



区分的3次関数を用いたデータ平滑化*

—節点の決定について—

吉本 富士市** 市田 浩三*** 清野 武***

Abstract

A method is described to determine good knots when a piecewise cubic polynomial is fitted to data by a least squares method.

The positions of knots are determined by the use of the second derivative of the underlying function of data.

The number of knots is determined by the statistic devised by H. Akaike.

1. ま え が き

区分的な関数(スプライン関数)は、複雑な関数形をしたデータとか連続関数の近似関数として、よく用いられている。しかし、よい近似を得るためには、節点をうまく決める必要がある⁵⁾。節点をどのようにして決定するかということは、区分的な関数を利用するとき考慮すべき重要なことの1つであるが、あまり検討されていない。

ここでは、区分的3次関数を用いて最小2乗法によりデータを平滑化する場合の節点の決定について述べる。de Boor と Rice²⁾ は、節点を変数として扱い、非線形最小2乗法の問題を解いて最適な節点の位置を決めることを試みている。しかし、その非線形最小2乗法の問題は極値が多くあるので、節点の初期推定値が悪い場合には、よい近似が得られない。そこで、どのようにして節点のよい初期推定値を求めるかという問題がある。また、この方法は計算量が多い欠点もある。Powell⁴⁾ は、まず少ない節点数で近似を行い、以後よい近似が得られるまで節点を次々と近似の悪い区間に挿入する方法を述べている。この方法は、節点の数が相当に多くなるので、データ圧縮の効果は少な

い。

以上の二つの方法は、2次微分まで連続(C^2)な区分的3次関数を用いている。しかし、データ平滑化を行うときには、必ずしも2次微分まで連続にする必要はないと考えられる^{7),8)}。そこで、以下において述べる方法では、1次微分まで連続(C^1)な区分的3次関数を用いる。

移動平均法を使って、データの意味する関数(2.参照)の2次微分を推定し、それを継ぎ目で不連続な折れ線で近似することにより節点の位置を求める。節点の数は、赤池^{9),10)}の提案した統計量を利用して決める。このようにすれば、区分的3次関数を用いた非線形最小2乗法の問題を解くことなく、簡単により近似関数を作ることができる。

なお、節点で関数のみを連続にした区分的な関数を用いる場合の節点の決定については、田中等の方法がある^{11),12)}。

2. 節点のよい位置

1次微分まで連続な区分的3次関数は、その2次微分が継ぎ目で不連続な折れ線になる特徴がある。これを近似関数として用いるとき、よい近似を得るためには、データの意味する関数の2次微分と近似関数の2次微分ができるだけ近くなるように考慮すればよいと考えられる。ここで、“データの意味する関数”とは、データから誤差を除いた真の関数(未知)のことである。

* Data Smoothing with a Piecewise Cubic Polynomial—On the Determination of Knots—by Fujitchi YOSHIMOTO (Akashi Technical College), Kozo IGHIDA and Takeshi KIYONO (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Kyoto University)

** 明石工業高等専門学校

*** 京都大学工学部情報工学科

簡単に考えると、次のようになる。区間 $[x^{(i)}, x^{(i+1)}]$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) に対して、区分的3次関数を次式で表わす¹⁾。

$$S_i(x) = m_i \frac{(x^{(i+1)} - x)^2(x - x^{(i)})}{h_i^2} - m_{i+1} \frac{(x - x^{(i)})^2(x^{(i+1)} - x)}{h_i^2} + y_i \frac{(x^{(i+1)} - x)^2[2(x - x^{(i)}) + h_i]}{h_i^3} + y_{i+1} \frac{(x - x^{(i)})^2[2(x^{(i+1)} - x) + h_i]}{h_i^3} = A_i x^3 + B_i x^2 + C_i x + D_i. \quad (1)$$

