

単位球面上における 接線方向の指定による空間曲線の生成

小林 勇貴[†] 吉田 典正[†]
齋藤 隆文^{††}

本研究では、単位球面上における接線方向を指定することによって空間曲線を生成する手法を提案する。単位球面上の接線方向は、単位4元数 Bézier 曲線によって指定する。提案手法は、従来の手法よりも、曲線形状をより直観的に捉えることができる。また、最適化によって指定された端点位置および接線方向を満足するような空間曲線の生成手法についても述べる。

A Generation Method of Space Curves by Tangential Direction on a Unit Sphere

Yuki Kobayashi[†], Norimasa Yoshida[†]
and Takafumi Saito^{††}

This paper presents a method for designing space curves by specifying tangential directions on the unit sphere. The tangents are specified by unit quaternion Bézier curves. The proposed method can more intuitively design the shape of the curve than the previous method. We also propose a method for drawing a curve segment with a specified position and their tangents using an optimization.

[†] 日本大学, Nihon University

^{††} 東京農工大学 Tokyo University of Agriculture and Technology

1. はじめに

Farin の Curves and Surfaces for CAGD において、fair な曲線とは、「曲率プロットが連続で、少ない数の単調領域を持つ曲線」として定義されている³⁾。自由曲線において、曲率の制御は容易ではないため、平面曲線に関して様々な研究が行われている。空間曲線において曲率を制御することに関する研究は、3 節において述べるが、あまり多く存在していない。平面曲線と同様に、自由曲線を用いて空間曲線を生成することは容易であるが、生成される空間曲線の曲率や振率の制御をすることは容易ではない。曲率および振率プロットを指定し積分することによって曲線を生成することはできるが、曲線形状を推定することは容易ではない。

本研究では、単位球面上に接線方向を指定し、それを積分することによって空間曲線を生成する手法を提案する。接線ベクトルの角速度は曲率 κ に相当し、従法線の角速度は $-\tau$ (τ は振率) に相当する。従って、単位接線ベクトルが (局所的に) 大円上を回転する速度は曲率に相当する。また、単位球面上の接線ベクトルが大円から外れると振率が 0 でなくなり、空間曲線となる。単位球面上における接線方向を指定するため、始点および終点での接線方向が分かるため、曲線形状に関する情報がある程度得ることも可能である。

提案する手法では、曲線を積分してみないと終点の位置に関する情報が分からない。そこで、最適化手法を用いて、指定された端点位置と接線方向を満足するような曲線セグメントの生成手法についても述べる。

以降、2 節では 4 元数の基本演算と 4 元数を用いた回転について簡単に述べる。3 節では、関連する従来の研究について述べる。3.1 節では、曲率の制御を考慮した空間曲線の生成に関する従来の研究について述べる。3.2 節では、本研究で利用する Bézier 単位 4 元数曲線について述べる。3.3 節では、本研究と関連する三浦らによる 4 元数積分曲線について述べる。4 節では、提案する曲線といくつかの曲線の生成例を述べ、5 節では曲線セグメントの生成手法を述べる。8 節にまとめと今後の展望を述べる。

2. 4 元数と回転

2.1 4 元数の基本演算

複素数は 2 つの要素によって表されるが、4 元数 q は 4 つの成分によって

$$q = (w, x, y, z) \quad (w, x, y, z \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

のように表される。4 元数の加算、ノルムなどは、通常の 4 次元ベクトルの場合と同様に計算できる。従って、 q が単位 4 元数であることは、 q のノルム $|q|$ が 1 であること、すなわち、

$$|q| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} = 1 \quad (2)$$

を意味する. 2つの4元数 $q_0 = (w_0, x_0, y_0, z_0)$, $q_1 = (w_1, x_1, y_1, z_1)$ が与えられたとき, 積 $q_0 q_1$ は,

$$q_0 q_1 = (w_0 w_1 - x_0 x_1 - y_0 y_1 - z_0 z_1, w_1 x_0 + w_0 x_1 - y_1 z_0 + y_0 z_1, w_1 y_0 + w_0 y_1 + x_1 z_0 - x_0 z_1, -x_1 y_0 + x_0 y_1 + w_1 z_0 + w_0 z_1) \quad (3)$$

で定義される. 一般に4元数の積は可換ではないため注意が必要である. q の共役 \bar{q} は,

$$\bar{q} = (w, -x, -y, -z) \quad (4)$$

で表される. q の逆元 q^{-1} は,

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \bar{q} \quad (5)$$

によって与えられる.

2.2 4元数による回転

コンピュータアニメーションでは, 物体の自然で滑らかな動きを生成する必要がある. 物体の中心位置の動きはユークリッド空間 R^3 の曲線として表現され, 物体の向き (orientation) は R^3 の回転群 $SO(3)$ における曲線として表現することができる. $SO(3)$ において滑らかな曲線を生成することは困難であるため, Shoemake は, コンピュータグラフィックスの世界に4元数(quaternion)を導入した¹²⁾. Shoemake は, 線分の概念を S^3 における測地大円弧(geodesic great circular arc)に一般化することによって de Casteljau のアルゴリズムを拡張し, 3次元球面 S^3 において Bézier 単位4元数曲線を生成させた.

