

## 資料

## 制約条件を付加した条件の悪い連立1次方程式の解法\*

小林 富士男\*\* 山口 昌一郎\*\*

## Abstract

The steepest descent method has been often used to solve simultaneous equations encountered in engineering problems, especially in the case of ill conditioned and the rate of convergence is very slow. If we calculate with finite figures in the method, there is a certain risk of obtaining erroneous results which do not converge to the true solution.

In this paper, an algorithm for computing the constrained simultaneous equations in terms of the converged values obtained previously by the steepest descent method is described in detail. Last, two examples are presented which are the applications of this method. The one is related to simultaneous linear equations which is ill conditioned. The other is concerned in particular problem which deals with simultaneous linear equations composed of measured values for obtaining spectral transmittance of an optical filter by means of retarding potential method. In latter case, the simultaneous linear equations include some unavoidable errors.

## 1. まえがき

制約条件付の非線形計画問題を解く方法は種々あるが<sup>1)</sup>、今後解決すべき問題も多く残されている。連立1次方程式に制約条件を付加し、残差の絶対値の総和を最小にして最適解を求める方法、残差の自乗和を最小にして最適解を求める方法についてはすでに発表した<sup>2)-4)</sup>。

最大傾斜法は最適化手法として実際はかなり使用されており、条件のよい問題に対してはよい手法であるが、悪条件の場合には収束が遅くなる。実際に計算をするときは、無限桁で演算を行なうことが不可能であるので、理論的には最適解に収束すべきものが、実際には最適解へ収束しないことがある。本稿では、条件の悪い連立1次方程式を最大傾斜法によって有限桁で演算を行ったときの収束点についてのべ、次にそれ等の収束値を用いて、制約条件を付加した連立1次方程式の最適解を求める方法についてのべることとする。この解法を逐次進行法と呼ぶことにする。

## 2. 最大傾斜法の収束点

$A$  を  $n \times n$  の正則行列、 $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  を  $n$  次の列ベクトルとすると、連立1次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1)$$

を解くことは、次式を最小とする解  $\mathbf{x}$  を求めることになる。

$$F(\mathbf{x}) = (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n r_i^2 \quad (2)$$

ただし、 $(\cdot)$  は内積を表わし、 $\mathbf{r}$  は残差ベクトルで

$$\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b} \quad (3)$$

である。さて、

$$\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 2 \sum_{i=1}^n a_{ii} r_i \quad (4)$$

であるから、点  $\mathbf{x}$  における  $F(\mathbf{x})$  の最大傾斜方向  $\mathbf{P}$  は

$$\mathbf{P} = \nabla F(\mathbf{x}) = 2A^T \mathbf{r} \quad (5)$$

となる。ただし、 $A^T$  は  $A$  の転置行列である。

いま、 $S$  段階における  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{r}$  の値をそれぞれ  $\mathbf{x}^{(S)}$ ,  $\mathbf{P}^{(S)}$ ,  $\mathbf{r}^{(S)}$  で表わし、また修正の大きさを  $\delta^{(S)}$  として

$$\mathbf{x}^{(S+1)} = \mathbf{x}^{(S)} + \delta^{(S)} \mathbf{P}^{(S)} \quad (6)$$

とする。すると

\* An Algorithm for Computing Ill Conditioned Simultaneous Equations with Constraints by Fujio KOBAYASHI and Shoichiro YAMAGUCHI (Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology)

\*\* 東京工業大学工学部電気・電子工学科

$$F(\mathbf{x}^{(S)} + \delta^{(S)} \mathbf{P}^{(S)}) = (\delta^{(S)})^2 (\mathbf{A} \mathbf{P}^{(S)}, \mathbf{A} \mathbf{P}^{(S)}) + 2\delta^{(S)} (\mathbf{A} \mathbf{P}^{(S)}, \mathbf{r}^{(S)}) + (\mathbf{r}^{(S)}, \mathbf{r}^{(S)}) \quad (7)$$

であるから

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}^{(S)} + \delta^{(S)} \mathbf{P}^{(S)})}{\partial \delta^{(S)}} = 0 \quad (8)$$