ここに、 $x^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) は節点で、 $h_i = x^{(i+1)} - x^{(i)}$ である。また

$$\left. \begin{aligned} S_i(x^{(i)}) &= y_i, \\ \frac{dS_i(x)}{dx} \Big|_{x=x^{(i)}} &= m_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となることは容易にわかる。すると、

$$\frac{dS_i(x)}{dx} = 3A_i x^2 + 2B_i x + C_i, \quad (3)$$

$$\frac{d^2S_i(x)}{dx^2} = 6A_i x + 2B_i. \quad (4)$$

いま、ある関数 $f(x)$ を(1)で近似するとしよう。このとき、 $f''(x) \approx S_i''(x)$ とすれば、 C_i をうまく決めることにより $f'(x) \approx S_i'(x)$ とできる。反対に、 $f''(x)$ と $S_i''(x)$ が大きく異なっていると、 $f'(x) \approx S_i'(x)$ とできない。これは、 $S_i'(x)$ は C_i を変化するだけでは、その“形”は変わらず“位置”が変わるだけであることからわかる。次に、 $f'(x) \approx S_i'(x)$ とできれば、 D_i をうまく決めることにより $f(x) \approx S_i(x)$ とできる。

そこで、データの意味する関数の2次微分を推定して、それを継ぎ目で不連続な折れ線で近似すれば、その継ぎ目が節点のよい位置になると思われる。

3. 2次微分の推定

一般に、誤差のあるデータの意味する関数の2次微分を精度よく求めることは容易ではない。ここでは、最小2乗法を用いた移動平均法を利用して、それを求める。このときの近似関数には3次関数を用いて、その2次微分を計算して求める2次微分の推定値とする。

データの組 (x_k, f_k) ($k=1, 2, \dots, N$) が与えられており、 f_k にのみ平均値が0で分散が σ^2 の誤差があると仮定する。ここで、 x_k をデータ点と言うことにする。すべてのデータ点での2次微分の値を計算する。

このとき、最小2乗法で考慮するデータは、各データ点において、その点の右側と左側を同数にする。

いま、データ点 x_j における2次微分を推定しよう (Fig. 1)。近似関数を

$$P_j(x) = a_0' + a_1'x + a_2'x^2 + a_3'x^3 \quad (5)$$

とする。データ f_j の右側および左側で考慮するデータの個数を α_j 個ずつとしたとき、残差の2乗和は

$$R_j = \sum_{k=j-\alpha_j}^{j+\alpha_j} \{P_j(x_k) - f_k\}^2 \quad (6)$$

となる。この(6)を最小にするパラメータ a_2', a_3' を求めると

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2P_j(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_j} &= 2a_2' + 6a_3'x_j \\ &= f_j''. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

この2次微分の値を x_j での2次微分の推定値とする。

移動平均法では、普通は α_j を j に関係なくすべて同じ値に固定している。しかし、適切な α_j の値はデータによって異なるので、そのよい値を求めることは簡単でない。そこで、各データ点において“傾向”(trend)⁴⁾を用いて、よい α_j の値を自動的に決めながら移動平均を行う。残差の2乗和(6)で考慮されるデータの含まれる区間 $[x_{j-\alpha_j}, x_{j+\alpha_j}]$ における傾向を考えよう。残差を

$$r_k = P_j(x_k) - f_k \quad (8)$$

$$(k = j - \alpha_j, j - \alpha_j + 1, \dots, j + \alpha_j)$$

と書く、ここに、 r_k はすべての k について互に独立で、平均値0で、同じ確率密度をもつ確率変数であると仮定する。すなわち

$$\int r(r)dr = 0. \quad (9)$$

ここで、積分は r のすべての範囲にわたって行う。

$$Z_j = \sum_{k=j-\alpha_j+1}^{j+\alpha_j} r_{k-1}r_k \quad (10)$$

を考えると、その平均値は

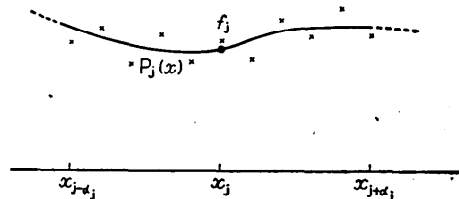


Fig. 1 Estimation of the values of the second derivative

$$\int \cdots \int \left[\sum_{k=j-\alpha_j+1}^{j+\alpha_j} r_{k-1} r_k \right] \rho(r_{j-\alpha_j+1}) \cdots \rho(r_{j+\alpha_j}) \times dr_{j-\alpha_j+1} \cdots dr_{j+\alpha_j} = 0 \quad (11)$$

であり、その分散は

$$\int \cdots \int \left[\sum_{k=j-\alpha_j+1}^{j+\alpha_j} r_{k-1} r_k \right]^2 \rho(r_{j-\alpha_j+1}) \cdots \rho(r_{j+\alpha_j}) \times dr_{j-\alpha_j+1} \cdots dr_{j+\alpha_j} = 2\alpha_j \left[\int r^2 \rho(r) dr \right]^2 \quad (12)$$

