平等指標として値をゼロにとらせたいので, タイルは最大値 $\log n$ からそのエントロピーを差し引いた. つまり, 彼は不平等指数として $T = \log n - H(s) = \sum_{i=1}^n s_i \log n s_i$ を定義した.

いま述べたように, タイル指数はシャノンのエントロピーそのものではあるが, 厚生経済学では非常に有名で, 所得の不平等指数として, 最もよく使われている指数の 1 つである. この指数の優れている点はグループごとに分解可能な点である. たとえば, 日本全体の所得の不平等は 47 都道府県の所得の不平等に分解ができ, どの都道府県が不平等に大きく寄与しているかが一目瞭然となる.

3. アトキンソン指数

アトキンソン³⁾ は以下のようにして, 所得分布の不平等指数を定義した. まず, 彼は所得 x を受け取る個人の効用関数として

$$U_\varepsilon(x) = \frac{x^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon \neq 1, \varepsilon \geq 0$$

をもちいた. これは相対的危険回避度一定の効用関数と呼ばれるもので, ε は相対的危険度を示す非負のパラメータである. 極限をとることにより $\varepsilon = 1$ では $U_1(x) = \log x$ とする. 所得分布 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対して, アトキンソンは全員の効用の和 $\sum_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i)$ を社会厚生関数として定義した. もし, 全員が同じ所得 ξ_ε を得ると仮定すれば, 全員の平均所得 $\bar{x}$ 以下の所得で同じ水準の社会厚生を実現することができる. すなわち, $nU_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i)$ の解は $x = \xi_\varepsilon \leq \bar{x}$ となる. 具体的に ξ_ε を求めると

$$\xi_\varepsilon = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{1-\varepsilon}}{n} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon \neq 1, \varepsilon \geq 0$$

となり, $\varepsilon = 1$ ならば, $\xi_1 = \exp(\sum_{i=1}^n \log x_i / n)$ となる. このとき, 所得分布の不平等指数 A_ε としてアトキンソンは $A_\varepsilon = 1 - \xi_\varepsilon / \bar{x}$ を定義した. この指数は $0 \leq A_\varepsilon \leq 1$ と正規化されており, 全員の所得が等しければ $\xi_\varepsilon = \bar{x}$ となり, アトキンソン指数は $A_\varepsilon = 0$ となる. A_ε を明示すれば

$$A_\varepsilon = 1 - \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\bar{x}} \right)^{1-\varepsilon} \right\}^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon \neq 1, \varepsilon \geq 0$$

となり, $\varepsilon = 1$ ならば, $A_1 = 1 - \exp(\sum_{i=1}^n \log x_i / n) / \bar{x}$ となる. アトキンソン指数は社会厚生関数を用いたアプローチということで高く評価されている.

4. 一般化エントロピー指数

タイル指数はシャノンのエントロピーと等価であることを述べたが, タイル指数 (エントロピー) を一般化し, 所得の不平等を測る指数として「一般化エントロピー指数」が何人かの研究者により 1980 年ごろ考えられた⁴⁾⁻⁷⁾. これは $-\infty < \alpha < +\infty$ をパラメータに持ち, その形は

$$I_\alpha = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ 1 - \left(\frac{x_i}{\bar{x}} \right)^\alpha \right\}, \quad \alpha \neq 0, 1$$

で与えられる. α をそれぞれ 1 と 0 に漸近させると, I_1 はタイル指数 T に等しくなり, I_0 は平均対数偏差 (MLD)

$$I_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{\bar{x}}{x_i} \right)$$

に等しくなる. これはタイルの第 2 指数ともいわれ, これも不平等指数としてよく知られている. さらに, $\alpha \leq 1$ の範囲ではこの I_α を単調変換したものがアトキンソン指数になる. 実際,

$$A_\varepsilon = 1 - \{1 - \alpha(1-\alpha)I_\alpha\}^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \varepsilon = 1 - \alpha \geq 0, \varepsilon \neq 1$$

および

$$A_1 = 1 - e^{-I_0}$$

の関係が成り立つ.