とおくと

$$\delta^{(S)} = -\frac{(\mathbf{A} \mathbf{P}^{(S)}, \mathbf{r}^{(S)})}{(\mathbf{A} \mathbf{P}^{(S)}, \mathbf{A} \mathbf{P}^{(S)})} \quad (9)$$

が得られる。

この方法は、 $F(\mathbf{x}^{(S)})$  の勾配の最も急な方向に進み、最小値を示す点を  $\mathbf{x}^{(S+1)}$  としているので、条件のよい連立1次方程式に対しては収束が速い。しかし、条件が悪い場合には、 $F(\mathbf{x})$  が一定となる面は超楕円面となり、各未知数の近似値はその超楕円面の長軸付近を振動しながら<sup>5), 6)</sup>、幾何級数的に解に到達するので収束が大変遅くなる。

実際に数値計算を行なうときは、有限桁で計算するので、条件が悪い連立1次方程式の場合には、正解に達する以前に  $\mathbf{x}^{(S)} = \mathbf{x}^{(S+1)}$  となり、正解が得られなくなることがある。しかし、それ等の収束点は  $F(\mathbf{x}) = \text{一定}$  を表わす超楕円面の長軸を通る超平面近傍にある。

各方程式によって表わされる超平面が平行に近いとき悪条件となるが、互いに平行に近い面が単一の場合には各収束点は線形な式で表示される。 $(\mathbf{P}^{(S)})$  は  $F(\mathbf{x}^{(S)})$  における最急ベクトルであり、収束以前では、 $F(\mathbf{x}^{(S+1)}) < F(\mathbf{x}^{(S)})$  となる。 $A$  の固有値の絶対値が最大なものおよび最小のものを  $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$  とすれば、悪条件の場合には、それらの比  $|\lambda_{\max}|/|\lambda_{\min}|$  が1と比較して大きな値となる。したがって、超楕円面は長く平たくなり、 $S$  の増加とともに、 $\mathbf{x}^{(S)}$  はほぼ超楕円面の長軸を通る同一超平面上に収束することは明らかである。

いま、任意に  $m$  点 ( $m \geq n$ ) の初期値を選び、それ等の収束値を  $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}), (x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$  とする。係数を  $C_j (j=1, 2, \dots, n)$ 、定数を  $C_{n+1}$  とし、得られた収束値を次の関係式で表わす。

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} C_j + C_{n+1} = x_{in} \quad (10)$$

$$(i=1, 2, \dots, m)$$

(10)式から  $C_j (j=1, 2, \dots, n-1, n+1)$  を求め、それ等の値を用いて次のように表わす。

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n + C_{n+1} = 0 \quad (11)$$

ただし、 $C_n = -1$  である。すると、(11)式で表わされる超平面は  $F(\mathbf{x}) = \text{一定}$  の超楕円面の長軸を通り、また(1)式の解は(11)式を満足する。(超楕円面の長軸の長さを  $h_{\max}$ 、短軸の長さを  $h_{\min}$  とすれば、悪条件の場合には、それらの比  $h_{\min}/h_{\max}$  は1と比較して非常に小さな値となる。各未知数の近似値は長軸付近を振動しながら解に向かって進むが、その振幅が次第に小さくなるので、最大傾斜法で得られた収束値が超楕円面の長軸を通る超平面上からずれる誤差は一般に小さい。 $F(\mathbf{x})$  の値が小さいことは  $A$  の最大固有値に対応する固有ベクトルの方向には誤差が小さいことを意味するので収束値  $x_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$  が超楕円面の長軸を通る超平面上からずれる誤差は小さい。また、多数の初期値をえらびそれらに対する収束値から最小自乗法によって(11)式を求めれば、(11)式が正解からずれる誤差は小さくなるのが期待される。

### 3. 逐次進行法

未知数  $x_j$  と測定値  $b_i$  との間に次の関係が成立しているものとする。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \\ u_j &\leq x_j \leq v_j \\ (i &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし、 $a_{ij}$  は定数で測定値であってもよく、 $\varepsilon_i$  は残差、 $u_j$  は解の下限、 $v_j$  は解の上限をそれぞれ表わしており、解の許容領域は凸集合とする。

