論　文

Aitken の δ^2-過程とそれに類似な加速過程*

井　口　　健**

Abstract

An algorithm is proposed which a coefficient ω_n of an acceleration process

$$x_{p+2}^{(n)}=x_{p+2}+\omega_n(x_{p+2}-x_p)$$

is adjusted automatically so as to yield a rapid convergence. This acceleration process covers the Aitken's δ^2-process in $n\to\infty$. The employment of this algorithm yields the more rapid convergence than that of only the Aitken's δ^2-process.

1. 序　論

Aitken の δ^2-過程は，加速過程として，よく知られている[1),2),3),5),6)]．しかしながら，Aitken の δ^2 過程を計算の最初から適用したとき，収束がかえって遅くなったり，また，かなり収束したときに，適用したとしても，かならずしも収束が速くならない場合がある[4)]．このような場合に，筆者は次のような加速過程を適用することを提案した[4)]．

実数の数列 $\{x_p\}$ の連続した 3 つの数値を x_p, x_{p+1}, x_{p+2} として，適当な偶数 n に対して，

加速過程，

$$x_{p+2}^{(n)}=x_{p+2}+\omega_n(x_{p+2}-x_p) \tag{1.1}$$

を定義する．

ここに，

$$\omega_n=\sum_{i=1}^{n/2}t^{2i} \tag{1.2}$$

$$t=(x_{p+2}-x_{p+1})/(x_{p+1}-x_p) \tag{1.3}$$

である．

式 (1.1) は数列 $\{x_p\}$ が

$$x_p=x+c_1t_1^p+c_2t_2^p+O(t_3^p) \tag{1.4}$$

を満たすとき定義される．

ここに，

$$1>|t_1|>|t_2|\geqq|t_3| \tag{1.5}$$

である．また，c_1, c_2 は定数である．

この論文は，式 (1.1) で定義される加速過程の加速係数 ω_n の添字 n の値を自動的に調節することのできる加速法を作ることである．

式 (1.4) を満たす典型的な例として，絶対値最大の固有値を求めるためのベキ乗法がある．

この加速法の実験例として，4 章でベキ乗法の収束を加速する問題を考える．

この加速法の適用出来る例としては，連立一次方程式の反復解法などがある．連立一次方程式の反復解法は，一般に，M を反復行列として，

$$x_{p+1}=Mx_p+f \tag{1.6}$$

と表わされる．

このとき，数列 $\{x_p\}$ の極限値を x で表わし，

$$e_p=x_p-x \tag{1.7}$$

とおくと，式 (1.6) から

$$e_{p+1}=Me_p=M^pe_0 \tag{1.8}$$

を得る．このとき，x_p, x, f, e_p などはベクトルを表わすものとする．

簡単な計算によって，式 (1.8) から式 (1.4) を導くことができる．従って，式 (1.1) で定義される加速過程は SOR 法などの連立一次方程式の反復解法にも適用できる．

2. 収束率の評価

式 (1.4) において，

$$t_2=\alpha t_1 \tag{2.1}$$

とおくと，

---

* An Algorithm of an Acceleration Process Covering the Aitken's δ^2-Process by Ken IGUCHI (Toyota Technical College).

** 豊田工業高等専門学校

$$x_p=x+(c_1+c_2\alpha^p)t_1^p+O(t_3^p) \tag{2.2}$$

を得る.

簡単のために以後, $O(t_3^p)\equiv 0$ とおいて近似計算する.

いま,

$$e_p=x_p-x \tag{2.3}$$

とおくと, 式 (2.2) から

$$e_p=(c_1+c_2\alpha^p)t_1^p \tag{2.4}$$

を得る.

さらに,

$$e_{p+2}^{(n)}=x_{p+2}^{(n)}-x \tag{2.5}$$

とおくと, 式 (1.1) から

$$e_{p+2}^{(n)}=e_{p+2}+\sum_{i=1}^{n/2}t^{2i}(e_{p+2}-e_p) \tag{2.6}$$

を得る.