以上のように, 一般化エントロピー指数は, 所得不平等指数として有益と認定されているタイル指数, 平均対数偏差, あるいは, アトキンソン指数を含むという意味で重要視されている. また, グループごとに分解可能な性質も保持している. 一般化エントロピー指数もすべての個人の所得が同じであれば値がゼロになる.

以下の議論で必要になるので, 一般化エントロピー指数を所得の割合 $s_i = x_i / X$ を用いて表す. $X = n\bar{x}$ は総所得である. $x_i / \bar{x} = n s_i$ なので,

$$I_\alpha = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n s_i^\alpha}{n^{1-\alpha}} \right), \quad \alpha \neq 0, 1$$

と書き換えられ、さらに、 α が 0 に漸近すると $I_0 = (\sum_{i=1}^n -\log ns_i)/n$ と書ける。 I_1 はすでに与えた。これより、一般化エントロピー指数 I_α ($\alpha \neq 0, 1$) の最大値はすべての所得 X を独り占めする場合であることより、

$$\frac{n^{\alpha-1} - 1}{\alpha(\alpha-1)} = \frac{1 - \frac{1}{n^{1-\alpha}}}{\alpha(1-\alpha)} > 0 \quad \alpha \neq 0, 1$$

となる。 I_1 の最大値は $\log n$ である。ただし、 I_0 は非有界である。

一般に、不平等指数の値、あるいは、不平等測度といってもよいが、その値そのものは重要視されていない。実際、ここで述べた不平等指数の値は完全平等の場合は必ずその最小値ゼロをとる。完全平等の場合は、指数が有界のとき、その最大値をとるが、その値は指数により異なっている。そのような意味で、2 つの異なる不平等指数は単調変換に関して不変であれば、両者は同じ指数と見なしている。ここで、2 つの不平等指数 I と J に対して、 $J = f(I)$ となる（あるいは、 $I = f(J)$ となる）狭義増加関数あるいは狭義減少関数 f が存在すれば、両者は単調変換に関して不変という。以下では、1960 年に発表されたレニーのエントロピーと一般化エントロピー指数が単調変換に関して不変であることを示す。

レニーはシャノンのエントロピーを拡張した⁸⁾。確率分布 $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ および正のパラメータ α に対して、エントロピーとして

$$H_\alpha(p) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right), \quad \alpha \neq 1, \alpha > 0$$

を定義した。 $\alpha = 1$ のときの $H_1(p)$ はシャノンのエントロピーに等しい。明らかに、正の範囲 ($\alpha > 0$) で、 $0 \leq H_\alpha(p) \leq \log n$ が成り立つ。

次に、 $p_i = s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ とおくと、レニーのエントロピーは一般化エントロピー指数をもちいて

$$H_\alpha(s) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\frac{1 - \alpha(1-\alpha)I_\alpha}{n^{\alpha-1}} \right), \quad \alpha \neq 1, \alpha > 0$$

と表現できる。 $\alpha = 1$ のときは、以前に述べたように $H_1(s) = \log n - I_1$ である。

$$y = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\frac{1 - \alpha(1-\alpha)x}{n^{\alpha-1}} \right), \quad \alpha \neq 1, \alpha > 0$$

とおけば、 y は x に関して狭義単調減少していることが分かる。以上のことから、 $\alpha > 0$ の

範囲では、レニーのエントロピーと一般化エントロピー指数は単調変換に関して不変であることが示された。

さらにレニーのエントロピーを拡張して、すべての α の範囲で一般化エントロピー指数と等価であることを示す。レニーのエントロピーを

$$H_\alpha^*(p) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \log \left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right), \quad \alpha \neq 0, 1$$

と拡張する。以前と同じように、 $p_i = s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ とおくと

$$H_\alpha(s) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \log \left(\frac{1 - \alpha(1-\alpha)I_\alpha}{n^{\alpha-1}} \right), \quad \alpha \neq 1, \alpha > 0$$

と書ける。

$$y = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \log \left(\frac{1 - \alpha(1-\alpha)x}{n^{\alpha-1}} \right), \quad \alpha \neq 0, 1$$

とおけば、 y は x に関して狭義単調減少していることが分かる。さらに、

$$H_1^*(s) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} H_\alpha^*(s) = -\log \left(\sum_{i=1}^n s_i \log s_i \right) = \log n - I_1$$