3次元空間の点ベクトル $p = (x, y, z)$ を4元数によって表したものを \hat{p} で表す. すなわち $\hat{p} = (0, x, y, z)$ である. 以降, $\hat{\cdot}$ をつけたものを3次元ベクトルを4元数によって表したものであるとする. 単位4元数 $q \in S^3$ が与えられたとき, 3次元空間における回転 $R_q \in SO(3)$ は, 次式によって表される.

$$R_q(p) = \hat{q} p \hat{q}^{-1} \quad (6)$$

ここで, 単位4元数 q は, ある角 θ と単位ベクトル $v \in S^2$ が与えられた時, $q = (\cos \theta, v \sin \theta)$ によって表される. R_q は, 軸 v に関する回転角 2θ の回転を表す. $R_q \equiv R_{-q}$ であるので, S^3 における2つの対心点(antipodal points) $q, -q$ は, $SO(3)$ における同じ回転を表す. 単位4元数を $q = (w, x, y, z) \in S^3$ としたとき, $R_q \in SO(3)$ は

$$R_q = \begin{pmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy + 2wz & 2xz - 2wy \\ 2xy - 2wz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz + 2wx \\ 2xz + 2wy & 2yz - 2wx & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

によって表される.

3. 従来の研究

3.1 曲率および捩率を考慮した空間曲線生成に関する従来の研究

Bézier 曲線や B-spline 曲線などに代表される自由曲線は, 制御点の位置を設定することにより様々な曲線を生成できるという特徴を持つが, その一方で, 曲率 (および捩率) 変化を制御することは容易ではない. 平面曲線の曲率変化を制御する研究は, 多く (例えば文献^{5,11,14)}) 行われている.

空間曲線の曲率を制御する研究はあまり多くないが, 古くは, Adams によって曲率および捩率がともに線形に増加し線形に減少する曲線を生成する研究¹⁾が行われている. 東らは, 縮閉線を用いて曲率変化の単調な平面曲線を生成し, その曲線をスイープさせた曲面の交差として空間曲線をデザインする手法を提案している⁶⁾. 三浦は, fair な空間曲線の生成手法として単位4元数積分曲線を提案している^{9,10)}. 単位4元数積分曲線に関しては, 3.3節に詳しく述べる. 比較的最近に提案された Farin による class A Bézier 曲線⁴⁾は, Bézier 曲線形式で, 曲率および捩率変化の単調な空間曲線をしようとするものである. しかしながら, 曲率・捩率が単調に変化する条件に間違いがあることが指摘され, Cao らによって class A Bézier 曲線を生成する行列が対称行列である場合に, 曲率および捩率変化の単調性が証明されている²⁾. 吉田らは, 曲率対数グラフの概念を捩率対数グラフに拡張することによって, 曲率および捩率対数グラフが直線となる (したがって, 曲率および捩率変化も単調となる) 対数美的空間曲線¹³⁾を提案している.

曲率および捩率を制御するもっともよい方法は, 曲率プロットと捩率プロットをユーザに指定させ, 積分計算をすることによって曲線を生成する手法であろう. しかしながら, この方法では, 曲線の接線がどのような方向に向いているのかなど, 曲線の形状に関する情報は, 曲線を積分して描いてみないと分からない. class A Bezier や対数美的曲線は曲率および捩率単調な曲線を生成することができるが, 基本的には一本のセグメントのみの生成である. 三浦によって提案された単位4元数積分曲線は, fair な空間曲線を生成できるが, 生成される曲線の形状や曲率がどのように変化をするのかを推測することは容易ではない. 本研究では, 曲率および捩率の制御と形状に関する推測をある程度可能な手法について述べる.

3.2 Bézier 単位 4 元数曲線

Kim らは、4 元数に対する対数写像および指数写像を定義することによって、Bézier 単位 4 元数曲線を生成する手法を提案した^{7,8)}。

単位 4 元数 $q=(w,x,y,z) \in S^3$ が与えられたとき、

$$\theta = \cos^{-1} \omega \in [0, \pi], \quad (a,b,c) = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \in S^2 \quad (8)$$

とすると、

$$w = \cos \theta, \quad (x,y,z) = \sin \theta (a,b,c) \quad (9)$$

である。従って、単位 4 元数 $q \in S^3$ は、

$$q = (\cos \theta, \sin \theta (a,b,c)) \quad (10)$$

によって表すことができる。ここに、 $0 \leq \theta \leq \pi$, $(a,b,c) \in S^2$ である。

単位 4 元数 q の対数 $\log q$ ⁸⁾は、

$$\log q = (0, \theta \cdot (a,b,c)) \quad (11)$$

で与えられ、その逆写像は、

$$\exp(0, \theta \cdot (a,b,c)) = (\cos \theta, \sin \theta \cdot (a,b,c)) \quad (12)$$