式 (2.4) を繰り返し使って,

$$e_{p+1}=\frac{c_1+c_2\alpha^{p+1}}{c_1+c_2\alpha^p}\cdot t_1e_p, \tag{2.7}$$

$$e_{p+2}=\frac{c_1+c_2\alpha^{p+2}}{c_1+c_2\alpha^p}\cdot t_1^2e_p \tag{2.8}$$

を得る.

式 (2.7), (2.8) から

$$e_{p+1}-e_p=\frac{c_1(t_1-1)+c_2\alpha^p(\alpha t_1-1)}{c_1+c_2\alpha^p}\cdot e_p$$

$$\fallingdotseq(t_1-1)\left\{1-\frac{c_2\alpha^p(1-\alpha)}{c_1(t_1-1)}\cdot t_1\right\}e_p \tag{2.9}$$

$$e_{p+2}-e_{p+1}=\frac{c_1(t_1-1)+c_2\alpha^{p+1}(\alpha t_1-1)}{c_1+c_2\alpha^p}\cdot t_1e_p$$

$$\fallingdotseq t_1(t_1-1)\times\left\{1-\frac{c_2\alpha^p(1-\alpha)((1+\alpha)t_1-1)}{c_1(t_1-1)}\right\}e_p \tag{2.10}$$

を得る.

式(2.9), (2.10)を式(2.6)に代入して

$$\frac{e_{p+2}^{(n)}}{e_p}\fallingdotseq\frac{c_2}{c_1}\alpha^p(1-\alpha)^2t_1^2\left\{\frac{1-(n+2)t_1^{n+1}+(n+1)t_1^{n+1}}{(1-t_1)^2}-\frac{n+2}{1-\alpha}t_1^n\right\}+t_1^{n+2} \tag{2.11}$$

を得る.

式(2.11)は, $n\to\infty$ とするとき, Aitken の δ^2-過程に対応する式を得る. すなわち,

$$e_{p+2}^{(\infty)}/e_p\fallingdotseq c_2\alpha^p(1-\alpha)^2t_1^2/c_1(1-t_1)^2 \tag{2.12}$$

となる.

式(2.11)において, $p\to\infty$ とすると,

$$\lim_{p\to\infty}e_{p+2}^{(n)}/e_p=t_1^{n+2} \tag{2.13}$$

を得る.

一方式 (2.12) から, Aitken の δ^2-過程に対しては

$$\lim_{p\to\infty}e_{p+2}^{(\infty)}/e_p=0 \tag{2.14}$$

を得る.

式(2.11)は, 式 (1.1) を1回適用したときの収束率を与える. 式(2.13)は, あらかじめ与えられた数値 n に対する最大収束率を与える. 従って, 最大収束率は n の値が大きい程大きいことがわかる.

式(2.11)において, $|\alpha|<1$ であるから, $(e_{p+2}^{(n)}/e_p)$ は p に関して減少関数である. ここに, $(e_{p+2}^{(n)}/e_p)$ は, 式(2.11)の右辺の第一項を表わすものとする.

次に, 比

$$\left(\frac{e_{p+2}^{(n+1)}}{e_p}\right)\bigg/\left(\frac{e_{p+2}^{(n)}}{e_p}\right) \tag{2.15}$$

は, p を含まない. 従って, n,α,t_1 が固定されていれば, この比は一定である.

以上のことから, 式 (1.1) の加速係数に関して, いったん, ω_{n+1} が ω_n よりも速い収束を与えるようになれば, 以後, ω_n が ω_{n+1} よりも速い収束を与えることはない.

3. 加　速　法

2章の理論を基礎にして, 次のような加速法を作った.

ある反復計算により得られる数値の列を $\{x_p\}$ で表わす. そのとき, 数列 $\{x_p\}$ は式 (1.1) を適用できる条件をすべて満たすものとする.

以下の加速法は, 特に指示のないかぎり番号順に計算を実行するものとする.

① $N=1$ とおく.

② $t=(x_{p+2}-x_{p+1})/(x_{p+1}-x_p)$, (3.1)

③ $N>5$ (たとえば) ならば, ④へ行く.
($N\leqq 5$ ならば)

$$\omega_N=\sum_{i=1}^{N}t^{2i} \tag{3.2}$$

$$\omega_{N+1}=(1.0+\omega_N)\times t^2 \tag{3.3}$$

を計算して, ⑤へ行く.