となる。この式より

$$Z_j \geq \sqrt{2\alpha_j} \left[\int r^2 \rho(r) dr \right] \quad (13)$$

を考える。これを離散的な形で表現すると

$$Z_j \geq \sqrt{2\alpha_j} \sum_{k=j-\alpha_j+1}^{j+\alpha_j} r_k^2 / (2\alpha_j + 1) \quad (14)$$

ここで、(14)の右辺に重み β をかけて、(6)を用いれば次の式が得られる。

$$Z_j \geq \beta R_j \sqrt{2\alpha_j} / (2\alpha_j + 1) \quad (15)$$

この式の右辺は、(10)~(13)よりわかるように、左辺の標準偏差を β 倍したものである。もし不等式(15)が満たされれば、区間 $[x_{j-\alpha_j+1}, x_{j+\alpha_j}]$ には傾向があり、 $P_j(x)$ はよい近似関数でない——したがって α_j はよい値でない——と判定する。しかし、 α_j が小さすぎると、 $P_j(x)$ はデータに追従しすぎてよい近似関数にならない。

そこで、各データ点 x_j において、 α_j の値を変化させながら(15)の両辺の値を計算する。そして、(15)を満足しない最も大きな α_j を、そのよい値として採用する。このときの(7)の値を、その点の2次微分とする。ここで、 α_j の値の初期推定値に α_{j-1} を用いて、少ない計算量で α_j のよい値を求めるように考慮する。

最初のいくつかのデータに対しては、 α_j の値と j を同時に変化させて $\alpha_j = j - 1$ とし、(15)を満足しない最も大きな α_j (このときの j を J と書く) に対する $P_J''(x_k)$ ($k=1, 2, \dots, J$) を x_k ($k=1, 2, \dots, J$) 点の2次微分の推定値とする。最後のいくつかのデータについても同様に扱う。 β の値は、数値実験によれば0.5程度が望ましい。

なお、データが等間隔であれば、原点移動を行うことにより計算量を少なくできる。

4. 2次微分の近似

推定した2次微分を、継ぎ目で不連続な折れ線で近似する。このため、許容誤差 ϵ_{\max} (この決め方は後で

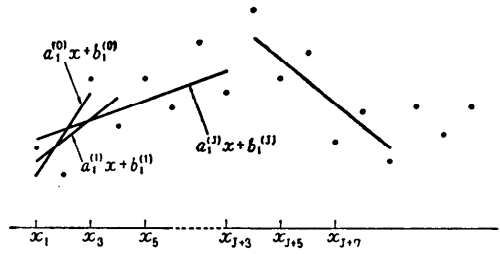


Fig. 2 Approximation of the second derivative with a piecewise linear function

述べる)を与えて、 f_k'' ($k=1, 2, \dots, N$) に対する最小2乗近似を求める (Fig. 2)。

まず、3個の2次微分の値 f_1'', f_2'', f_3'' に対して、最初の線分 $a_1^{(0)}x + b_1^{(0)}$ を最小2乗法によりあてはめて、残差の2乗和

$$U_1^{(0)} = \sum_{k=1}^3 \{a_1^{(0)}x_k + b_1^{(0)} - f_k''\}^2 \quad (16)$$

を計算する。もしも $U_1^{(0)} > \epsilon_{\max}$ であれば、最初の近似線分は点 (x_1, f_1'') と (x_2, f_2'') を結ぶ線分である。そうでなければ、考慮する2次微分の値を1つずつ増大しながら最小2乗近似を続けて、残差の2乗和

$$U_1^{(j)} = \sum_{k=1}^{j+3} \{a_1^{(j)}x_k + b_1^{(j)} - f_k''\}^2, \quad (j=0, 1, \dots) \quad (17)$$

を計算する。ここで、 $U_1^{(j-1)}$ を使って $U_1^{(j)}$ を計算することにより、計算量を少なくする。このようにして、 $U_1^{(j+1)} > \epsilon_{\max}$ となる点 (x_{j+4}, f_{j+4}'') をさがすと、最初の近似線分は f_k'' ($k=1, 2, \dots, j+3$) に対する最小2乗近似線分 $a_1^{(j)}x + b_1^{(j)}$ となる。次に f_{j+4}'' から始めて、同様にして2番目の近似線分を計算する。このプロセスを、すべての2次微分の値に対する近似線分が求まるまで続けると、2次微分は何本かの線分で近似され、その各線分に対する残差の2乗和は ϵ_{\max} 以下である。