であり、また、

$$H_0^*(s) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_\alpha^*(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log s_i = -\log n - I_0$$

であるので、すべての α の範囲で（拡張された）レニーのエントロピーと一般化エントロピー指数は単調変換に関して不変である。

5. 分布変化測度

カウエルは一般化エントロピー指数を用いて、所得分布の変化測度を定義した⁹⁾。たとえば、課税前の所得分布 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ から課税後の所得分布 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ への変化を測りたい。累進課税の税率がときどき変わるが、租税関数の変化に対して、所得分布の変化を測ることは興味ある問題である。このような目的でカウエルは次のような測度を提案した。パラメータ $-\infty < \alpha < +\infty$ を持つとして、 x から y に変化したとき ($x \rightarrow y$) の所得分布変化の測度を

$$J_{\alpha}(x, y) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\bar{y}} \left\{ 1 - \left(\frac{\bar{x}y_i}{\bar{y}x_i} \right)^{\alpha-1} \right\}, \quad \alpha \neq 0, 1$$

と定義した． α をそれぞれ 1 と 0 に漸近させると，

$$J_1(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\bar{y}} \log \left(\frac{\bar{x}y_i}{\bar{y}x_i} \right)$$

となり，

$$J_0(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\bar{x}} \log \left(\frac{\bar{y}x_i}{\bar{x}y_i} \right)$$

となる．

さらに，所得の割合をもちいて，これらを書きなおしてみる． $s_i = x_i/(n\bar{x})$, $t_i = y_i/(n\bar{y})$, $i = 1, 2, \dots, n$ をもちいると

$$J_{\alpha}(s, t) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{t_i^{\alpha}}{s_i^{\alpha-1}} \right), \quad \alpha \neq 0, 1$$

となる．さらに，

$$J_1(s, t) = \sum_{i=1}^n t_i \log \left(\frac{t_i}{s_i} \right)$$

となり，

$$J_0(s, t) = \sum_{i=1}^n s_i \log \left(\frac{s_i}{t_i} \right)$$

となる．

この最後の 2 式を見れば，これらは情報理論で有名なカルバック・ライブラー情報量¹⁰⁾そのものである．2 つの確率分布 $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ と $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ に対して，この情報量は

$$D(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{p_i}{q_i}$$

と定義されている．この量は p, q に関して対称ではなく， $D(p, q) \neq D(q, p)$ である．だから， $D(p, q)$ は p から q へのカルバック・ライブラー情報量と呼ばれる．また， p から q への準距離ともいわれる．すると，所得割合 s から t への変化測度 $J_1(s, t)$ は， s と t を確率分布とみたときの s から t へのカルバック・ライブラー情報量と見なせる．一方，変化測度 $J_0(s, t)$ は， t から s へのカルバック・ライブラー情報量と見なせる．最後に，所得割合 s から t への変化測度 $J_{\alpha}(s, t)$, ($\alpha \neq 1, 0$) について考える．

レニーは論文 8) のなかで，カルバック・ライブラー情報量を

$$D_{\alpha}(p, q) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i^{\alpha-1}}{p_i^{\alpha}} \right), \quad \alpha \neq 1, \alpha > 0$$

と一般化した． $\alpha \rightarrow 1$ のとき $D_1(p, q) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} D_{\alpha}(p, q) = D(p, q)$ となり，カルバック・ライブラー情報量に等しくなる．

$p = s, q = t$ とおいたとき，上記のレニー情報量 $D_{\alpha}(s, t)$ はカウエルの分布変化測度 $J_{\alpha}(s, t)$ を用いて

$$D_{\alpha}(s, t) = \frac{1}{1-\alpha} \log (1 - \alpha(1-\alpha)J_{\alpha}(s, t)), \quad \alpha \neq 1, \alpha > 0$$

と表現できる．いま，

$$y = \frac{1}{1-\alpha} \log (1 - \alpha(1-\alpha)x), \quad \alpha \neq 1, \alpha > 0$$

とおくと， y は x の狭義減少となるので， $D_{\alpha}(s, t)$ は $J_{\alpha}(s, t)$ の単調変換したものになる．つまり， $\alpha > 0$ の範囲では両方の尺度は等価ということである．