いま、(11)式を用い、次式を最小にして(12)式の最適解を求める問題を考える。ただし、(11)式は解の許容領域を通るものとする。

$$F = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad (13)$$

(11)式は(13)式において  $F = \text{一定}$  としたときに表わされる超楕円面の長軸を通るので、最適解は(11)式を満足する。したがって、解の許容領域を満足し、(11)式で表わされる超平面上で、(13)式の値が最小となる点を求めればよい。

まず、最初、解の許容領域内で(11)式を満足する任意な点を初期値に選び  $x_j^{(0)} (j=1, 2, \dots, n)$  とする。そのときの目的関数の値  $F^{(0)}$

$$F^{(0)} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(0)} - b_i \right)^2 \quad (14)$$

を計算する。次に(11)式を満たす超平面上で目的関数が減少する方向を見いだしながら、次第にその方向

へ近似値を進める。修正量を  $\delta$  とし、この手法の  $S$  段階から  $S+1$  段階を求めるアルゴリズムは次のようになる。

$$(i) (a) \left. \begin{aligned} x_k^{(S)} + \delta &\geq u_k \\ x_k^{(S)} + \delta &\leq v_k \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

かつ

$$\left. \begin{aligned} x_i^{(S)} - \frac{C_i^k}{C_i} \delta &\geq u_i \\ x_i^{(S)} - \frac{C_i^k}{C_i} \delta &\leq v_i \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ならば

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_k^{(S)} &= x_k^{(S)} + \delta \\ \bar{x}_i^{(S)} &= x_i^{(S)} - \frac{C_i^k}{C_i} \delta \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

とし、

(b) (15), (16)式が満足されない場合は

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_k^{(S)} &= x_k^{(S)} \\ \bar{x}_i^{(S)} &= x_i^{(S)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

とし、

$$f^{(S)}(d, k, l) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j^{(S)} - b_i \right)^2 \quad (19)$$

を  $k=1, 2, \dots, n$  とし各  $k$  に対して  $l=1, 2, \dots, n$  として、 $d=1(\delta > 0)$ ,  $d=2(\delta < 0)$  の場合について計算する。ただし、 $k \neq l$ ,  $\bar{x}_j^{(S)} = x_j^{(S)} (j \neq k, j \neq l)$  である。