によって与えられる。

$B_i^n(t)$ を Bernstein 多項式としたとき、累積基底関数 $\tilde{B}_i^n(t)$ は、

$$\tilde{B}_i^n(t) = \sum_{j=i}^n B_j^n(t) \quad (13)$$

によって与えられる。4 元数によって表された制御点を q_i としたとき、 n 次 Bézier 単位 4 元数曲線は、

$$q(t) = q_0 \prod_{i=1}^n \exp(\omega_i \tilde{B}_i^n(t)) \quad (14)$$

によって定義される。ここに

$$\omega_i = \log(q_{i-1}^{-1} q_i) \quad (15)$$

である。Bézier 単位 4 元数曲線は、Shoemake の Bézier 4 元数曲線¹¹⁾と形状が異なる¹⁾とに注意されたい。

3.3 単位 4 元数積分曲線

単位 4 元数積分曲線^{3,4)}は、Kim らによって提案された Bézier 単位 4 元数曲線などを用いて、空間曲線を生成するものであり、三浦によって提案された。単位ベクトル $v=(v_x, v_y, v_z) \in S^2$, Bézier 単位 4 元数曲線 $q(t) (t \in [0,1])$ が与えられたとき、単位 4 元数積分曲線は、

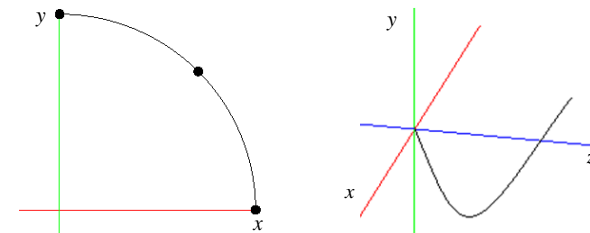
$$\hat{C}(s) = \mathbf{P}_0 + \int_0^s q\left(\frac{u}{s}\right) \hat{v} q^{-1}\left(\frac{u}{s}\right) du \quad (16)$$

によって与えられる。ここに、 \mathbf{P}_0 は曲線の始点位置、 s は曲線長、 \hat{v} は、 v を 4 元数 $\hat{v}=(0, v_x, v_y, v_z)$ と解釈したものである。 $q(t)$ は、B-spline 単位 4 元数曲線や Hermite 単位 4 元数曲線でもよい。

図 1 (a) は、制御点を大円上に等間隔においた 2 次 Bézier 単位 4 元数曲線を示す。図 1 (b) は、これを積分することによって生成された単位 4 元数積分曲線である。図 2 (a), (b) は、曲率および捩率プロットを示す。これより、制御点を大円上に等間隔においた場合には、曲率および捩率が一定の曲線である常螺旋が生成されることが分かる。

図 3 (a) は、図 1 (a) の制御点の間隔を等間隔にならないように配置させたものである。図 3 (b) は、この Bézier 単位 4 元数曲線を積分した曲線である。図 4 (a), (b) より、曲率および捩率が線形に変化していることが分かる。これより、単位 4 元数積分曲線によって、曲率および捩率が線形に変化するクロソイド曲線を 3 次元に拡張した曲線が得ることができる。

三浦によって提案された単位 4 元数積分曲線は、常螺旋やクロソイドを 3 次元に拡張した曲線が得られるものの、4 元数による回転のかかった式を積分しているため、始点や終点での接線方向を推定することが容易ではない。また、曲線の接線方向がどのように変化しているのかを推定することも、曲線を描いてみないと容易ではない。