以上のアルゴリズムを“折線近似法”ということにする。次に、この方法によって得られる近似線分の数を固定して、各線分に対する残差の2乗和のうち最大なものを、できるだけ小さくするような最適化を行う。このアルゴリズムは以下ようになる。線分の本数は m と仮定する。

ステップ 1

折線近似法を用いて、すべての2次微分の値に対して最小2乗近似を求める。この結果、各線分に対する残差の2乗和が $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m$ となったとする。次に

$$\max_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i \equiv \varepsilon_j \quad (18)$$

となるような ε_j をさがす。

ステップ 2

j 番目の線分に対する最後の 2 次微分の値を取り除き、この区間に対する最小 2 乗近似を計算しなおす。

この結果、この線分に対する残差の 2 乗和が ε_j' になったとする。

ステップ 3

もしも $\varepsilon_j' < \varepsilon_j$ ならばステップ 4 へいく。そうでなければステップ 2 へもどる。

ステップ 4

新しい区間 j より後のすべての 2 次微分の値に対して折線近似法を適用する。このとき

$$\varepsilon_{\max}' = \varepsilon_j - \delta \quad (19)$$

を許容誤差とする。ここに、 δ は ε_j に比べて十分小さい値である。

ステップ 5

ステップ 4 の結果線分数が増大しなければ、最大誤差は ε_j から ε_{\max}' へ減少する。そこで各区間の残差の 2 乗和を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ と書きなおして、ステップ 1 の後半へもどる。もしも線分数が m より大きくなればストップする。

以上のようにして、線分数が増大する直前の折れ線近似を、2 次微分の値に対する近似とする。

こうして、折線近似法と最適化により、2 次微分を継ぎ目で不連続な折れ線を用いて容易に近似できる。この近似線分の本数は、許容誤差を次のように変えて計算すれば、1 本ずつ増大できる。まず、許容誤差を

$$\varepsilon_{\max} \geq N \left[\left\{ \max_{1 \leq k \leq N} (f_k'') - \min_{1 \leq k \leq N} (f_k'') \right\} / 2 \right]^2 \quad (20)$$

となる値にすれば、すべての 2 次微分の値に対して線分数 1 の最小 2 乗近似を得る。次に、この残差の 2 乗和より少し小さい値を許容誤差にすれば、線分数 2 の近似を得る。以後、最適化後の最大の残差の 2 乗和より少し小さい値を次の許容誤差にするプロセスを続ければ、線分数は 1 本ずつ増大し、2 次微分の値に対して各線分数の場合の折れ線による近似を得る。この近似線分の継ぎ目を節点の位置とすれば、各節点数の場合の節点のよい位置となっていると思われる。

なお、以上のようにすれば、各区間には 2 個以上のデータが含まれることになる。

5. 区分的 3 次関数を用いた最小 2 乗法

データに対して、(1) を最小 2 乗法によりあてはめる (Fig. 3)。このとき、残差の 2 乗和は

$$Q = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=p_i}^{q_i} \{S_i(x_k) - f_k\}^2 \quad (21)$$

となる。ここに、 $p_i(q_i)$ は区間 $[x^{(i)}, x^{(i+1)}]$ 中の最小 (最大) のデータ点の添字である。また、 $x^{(i)} \leq x_1, x_2, \dots, x_N \leq x^{(n)}$ とする。この (21) を (y_i, m_i) ($i=1, 2, \dots, n$) で偏微分して 0 とおけば、正規方程式

$$Dz = g \quad (22)$$

を得る。ここに、

$$z = (y_1, m_1, \dots, y_n, m_n)^T \quad (23)$$

であり、 T は転置行列を示す。係数行列 D は、対称な帯行列となる特長がある。正規方程式 (22) を解いて、その解 $y_1, m_1, \dots, y_n, m_n$ を (1) へ代入すれば、データ平滑化のための近似関数を決定できる。