(ii)  $f^{(S)}(d, k, l)$  の中から最小値を選び、

$$f^{(S)}(d, k, l) = \text{Min}_{d, k, l} f^{(S)}(d, k, l) \quad (20)$$

とする。

(iii)  $f^{(S)}(d, k, l)$  と  $F^{(S)}$  を比較し

$$f^{(S)}(d, k, l) < F^{(S)} \quad (21)$$

ならば

$$F^{(S+1)} = f^{(S)}(d, k, l) \quad (22)$$

とし、 $f^{(S)}(d, k, l)$  に対する各未知数の近似値  $\bar{x}_j^{(S)}$  を

$$x_j^{(S+1)} = \bar{x}_j^{(S)} \quad (23)$$

$$(j=1, 2, \dots, n)$$

として(i)にもどる。

$$(iv) f^{(S)}(d, k, l) \geq F^{(S)} \quad (24)$$

の場合

$$(a) |\delta| > e \quad (25)$$

ならば

$$\delta := \frac{\delta}{10} \quad (26)$$

として、(i)に行き計算を繰り返す。

$$(b) |\delta| \leq e \quad (27)$$

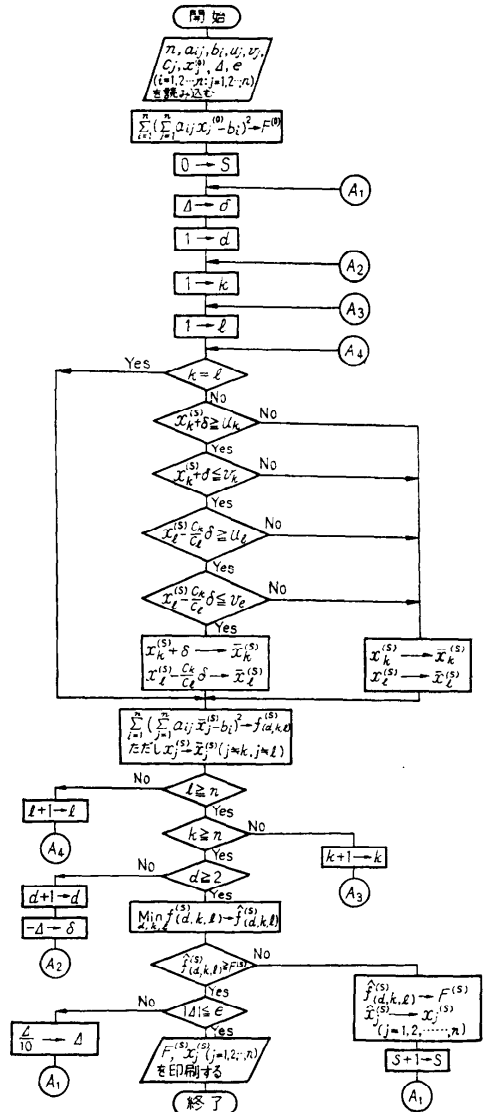


Fig. 1 Flow chart.

ならば計算を終了する。

ただし、 $e$  は予め定めた充分小さな正の定数とする。

Fig. 1 は本計算法の流れ図である。(最適な  $\delta$ (初期値) は、問題によって異なり、また各未知数の初期値によっても異なるが、 $\delta = \text{Mjax}\{|u_j|, |v_j|\}$  とすればよい。このようにしても、何ら支障をきたさない。)

#### 4. 逐次進行法の収束

第3章で述べた逐次進行法によって求めた各未知数

の近似値が、最適解へ収束することを以下で証明する。

仮定から初期値は解の許容領域内にあり、(11)式を満足している。また計算の各段階では、(15)、(16)式から(11)式を満たす超平面上にあり、かつ、解の許容領域内にあることは明らかである。最終段階以前の各段階ではまだ最小値に達していない。したがって、常に次の関係が成立する。

$$F^{(S)} > F^{(S+1)} \quad (28)$$

かくして、 $F^{(S)}$  は段階  $S$  の増加とともに減少する。それゆえ、各未知数の近似値が(13)式を最小とするベクトル方向へ収束されることは自明である。その近似値が果たして最適解に収束するか否かが問題である。

いま、最適解をベクトル  $x^*$  で表わし、そのときの目的関数の値を  $F(x^*)$  とする。解の許容領域内の点  $x^0$  は(11)式を満たし、その点で目的関数  $F(x^0)$  は局所的最小で、各未知数の近似値がその点に収束するものと仮定する。すると、次の関係がなりたつ。

$$F(x^*) \leq F(x^0) \quad (29)$$

目的関数は凸関数であるから、 $0 \leq \lambda \leq 1$  なる  $\lambda$  に対して

$$F\{\lambda x^* + (1-\lambda)x^0\} \leq \lambda F(x^*) + (1-\lambda)F(x^0) \quad (30)$$

となる。また(29)式より次の関係が得られる。

$$F\{\lambda x^* + (1-\lambda)x^0\} \leq F(x^0) \quad (31)$$

いま、

$$\frac{\theta}{|x^* - x^0|} > \lambda > 0 \quad (32)$$

ただし、 $|x^* - x^0| \geq \theta > 0$

のように  $\lambda$  の値を選ぶ。すると、 $F(x)$  は  $x^0$  で局所的最小であるという仮定から、 $x^0$  の  $\theta$  近傍  $x = \lambda x^* + (1-\lambda)x^0$  において、次の関係が成立しなければならない。

$$F(x) = F\{\lambda x^* + (1-\lambda)x^0\} > F(x^0) \quad (33)$$

この(33)式は(31)式と矛盾する。したがって、 $x^*$

と  $x^0$  は一致しなければならない。それゆえ、各未知数の近似値は最適解  $x^*$  へ収束する。(収束の速さは、与えられた問題、制約条件、各未知数の初期値によっても異なるが、 $|\lambda_{\max}|/|\lambda_{\min}|$  の値がその目安となる。一般にこの値が大きい程収束は遅い。)