(a) Bézier 単位 4 元数曲線 (b) 単位 4 元数積分曲線

図 1 制御点を等円弧間隔に置いた場合

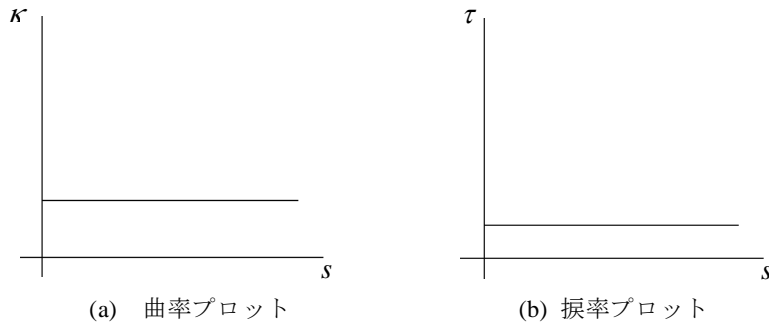


図2 図1(b)の曲率・捩率プロット

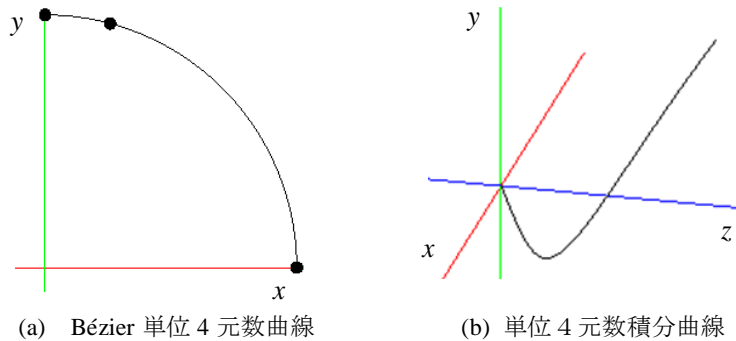


図3 制御点を等円弧間隔に置かない場合

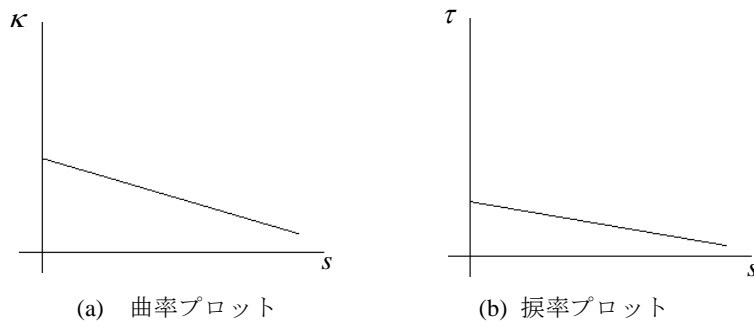


図4 図3(b)の曲率・捩率プロット

4. 接線方向の指定による空間曲線の生成

本研究で提案する曲線は、球面上の曲線として指定された接線方向を指定し、それを積分することによって空間曲線を得るものである。球面上の曲線の指定には、単位4元数積分曲線を用いるが、他の曲線を用いることも可能である。

単位球面上の曲線を $q(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) としたとき、提案する空間曲線は、

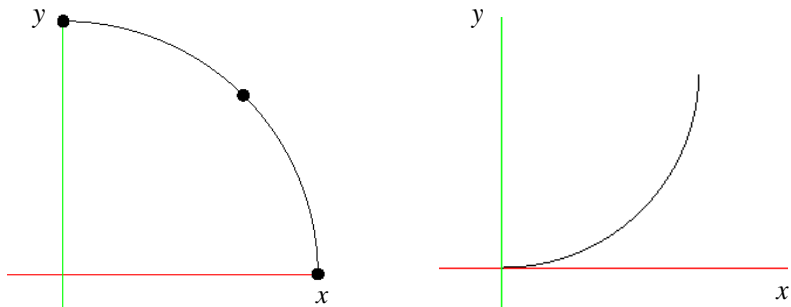
$$C(s) = P_0 + \int_0^s q\left(\frac{u}{s}\right) du \quad (17)$$

によって与えられる。ここに、 P_0 は始点位置、 s は弧長である。以降、式(17)による曲線を**接線積分曲線**と呼ぶ。単位球面上の曲線の指定には必ずしも4元数を用いる必要がないと考えるため、このように呼ぶこととする。この手法によって曲線を生成するメリットは、例えば $q(t)$ が Bézier 単位4元数曲線である場合には、制御点から始点および終点の接線方向を容易に知ることができる点、および生成される曲線の接線方向の変化を推定できる点にある。曲率は接線の角速度であり、捩率は従法線の角速度に-1をかけたものである。したがって、単位球面上の曲線が大円上を移動する速度は曲率に相当し、単位球面上の曲線が大円から離れると捩率が生じる。

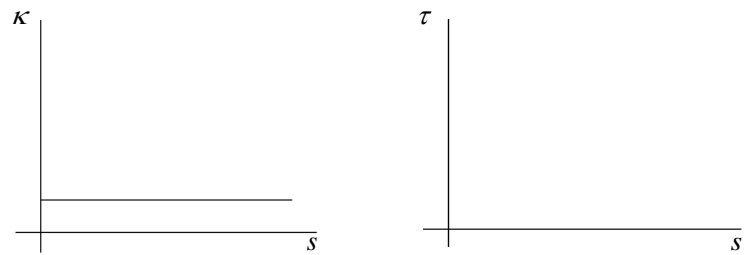
図5(a)は、制御点を大円上に等間隔においた2次 Bézier 単位4元数曲線を示す。図1(b)はこれを積分することによって生成された接線積分曲線である。図6(a),(b)は、曲率および捩率プロットを示す。これより、曲率が一定の平面曲線が生成されることが分かる。図7(a)は、図5(a)の制御点の間隔を等間隔にならないように配置させたものである。図7(b)に接線積分曲線、図8に曲率・捩率プロットを示す。これより、曲率が線形に変化する平面曲線を生成されていることが分かる。