しかし、よい近似関数を得るためには節点の数と位置を適切に決める必要がある。そこで以下のようにする。近似関数 (1) より、次の回帰模型を考える。

$$f_k = S_i(x_k) + \varepsilon_k,$$

$$(x^{(i)} \leq x_k \leq x^{(i+1)}, i=1, 2, \dots, n-1) \quad (24)$$

ここで、 ε_k は平均値 0、分散 σ^2 の誤差であると仮定する。最小 2 乗法により、 $S_i(x)$ をデータへあてはめるとき、誤差分散の不偏推定量は次のようになる。

$$V = Q / (N - 2n). \quad (25)$$

ここに、 N はデータ数で、 $2n$ は回帰係数 y_i, m_i ($i=1, 2, \dots, n$) の数である。この V を近似関数の評価の判定基準として用いて、節点の数を決めることも考えられる¹³⁾。しかし、これは判定基準として利用するとき不便なことがある。

赤池^{9), 10)} は、回帰模型 (すなわち近似関数) の評価の判定基準として統計量

$$N \log_e (1/N) Q + 4n \quad (26)$$

を提案し、これを最小にする回帰係数 (の数) を選べ

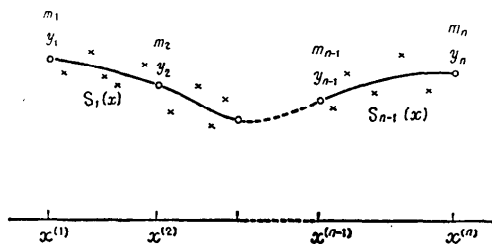


Fig. 3 Least squares fitting with a piecewise cubic polynomial

ばよいことを示している。ここで、データ数 N は定数であるから、(26)のかわりに

$$N \log_e Q + 4n \tag{27}$$

を用いても同様である。(26)、(27)の特長は、最もよい近似関数が得られる場合に、それが最小値となることである。

よって、次のようにして適切な節点を決定する。まず、4. で述べたようにして節点の数が3のときの節点の位置を求める*。これを用いてあてはめを行い(27)を計算する。次に、節点の数が4のときの節点の位置を求めて、あてはめを行い(27)を計算する。このプロセスを続けていくと、節点の数の増加とともに(27)の値は減少していき、あるところで最小値となる(Table 1参照)。このとき、よい近似関数となり、適切な節点とする。誤差分散の値は(25)より計算できる。

なお、4. で述べたように各区間には2個以上のデータが含まれているので、(22)は常に一意の解を持つようになる(6.参照)。

6. 節点の位置の最適化

5. で述べた方法で、よい結果が得られる場合が多いが、不十分な結果となることもある。この原因としては、2次微分の推定精度の問題、折れ線による2次微分の近似方法と近似精度の問題などが考えられる。もしも結果が十分でない場合には、5. のようにして得られた接点を初期値として、次に述べる簡単な最適化のアルゴリズムにより、節点の位置を調整すればよい。このとき、節点の初期値は非常によいので、少ない計算量で十分よい結果を得ることができる。

節点数を n として、各区間の残差の2乗和を $Q_i (i=$

$1, 2, \dots, n-1)$ と書く。すると

$$Q = \sum_{i=1}^{n-1} Q_i. \tag{28}$$

両端の節点 $x^{(1)}, x^{(n)}$ は固定して、内部の節点 $x^{(i)} (i=2, 3, \dots, n-1)$ を動かして(28)を最小にする。これは、パラメータの数 $2n$ を固定して(27)を最小にすることに対応している。そこで、次のように行う。

ステップ 1

$i=1, 2, \dots, n-2$ に対して、 Q_i と Q_{i+1} を比較する。もしも $Q_i > Q_{i+1}$ ならば

$$x^{(i')} = x^{(i)} - \alpha_i \tag{29}$$

とする。反対に、 $Q_i < Q_{i+1}$ の場合は

$$x^{(i')} = x^{(i)} + \beta_i \tag{30}$$

とする。このとき、正規方程式(22)が一意的な解を持つように考慮する。このためには、節点を2重にした3次の B -スプラインの線形結合で(1)を表現したとき、その B -スプラインが支持するデータが少なくとも1つあるようにすればよい^{3), 6)}。 α_i, β_i はデータの間の大きさ程度でよい。つぎに、節点が $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(i')}, \dots, x^{(n)}$ のときの残差の2乗和 Q' を計算する。もしも $Q' < Q$ ならば $x^{(i)}$ を $x^{(i')}$ で置きかえる。そうでなければ $x^{(i)}$ はそのままにしておく。

