

## ブロック化赤 - 黒順序付け法による 並列マルチグリッドポアソンソルバの開発とその性能評価

河合 直聡<sup>†</sup> 岩下 武史<sup>†</sup>  
中島 浩<sup>†</sup> 三宅 洋平<sup>††</sup>

### 1. はじめに

本稿では、多くの数値シミュレーションにおいて重要なポアソン方程式の求解に関して述べる。有限差分法により離散化されたポアソン方程式の求解法としてマルチグリッド法<sup>1)</sup>を利用した場合について、計算の大部分を占めるスムーザの並列化に関する検討を行う。本稿では著者らが提案するブロック化赤 - 黒順序付け法<sup>2)</sup>をガウス=ザイデルスムーザの並列化手法として用いることにより、従来法と比べて高速な求解が可能となることを示す。

### 2. マルチグリッド法による求解とその並列化

マルチグリッド法では、対象とする問題の離散化格子に対してそれよりも粗い格子を用意し、誤差を複数の格子上で効率的に除去することを行う。同手法は各格子レベルにおいて、空間的に高周波な誤差成分は定常反復法等により除去し易い性質に基づいている。

マルチグリッド法における並列処理に適合するスムーザとして知られているものに、ヤコビ-ガウス=ザイデル併用型のハイブリッドスムーザ (以下 Hybrid) や赤 - 黒順序付けガウス=ザイデルスムーザ (以下 Red-Black) がある。前者は一般に並列度が上がるに従ってマルチグリッド法の収束性が劣化する問題が生じるが、後者はその点でも優れている。しかし、同手法では未知変数に関する配列を辞書式順序付け法に基づいて用意する実装の場合、これに対してストライドアクセスを行うこととなり、キャッシュデータの再利用性が低くなる問題がある。そこで、本稿では格子点をまず複数のブロックに分割し、そのブロックに赤 - 黒順序付けを適用するブロック化赤 - 黒順序付け法によるガウス=ザイデルスムーザ (以下 Block Red-Black) の並

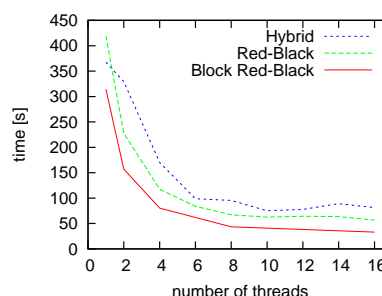


図 1 並列対応スムーザの性能評価 (求解に要する計算時間の比較)。格子点数  $512^3$ , 反復終了のための相対残差の閾値  $10^{-7}$ , 京都大学オープンスーパーコンピュータ HX600 1 ノードで測定。

列化を行う。同手法ではストライドアクセスを回避しながら、並列性と収束性を維持することが期待できる。

### 3. 数値実験

マルチグリッド法に先のスムーザをそれぞれ適用し、スレッド並列化した時の計算時間を図 1 に示す。

Hybrid を用いた場合、逐次では反復回数が 11 回であったのに対して、スレッド数によっては最大で 21 回まで増大するため、他の手法よりも遅くなっている。また、Red-Black と Block Red-Black とでは、前者の反復回数が 10 回に対して後者は 11 回であったが、計算時間の点では後者の方がいずれのスレッド数でも高速であった。Block Red-Black を用いることにより、16 スレッド使用時に Hybrid よりも 2.45 倍、Red-Black よりも 1.72 倍の高速化が達成できた。

### 参考文献

- 1) William L. Briggs, Van Emden Henson, Steve F. McCormick: "Amultigrid Tutorial 2nd Edition", SIAM, 2000.
- 2) T. Iwashita, M. Shimasaki: "Block Red-Black Ordering: A New Ordering Strategy for parallelization of ICCG method", Int. J. Parallel Program., Vol.31, No.1, (2003), pp55-75.

<sup>†</sup> 京都大学  
<sup>††</sup> 神戸大学