図9(a)は、制御点を単位球面上に置いた2次 Bézier 単位4元数曲線を示す。図9(b)は接線積分曲線である。図10(a),(b)に曲率、捩率の変化を示す。図11(a)は尖点がある3次 Bézier 単位4元数曲線を示す。これを積分することで、図11(b)のような曲線を生成できる。このときの曲率、捩率を図12(a),(b)に示す。

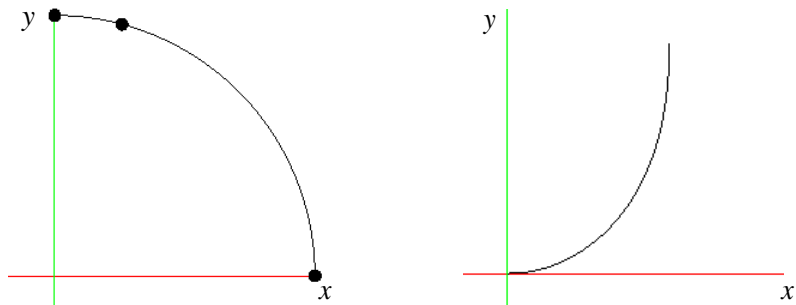
図13(a)は4次 Bézier 単位4元数曲線を示す。これを積分したものが図13(b)である。このように、2次以外の Bézier 単位4元数曲線でも曲線を生成可能である。図14(a),(b)に曲率・捩率プロットを示す。



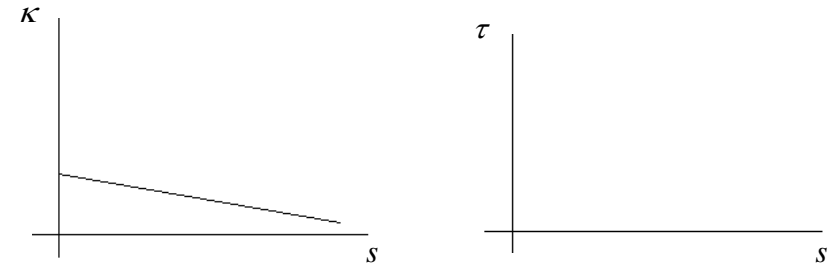
(a) Bézier 単位 4 元数曲線 (b) 接線積分曲線
 図 5 制御点を等円弧間隔に置いた場合



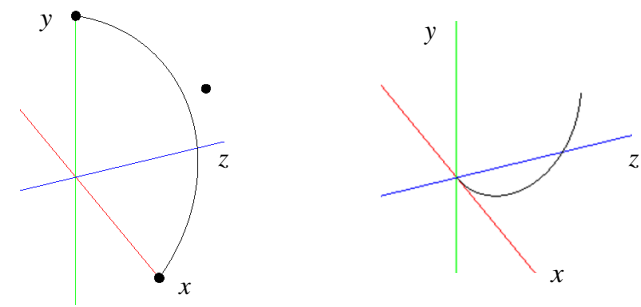
(a) 曲率プロット (b) 捩率プロット
 図 6 図 5(b)の曲率・捩率プロット



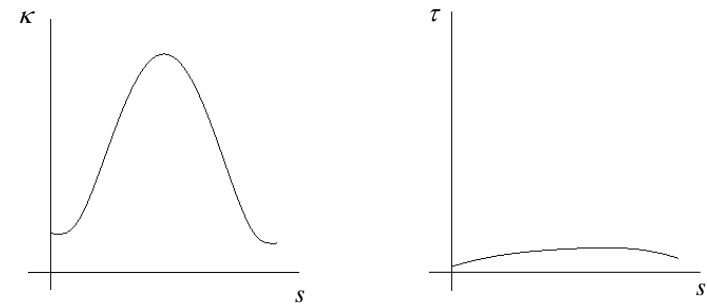
(a) Bézier 単位 4 元数曲線 (b) 接線積分曲線
 図 7 制御点を等円弧間隔に置かない場合



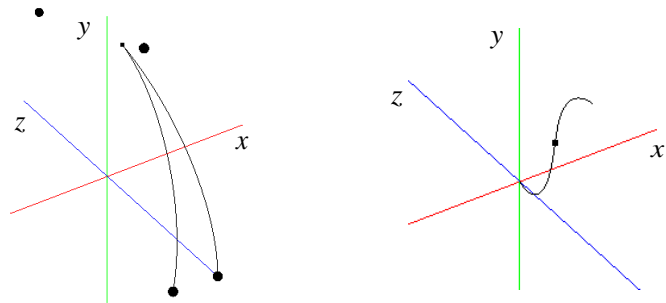
(a) 曲率プロット (b) 捩率プロット
 図 8 図 7(b)の曲率・捩率プロット