ステップ 2

もしも節点が1つも動かなければストップする。さもなければステップ1をくり返す。

7. 計算例

次のような関数形をしたデータを用いた。

$$f_k = \frac{1}{0.01 + 10(x_k - 0.3)^2} + \frac{1}{0.015 + 10(x_k - 1.2)^2} + \varepsilon_k. \tag{31}$$

ここに、 ε_k は正規分布をする誤差で、その平均値は0、分散は1である。データ点 x_k は0.005から0.01きざみに1.995までの200個とした。Fig. 4(次頁参照)は、推定した2次微分の値を折れ線により近似したものである。その折れ線の継ぎ目に節点を入れて最小2乗近似によりデータを平滑化するとFig. 5(次頁参照)となる。Fig. 6(次頁参照)は、節点を等間隔にした場合である。Fig. 5および6で、節点の数は14、 $x^{(1)}=0, x^{(14)}=2$ である。統計量(27)の計算値をTable 1に示す。ここで述べた方法を用いた場合には、(27)は節点の数が14のとき最小値となっている。しかし、節点を等間隔にした場合には、(27)の値

Table 1 The statistic of eq. (27)

Number of knots (n)	Statistic $N \log Q + 4n$	
	The case to use the method described here	The case to use knots which are at equal intervals
8	1,412.5	1,987.7
9	1,371.5	1,886.2
10	1,207.0	1,917.9
11	1,188.6	1,944.0
12	1,130.9	1,852.4
13	1,116.6	1,706.8
14	1,087.0	1,791.4
15	1,087.4	1,762.5
16	1,087.8	1,643.1
17	1,092.3	1,715.5
18	1,093.2	1,692.6

* 普通は、両端 $x^{(1)}, x^{(n)}$ は節点とは言わないが、本論文では、便宜上節点として考えている。

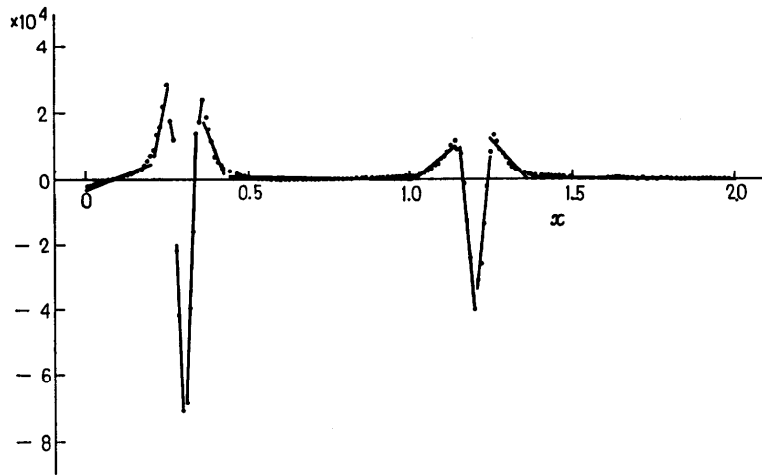


Fig. 4 Result of the approximation of the second derivative

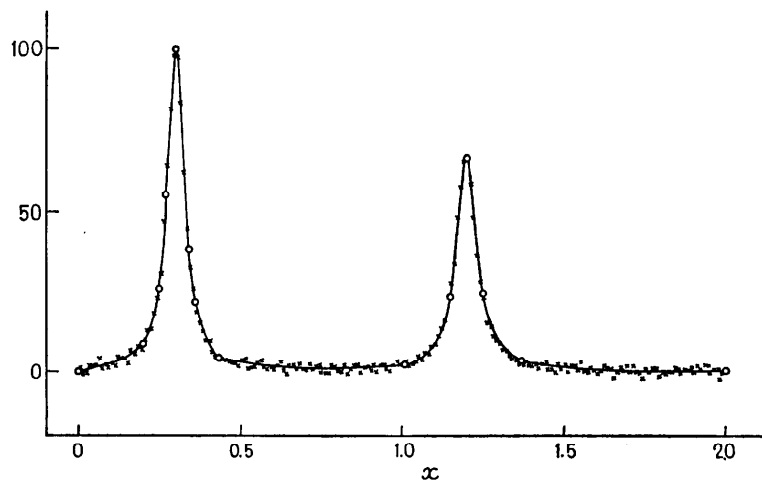


Fig. 5 Result of smoothing by the method described here (Number of knots is 14)