さらに，レニー情報量を

$$D_{\alpha}^{*}(p, q) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \log \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i^{\alpha-1}}{p_i^{\alpha}} \right), \quad \alpha \neq 1, 0$$

と拡張する．上記同様， $p = s, q = t$ とおくと

$$D_{\alpha}^{*}(s, t) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \log (1 - \alpha(1-\alpha)J_{\alpha}(s, t)), \quad \alpha \neq 1, 0$$

となる．また，

$$y = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \log(1 - \alpha(1-\alpha)x), \quad \alpha \neq 1, 0$$

とおくと， y は x の狭義減少となるので， $D_\alpha^*(s, t)$ は $J_\alpha(s, t)$ の単調変換したものになる． $\alpha \rightarrow 1$ のとき

$$D_1^*(p, q) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} D_\alpha^*(p, q) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \log \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^\alpha q_i \right) = D(p, q)$$

となり，さらに， $\alpha \rightarrow 0$ のときも

$$D_0^*(p, q) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \log \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{q_i} \right)^\alpha q_i \right) = D(q, p)$$

となり，どちらの場合もカルバック・ライブラー情報量に等しくなる．すなわち， $D_1^*(s, t) = J_1(s, t)$ ， $D_0^*(s, t) = J_0(s, t)$ となる．よって， $\alpha = 1, 0$ の場合も考慮に入れると， α のすべての範囲でカウエルの分布変化測度と（拡張された）レニー情報量は等価ということになる．

6. あとがき

レニーのエントロピーとレニー情報量が発表されてから約 20 年後に，情報理論とはまったく独立に，一般化エントロピー指数やカウエルの分布変化測度が公表されている．それから，約 30 年が経過しているが，両者間の関係が明らかにされてこなかったことは少し不思議である．まったく異なる分野で，本質的には等価な測度が発表されたことは大変興味深い．いい換えれば，それぞれの尺度はそれぞれの分野で重要な価値があるということを再確認したといえる．

謝辞 査読者の方から，一般的な不平等測度に関する非常に貴重な情報や助言をいただいた．これらは今後の研究に活かしたい．ここに深く感謝の意を表する．

参 考 文 献

- 1) Theil, H.: *Economics and Information Theory*, North-Holland, Amsterdam (1967).
- 2) Shannon, C.E.: A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, Vol.27, pp.379–423, 623–656 (1948).
- 3) Atkinson, A.B.: On the Measurement of Inequality, *Journal of Economic Theory*, Vol.2, pp.244–263 (1970).
- 4) Bourguignon, F.J.: Decomposable Income Inequality Measures, *Econometrica*, Vol.47, pp.901–920 (1979).
- 5) Shorrocks, A.F.: The Class of Additively Decomposable Inequality Measures, *Econometrica*, Vol.48, pp.613–625 (1980).
- 6) Cowell, F.A.: On the Structure of Additive Inequality Measures, *Review of Economic Studies*, Vol.47, pp.521–531 (1980).
- 7) Cowell, F.A. and Kuga, K.: Inequality Measurement: An Axiomatic Approach, *European Economic Review*, Vol.15, pp.287–305 (1981).
- 8) Rényi, A.: On Measures of Entropy and Information, *Proc. 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability*, pp.547–561 (1960).
- 9) Cowell, F.A.: Generalized Entropy and the Measurement of Distributional Change, *European Economic Review*, Vol.13, pp.147–159 (1980).
- 10) Kullback, S. and Leibler, R.A.: On Information and Sufficiency, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol.22, pp.79–86 (1951).

(平成 23 年 5 月 16 日受付)

(平成 23 年 9 月 12 日採録)



一森 哲男（正会員）

昭和 28 年生．昭和 57 年大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻博士後期課程修了．同年広島大学工学部助手．昭和 60 年より大阪工業大学工学部専任講師．昭和 63 年より大阪工業大学工学部助教授．平成 8 年より大阪工業大学情報科学部教授．システムの最適化に関する研究に従事．工学博士．昭和 62 年日本オペレーションズ・リサーチ学会事例研究奨励賞受賞．日本オペレーションズ・リサーチ学会，日本応用数理学会，日本経営工学会各会員．