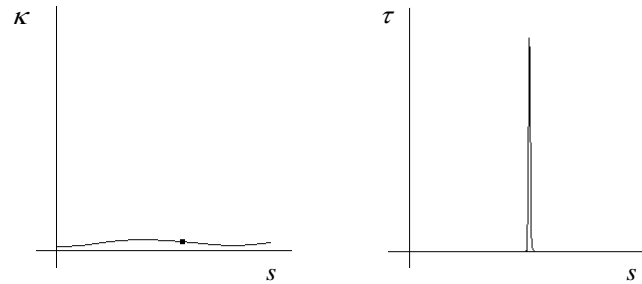
(a) 2次 Bézier 単位 4 元数曲線 (b) 接線積分曲線
 図 9 2次の空間曲線



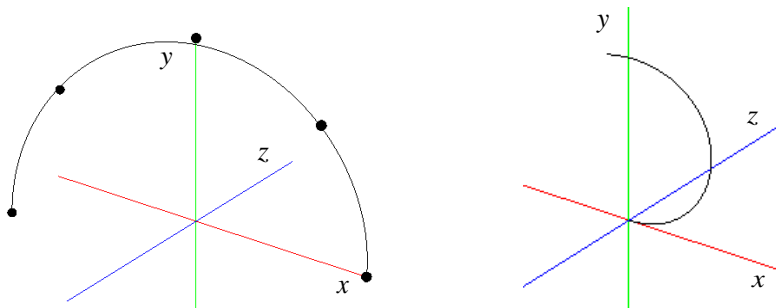
(a) 曲率プロット (b) 捩率プロット
 図 10 図 9(b)の曲率・捩率プロット



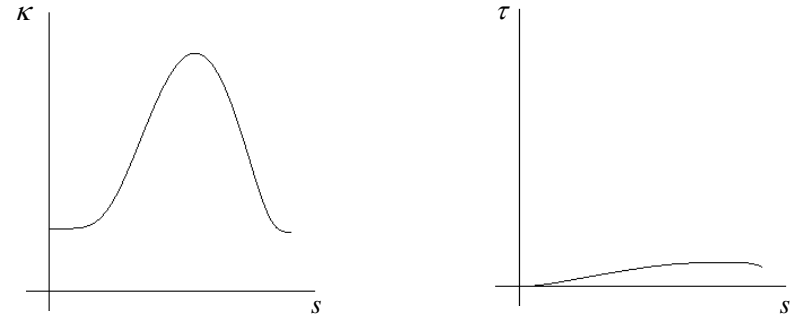
(a) 3次 Bézier 単位 4 元数曲線 (b) 接線積分曲線
図 1.1 尖点のある場合



(a) 曲率プロット (b) 捩率プロット
図 1.2 図 1.1(b)の曲率・捩率プロット



(a) 4次 Bézier 単位 4 元数曲線 (b) 接線積分曲線
図 1.3 4 次の空間曲線



(a) 曲率プロット (b) 捩率プロット
図 1.4 図 1.3(b)の曲率・捩率プロット

5. 曲線セグメントの生成

本節では、両端点の位置と接線方向が指定された場合に、その条件を満足する式(19)で表される曲線セグメントを生成する手法について述べる。以降、特に断りのない場合を除いて、 $q(t)$ は2次 Bézier 単位 4 元数曲線であるとする。後に、3次の場合についても述べる。

S^2 上の極座標 ϕ, θ の点を $p(\theta, \phi)$

$$p(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \sin \phi, -\sin \theta \cos \phi) \quad (18)$$

によって表す。曲線セグメントの生成を容易にするために、始点位置は原点とし、始点での接線ベクトルを $[1 \ 0 \ 0]^T$ とする。これは、ユーザによって指定された位置と接線方向に応じて、適切な平行移動と回転を施すことによって、容易にこの条件を満たすことができる。曲線生成後、適切な逆変換を行えば、元の条件を満たすことができる。始点位置が原点であることは、式(17)において $\mathbf{P}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ であることを意味する。ユーザによって指定された始点と終点の位置と接線ベクトルを、それぞれ、 $\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_c, \mathbf{V}_a, \mathbf{V}_c$ とする。ここで、 $\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_c, \mathbf{V}_a, \mathbf{V}_c$ は上記の平行移動と回転が施されたものであるとする。すなわち $\mathbf{P}_a = [0 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{V}_a = [1 \ 0 \ 0]^T$ である。ここで、最初の制御点ベクトルを \mathbf{V}_a 、最後の制御点ベクトルを \mathbf{V}_c とすれば、始点と終点における接線方