## 5. 数値計算

### 5.1 簡単な例

次式の連立1次方程式の正解  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  は  $(9, 7, 5, 3, 1)$  である。

$$\left. \begin{aligned} 10x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 13x_4 + 14x_5 &= 280 \\ 10x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 20x_4 + 30x_5 &= 339 \\ 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 30x_4 + 50x_5 &= 435 \\ 10x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 50x_4 + 80x_5 &= 610 \\ 10x_1 + 30x_2 + 50x_3 + 80x_4 + 90x_5 &= 880 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

0~9 の一様乱数を発生させ、それ等を初期値にして最大傾斜法によって計算すると、その結果は Table 1 のようになり、正解とはかけはなれた解が得られる。ただし、演算は、すべて有効数字約9桁(10進)の計算機で行なった。(34)式の  $i(i=1, 2, \dots, n)$  行の各係数を  $\left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right\}^{1/2}$  で割って正規化し、その行列式の値を求めると  $3.522 \times 10^{-6}$  で1に比較して小さいから、(34)式は悪条件の連立1次方程式である。Table 1 の収束値を用いて消去法により、(10)式の  $C_j(j=1, 2, \dots, n-1, n+1)$  を求めると、(11)式に対応する次式が得られる。

$$\begin{aligned} -0.145x_1 - 0.313x_2 - 0.483x_3 - 0.763x_4 \\ -x_5 + 9.201 &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

たとえば、 $x_j = 4.0(j=1, 2, \dots, 4)$  とすれば、(35)式より  $x_5 = 2.385$  となる。これ等の値を初期値とし、上述の逐次進行法によって計算すると、 $x_1 = 9.001$ 、 $x_2 = 7.001$ 、 $x_3 = 4.996$ 、 $x_4 = 3.002$ 、 $x_5 = 1.000$  が得られ、ここではじめて正解に収束する結果が得られる。

Table 1 The converged values which are obtained by the steepest descent method.

未知数	No. 1		No. 2		No. 3		No. 4		No. 5	
	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値
$x_1$	8.0	11.713	4.0	6.890	3.0	10.733	3.0	8.352	8.0	8.234
$x_2$	1.0	2.717	6.0	7.406	0.0	5.321	7.0	9.216	7.0	6.996
$x_3$	6.0	5.669	9.0	8.935	1.0	3.826	4.0	3.003	7.0	6.658
$x_4$	7.0	4.033	2.0	0.105	6.0	4.411	9.0	3.620	3.0	1.842
$x_5$	1.0	0.836	1.0	1.487	4.0	0.765	3.0	0.892	4.0	1.195

(ただし、小数点以下4桁目を四捨五入して表示している)

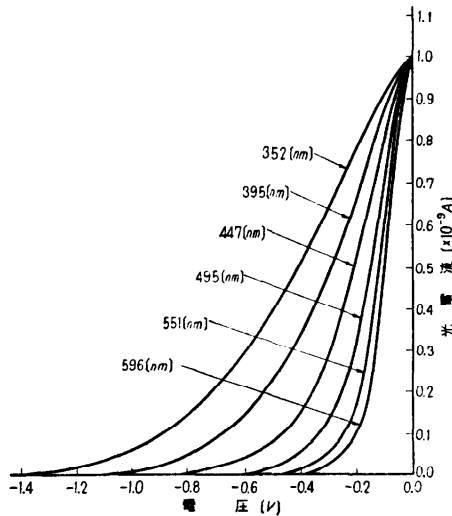


Fig. 2 Retarding potential characteristics of a photoelectric tube for each monochromatic light.

5.2 応用例

光電管の減速電圧特性を利用すると入射光の分光組成を分析することができる<sup>7)</sup>. 光電陰極・陽極ともに平行平面の構造をした真空光電管に、中心波長 352 [nm], 395[nm], 447[nm], 495[nm], 551[nm], 596 [nm] の干渉フィルタを通して光を入射すると、減速電圧特性曲線は Fig. 2 のようになる. 各干渉フィルタを透過した光を同時に入射し、光学フィルタをそう入すると減速電圧特性曲線は Fig. 3 の通りとなる.