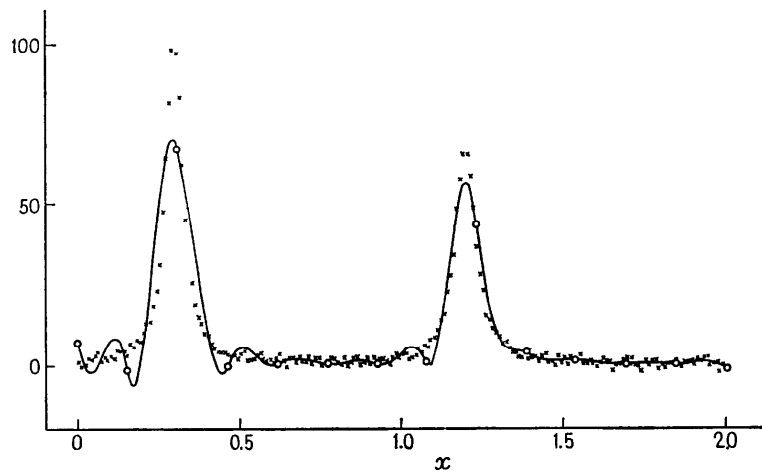


Fig. 6 Result of smoothing by the use of the knots which are at equal intervals

は大きくてしかも振動している。ゆえに節点のよい位置を求めなければ、統計量(27)を用いて節点の適切な数を決定することはできない。

8. む す び

以上において、区分的3次関数を用いて、その節点の数と位置を適切に決めてデータを平滑化する方法を述べた。ここでは、区分的3次関数を1次微分まで連続にしたが、もしそれを2次微分まで連続にする必要がある場合には、次の2つの方法が考えられる。

- (i) 2次微分を継ぎ目で連続な折れ線で近似してその継ぎ目を節点の位置とする。
- (ii) 3次微分を推定して、それをステップ関数で近似して、その継ぎ目を節点の位置とする。

これらについては今後検討する予定である。何階かの微分を利用して節点の位置を決める考え方は、連続関数の近似への応用など他にも利用できると思われる。

参 考 文 献

- 1) J. H. Ahlberg, E. N. Nilson and J. L. Walsh: *The Theory of Splines and Their Applications*, p. 284, Academic Press, London (1967).
- 2) C. de Boor and J. R. Rice: *Least Squares Cubic Spline Approximation II*, Purdue University Report, CSD TR 21 (1968).
- 3) C. de Boor: *Package for Calculating with B-Splines*, MRC Technical Summary Report No. 133, Mathematics Research Center (1973).
- 4) M. J. D. Powell: *Curve Fitting by Splines in One Variable*, *Numerical Approximation to Functions and Data*, J. G. Hayes, ed., pp. 65~83, Athlone Press, London (1970).
- 5) J. R. Rice: *The Approximation of Functions* Vol. II, p. 334, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).
- 6) I. J. Schoenberg and A. Whitney: *On Pólya Frequency Functions III*, *Trans. Amer. Mathem. Soc.*, Vol. 74, pp. 246~259 (1953).
- 7) J. A. Payne: *An Automatic Curve Fitting Package*, *Numerical Approximation to Functions and Data*, J. G. Hayes, ed., pp. 98~106, Athlone Press, London (1970).
- 8) J. Ferguson and P. A. Staley: *Least Squares Piecewise Cubic Curve Fitting*, *Com. of the ACM*, Vol. 16, pp. 380~382 (1973).
- 9) H. Akaike: *Automatic Data Structure Search by the Maximum Likelihood*, *Computers in Biomedicine Supplement to the Proceedings of the Fifth Hawaii International Conf. on System Sciences*, pp. 99~101 (1972).
- 10) H. Akaike: *Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle*, *2nd International Symposium on Information Theory*, B. N. Petrov and F. Csáki eds., pp. 267~281, *Académiai Kiadó*, Budapest (1973).
- 11) 田中, 松原, 後藤: 区分多項式の区分点と次数の決定, *日本OR学会秋季研究発表会アブストラクト集*, pp. 61~62 (1974).
- 12) 田中, 松原, 後藤: 区分回帰モデルの分散基準による区分点の決定, *日本OR学会春季発表会アブストラクト集* pp. 51~52 (1975).
- 13) 吉本, 市田, 清野: 3次スプラインを用いた曲線のあてはめ, *電気学会全国大会講演論文集*, p. 9 (1975).

(昭和50年7月22日受付)