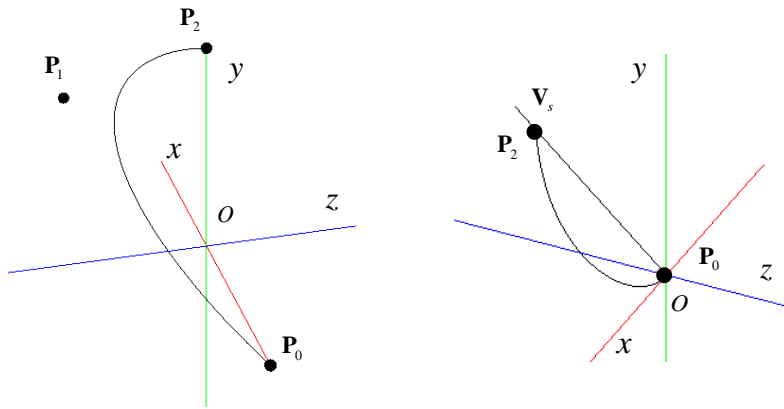
向を満足させることができる。残りの条件は、 \mathbf{P}_e の一致である。ところで、曲線セグメントをスケール倍しても、始点位置および始点と終点における接線方向を満足することは変わらない。従って、生成される曲線の終点は原点と \mathbf{P}_e を通る直線上に存在すればよい。最初と最後の制御点が決めているので、2次 Bézier 単位4元数曲線において、変更できるのは2番目の制御点 $p(\theta_b, \phi_b)$ のみである。したがって、 $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_e / |\mathbf{V}_e|$ 、積分した曲線の終点を \mathbf{P}_e としたとき、次式が0になるような、 θ_b, ϕ_b を求めればよい。

$$f(\theta_b, \phi_b) = \left| \frac{\mathbf{P}_e}{|\mathbf{P}_e|} \cdot \mathbf{V}_s - 1 \right| \quad (19)$$

なお、式(15)の最適化には滑降シンプレックス法を用いた。

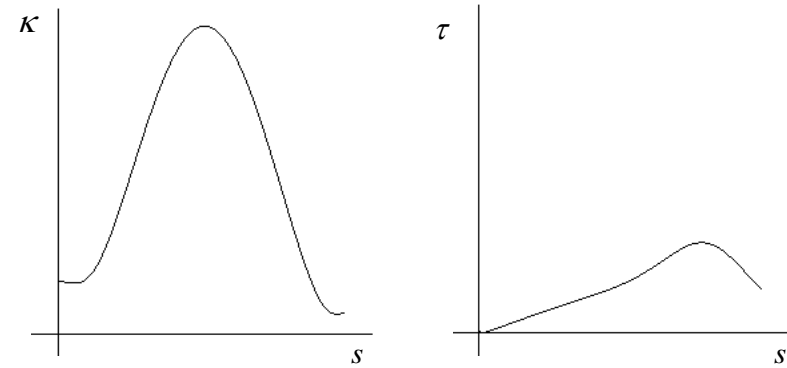
図15(a)は最適化を行った後の2次 Bézier 単位4元数曲線である。図15(b)に、最適化を行ったことにより、指定された条件を満足する曲線を生成できている様子を示す。図16(a), (b)は図15(b)の曲率・振率プロットである。

図17(a)は3次 Bézier 単位4元数曲線を指定された条件を満足するように最適化したものである。最適化では、第2の制御点の位置のみを変化させた。3次の場合でも、第2の制御点の移動のみで指定された条件を満足させることができる程度可能である。図17(b)の曲線の曲率、振率を図18(a), (b)に示す。