Fig. 2, Fig. 3 において、減速電圧  $V = -0.1$  [V] から  $V = -0.6$  [V] までを 0.1 [V] 間隔に電圧を選び、それらの電圧に対する光電流値から連立1次方程式を作ると次のようになる. ただし, Fig. 2 で得られた値を左辺の係数, Fig. 3 のそれ等を右辺の定数としている.

$$\left. \begin{aligned} 0.914x_1 + 0.858x_2 + 0.797x_3 + 0.700x_4 \\ + 0.608x_5 + 0.557x_6 &= 0.951 \\ 0.775x_1 + 0.660x_2 + 0.509x_3 + 0.330x_4 \end{aligned} \right\}$$

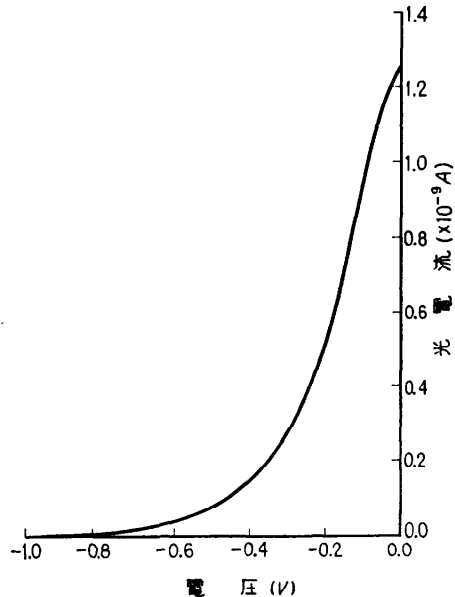


Fig. 3 Retarding potential characteristic of a photoelectric tube when optical filter is inserted.

$$\left. \begin{aligned} + 0.197x_5 + 0.122x_6 &= 0.557 \\ 0.623x_1 + 0.485x_2 + 0.293x_3 + 0.128x_4 \\ + 0.0465x_5 + 0.0156x_6 &= 0.306 \\ 0.496x_1 + 0.340x_2 + 0.153x_3 + 0.0399x_4 \\ + 0.00894x_5 + 0.000x_6 &= 0.168 \\ 0.388x_1 + 0.227x_2 + 0.0712x_3 + 0.00868x_4 \\ + 0.000x_5 + 0.000x_6 &= 0.0871 \\ 0.287x_1 + 0.140x_2 + 0.0278x_3 + 0.000x_4 \\ + 0.000x_5 + 0.000x_6 &= 0.0431 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

なお,  $x_j$  ( $j=1, 2, \dots, 6$ ) は中心波長 352[nm], 395 [nm], ..., の干渉フィルタに対応している. (36)式の解を消去法で求めると,  $x_1=0.004$ ,  $x_2=0.143$ ,  $x_3=0.784$ ,  $x_4=-0.338$ ,  $x_5=1.190$ ,  $x_6=-0.518$  となり, 物理的に不合理な解が得られる. そこで,  $0.0 \sim$

Table 2 The converged values which are obtained by the steepest descent method.

未知数	No. 1		No. 2		No. 3		No. 4		No. 5		No. 6	
	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値	初期値	収束値
$x_1$	0.6	-0.326	0.2	-0.153	0.4	-0.044	0.8	-0.148	0.5	-0.187	0.2	-0.281
$x_2$	0.7	0.849	0.1	0.442	0.3	0.271	0.7	0.480	0.6	0.632	0.8	0.822
$x_3$	0.1	0.257	0.3	0.623	0.7	0.585	0.7	0.554	0.2	0.243	0.0	0.173
$x_4$	0.4	0.184	0.0	0.070	0.4	0.095	0.3	0.002	0.5	0.334	0.0	0.156
$x_5$	0.6	0.079	0.1	-0.042	0.9	0.484	0.4	-0.019	0.3	-0.027	0.2	0.298
$x_6$	0.9	0.255	0.6	0.350	0.3	-0.123	0.9	0.456	0.7	0.318	0.1	0.143

(ただし, 小数点以下4桁目を四捨五入して表示している)

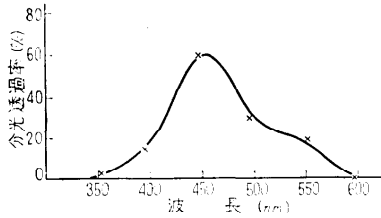


Fig. 4 Spectral transmittance of optical filter.