④ $x_{p+2}^{(0)}=x_{p+2}+\omega_\infty(x_{p+2}-x_p)$, (3.4)

$(\omega_\infty=t^2/(1-t^2))$. (3.5)

を計算して, ⑥へ行く.

⑤ $x_{p+2}^{(1)} = x_{p+2} + \omega_{N+1}(x_{p+2} - x_p)$, (3.6)

$x_{p+2}^{(0)} = x_{p+2} + \omega_N(x_{p+2} - x_p)$. (3.7)

⑥ $x_{p+2}^{(0)}$ を出発値として，現在考えている反復式から，新たに，連続する3項の値 x_0', x_1', x_2' を求める．

$$x_p = x_0',\quad x_{p+1} = x_1',\quad x_{p+2} = x_2',$$

と置きかえる．

⑦ 収束判定をする．収束しておれば脱出．

たとえば，

$|x_{p+2} - x_{p+1}| < \varepsilon$（許容誤差）, (3.8)

など．

⑧ $N > 5$ ならば②へ行く．

⑨ $d_{p+2}^{(1)} = x_{p+2}^{(1)} - x_{p+2}$, (3.9)

$d_{p+2}^{(0)} = x_{p+2}^{(0)} - x_{p+2}$. (3.10)

⑩ $|d_{p+2}^{(1)}| < |d_{p+2}^{(0)}|$ (3.11)

ならば，$N = N+1$ として，②へ行く．

$|d_{p+2}^{(1)}| \geqq |d_{p+2}^{(0)}|$ (3.12)

ならば，N の値はそのままにして，②へ行く．

以上の計算を所望の精度を得るまで繰り返す．

4. 実験例

式 (1.4) を満たす典型的な例として，絶対値最大の固有値を求めるためのベキ乗法を考える．ベキ乗法に **3.** で述べた加速法を適用する．

使用した計算機は，豊田高専の FACOM 230-25 で，有効桁数は 7.8 である．

初期ベクトルは2例とも，$x_0^T = (1, 1, \cdots, 1)$ とした．

例 1

$$A = \begin{pmatrix} 3.8 & 0.8 & -0.4 & 0.0 \\ 0.8 & 2.2 & 0.0 & 0.4 \\ -0.4 & 0.0 & 2.8 & -0.8 \\ 0.0 & 0.4 & -0.8 & 1.6 \end{pmatrix}$$

最大固有値≒4.27916.

絶対値最大の固有値をベキ乗法を使って，有効数字6桁まで正しく求める．そのとき，3. で述べた加速法を適用して加速すると，反復回数は15回，Aitken の δ^2-過程のみで加速すると，反復回数は 33 回であった．

例 2

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15 \end{pmatrix}$$

絶対値最大固有値≒19.1754.

同様にして，有効数字6桁まで正しく求める．そのとき，3. で述べた加速法列適用して加速すると，反復回数は，18回，Aitken の δ^2-過程のみで加速すると，反復回数は 24 回であった．

この例に，Aitken の δ^2-過程を適用するときには，式 (3.1) で $|t| > 1$ となる場合があり，この場合には加速しないようにしなければ収束しない．

おわるにあたり，懇切に，多くの誤りを御指摘頂いた査読者に深く感謝致します．

参考文献

1) A. C. Aitken: On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations. Proc. Royal Soc. Edinburgh 46, pp. 289～305, (1926).
2) P. Henrici: Elements of Numerical Analysis, John Wiley & Sons, (1964).
3) 一松 信: 数値解析，税務経理協会，(1971).
4) 井口 健: Aitken の δ^2-過程について，情報処理，Vol. 15, No. 11, pp. 836～840, (1974).
5) A. Ralston: A First Course in Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, (1965).
6) B. Noble: Numerical Method: 1, Oliver & Boyd, Edingburgh, 1964.

（昭和50年6月11日受付）
（昭和50年8月7日再受付）