(a) Bézier 単位4元数曲線 (b) 積分曲線

図15 2次の曲線セグメントの生成

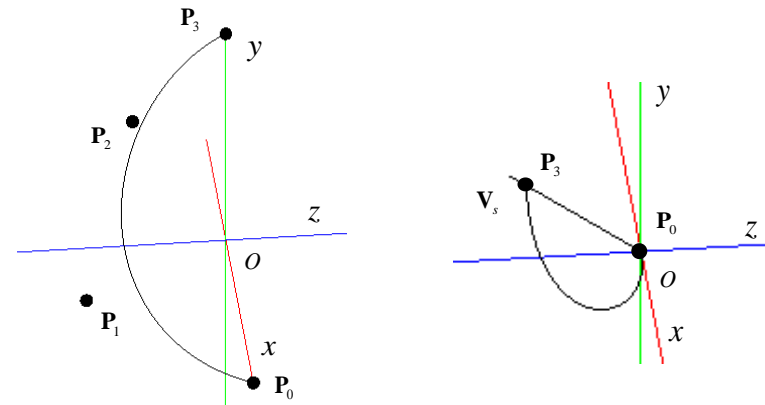


(a) 曲率プロット

(b) 振率プロット

図16

曲率・振率プロット



(a) Bézier 単位4元数曲線

(b) 積分曲線

図17

3次の曲線セグメントの生成

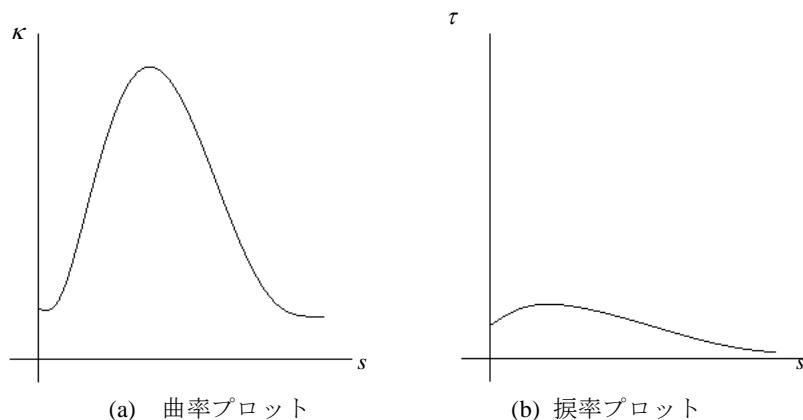


図 18 曲率・捩率プロット

なお、本手法による最適化では、曲線セグメントが求まらない場合も当然存在する。また、最適化によって求まる曲線も（特に次数が高くなった場合に）一意とは限らず初期位置に応じて複数求まるものと思われる。これらの点に関しては、今後考察を行っていく予定である。

6. まとめ

本研究では、接線方向を積分することによる接線積分曲線を提案した。単位球面上の接線方向の指定には、Bézier 単位 4 元数曲線を用いたが、他の曲線を利用することももちろん可能である。また、最適化により、ユーザの指定する位置と接線方向を満足する曲線セグメントを求める手法についても述べた。この曲線セグメント生成のアイデアは、三浦によって提案された単位 4 元数積分曲線に容易に応用することも可能である。

単位球面上を曲線が動く速度は曲率に相当するが、本研究で利用した Bézier 単位 4 元数曲線では動く速度が分かりにくい場合が存在する。曲率の制御をより直接的に行うためには、他の曲線形式が望まれる。単位球面上の曲線の動きが、曲率および捩率の変化にどのように影響しているのか、さらに研究を進めていく予定である。

参考文献

- 1) J. A. Adams, The intrinsic method for curve definition, Computer Aided Design, Vol 7, No.4, pp.243-249, Oct. 1975.
- 2) J. Cao, G. Wang G, A note on Class A Bézier curves, Computer Aided Geometric Design, Vol. 25, Issue 7, pp.523-528, 2008.
- 3) G. Farin, Curves and Surfaces for CAGD Fifth Edition, Morgan Kaufmann, 2002.
- 4) G. Farin, Class A Bézier curves, Computer Aided Geometric Design, Vol. 23, No. 7, pp. 573-58, 2006.
- 5) W. H. Frey, D. A. Field, Designing Bézier conic segments with monotone curvature, Computer Aided Geometric Design, Vol. 17, Issue 6, pp.457-483, 2000
- 6) M. Higashi, H. Tsutamori, M. Hosaka, Generation of Smooth Surfaces by Controlling Curvature Variation, Computer Graphics Forum, Vol. 15, Issue 3, pp.187-196, Aug. 1996.
- 7) Myoung-Jun Kim, Myung-Soo Kim, Sung Yong Shin, A General Construction Scheme for Unit Quaternion Curves with Simple High Order Derivatives, SIGGRAPH, pp.369-376, 1995.
- 8) Myoung-Jun Kim, Myung-Soo Kim and Sung Yong Shin, A Compact Differential Formula for the First Derivative of a Unit Quaternion Curve, The Journal of Visualization and Computer Animation, Vol. 7, Issue 7, pp.43-57, Jan. 1996.
- 9) 三浦 憲二郎, 単位 4 元数積分曲線, 情報処理学会論文誌, vol.38, no.11, pp.2227-2236, 1997.
- 10) Kenjiro T. Miura, Unit Quaternion Integral Curve: A New Type of Fair Free-Form Curves, Computer Aided Geometric Design, vol.17, no.1, pp.39-58, 2000.
- 11) N. S. Sapidis, W. H. Frey, Controlling the curvature of quadratic Bézier curve, Computer Aided Geometric Design, Vol. 9, Issue 2, pp.85-91, 1992.
- 12) Ken Shoemake, Animating Rotation with Quaternion Curves, SIGGRAPH, Vol. 19, No. 3, pp.245-254, 1985.
- 13) N. Yoshida, R. Fukuda, T. Saito, Log-Aesthetic Space Curve Segments, SIAM/ACM Joint Conference on Geometric and Physical Modeling (GDSPM), pp.35-46, 2009.
- 14) Y. Wang, B. Zhao, L. Zhang, J. Xu, K. Wang, S. Wang, Designing fair curves using monotone curvature pieces, Computer Aided Geometric Design, Vol. 21, Issue 5, pp.515-527, 2004.