0.9 の一様乱数を発生させてそれ等を初期値に選び、有効数字約 9 桁の電子計算機で最大傾斜法によって計算すると、おのおのの収束値は Table 2 (前頁参照) の通りとなる。Table 2 の収束値から (10) 式の  $C_j$  ( $j=1, 2, \dots, n-1, n+1$ ) を求めると、(11) 式に対応する次式が得られる。

$$\begin{aligned} -3.209x_1 - 2.708x_2 - 2.116x_3 - 1.555x_4 \\ - 1.188x_5 - x_6 + 2.432 = 0 \quad (37) \end{aligned}$$

いま、物理的制約条件  $0 \leq x_j \leq 1$  ( $j=1, 2, \dots, 6$ ) を付加する。たとえば、 $x_j=0.2$  ( $j=1, 2, \dots, 5$ ) とすれば、(37) 式より  $x_6=0.277$  となるので、これ等を初期値として逐次進行法で求めた結果を従来の分光測光法で得た曲線上に  $\times$  印でプロットすると Fig. 4 のようになる。Fig. 4 から両者はかなりよく一致していることがわかる。なお、(36) 式の左辺の係数を正規化した行列式の値は  $-7.802 \times 10^{-8}$  であるから、(36) 式は悪条件の連立 1 次方程式である。

## 6. むすび

条件の悪い連立 1 次方程式を解く場合、直接法を用いれば丸めの誤差の影響が大きくなり、また反復法を用いれば収束が遅く、一般にどのような解法を使用してもあまり思わしくない。悪条件の連立 1 次方程式の場合、解がその係数に敏感であるから、係数または右辺の定数に小さな誤差がはいっても解に大きく影響し、物理的に起きえない不合理な解が得られることがある。そのような場合、制約条件を付加して最適解

を求めると望ましい結果が得られることがある。

最近ミニ・コンピュータが普及し、それを利用する機会が多くなったが、記憶容量が少なく、線形制約条件のもとで非線形の目的関数の最小値または最大値を求める従来の手法<sup>8), 9)</sup> が使えないことがある。それに対して逐次進行法は前もって (11) 式を求めておけばよく、アルゴリズムが簡単で記憶容量が少なくてよい長所があるので、容量の少ないミニ・コンピュータ等を利用するのに便利である。

## 参考文献

- 1) D. M. Himmelblau: Applied Nonlinear Programming, McGraw-Hill (1972).
- 2) 小林, 山口: 線形計画法の減速電圧法による分光測光への応用, 照学誌, Vol. 54, No. 12, pp. 681~688 (1970).
- 3) 小林, 山口: 測定値を用いた多元連立方程式の逐次近似解法, 電学誌, Vol. 92-A, No. 9, pp. 431~439 (1972).
- 4) 小林, 山口: 制約条件のもとでのペナルティ関数を用いた連立一次方程式の解法, 照学誌, Vol. 58, No. 8, pp. 428~433 (1974).
- 5) G. E. Forsythe & T. S. Motzkin: Asymptotic Properties of the Optimum Gradient Method, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 57, No. 3, p. 183 (1951).
- 6) H. Akaike: On a Successive Transformation of Probability Distribution and its Application to the Analysis of the Optimum Gradient Method, Ann. Inst. Statist. Math., Vol. 11, No. 1, pp. 1~16 (1959).
- 7) 山口, 小林: 光電管の減速電圧特性とその分光測光への応用, 照学誌, Vol. 52, No. 4, pp. 108~115 (1968).
- 8) G. Zoutendijk: Methods of Feasible Directions, Elsevier (1960).
- 9) J. C. G. Boot: Quadratic Programming, Algorithms-Anomalies-Applications, North-Holland (1964).

(昭和 49 年 10 月 14 日受付)

(昭和 50 年 3 月 27 日再受付)