論 文

二次元配列に基づく分類網の構成に関する二，三の結果*

河 田 亨** 千 葉 俊 明*** 尾 崎 弘**

Abstract

Many synthesis methods of sorting networks using comparators (C_2-cells) are usually estimated asymptotically by the number of C_2-cells required by these algorithms as functions of the number of inputs. Therefore, those methods give economical constructions for some special forms of the number of inputs (e.g. even powers of two (2^{2r}) in Van Voorhis' algorithm).

In this paper, we investigate some conservative properties of patial ordering generated in the process of synthesis, and a synthesis algorithm is obtained by applying these properties. The number of C_2-cells required by this algorithm for 2^{2r+1} inputs as a function of the number of inputs has the same coefficients of the two governing terms as by Van Voohis' algorithm for 2^{2r} inputs. As another application, an algorithm suitable for the synthesis of sorting networks using 4-sorters as components is proposed and the number of C_4-cells required by this algorithm is derived as a function of the number of inputs.

1. まえがき

分類網の構成は，ディジタル・システムを構成するサブユニット間で処理内容に応じた接続要求にしたがってデータ転送のルートを設定する接続回路網，および並列処理，パイプライン処理のための非逐次的分類アルゴリズム，等への応用から比較器の配列接続によって構成する立場で研究されてきた．

Batcher[1] は，分類された2つの入力列をマージする経済的な方法として odd-even-merge なる概念を提案し，これを再帰的に適用した組織的構成法を与えた．一方，文献 6) を背景に，最近 Van Voorhis はデータ転送線の集合の二次元配列に基づく有効な方法を示した．この方法は，4のべき乗で表される入力数に対しては確かに有効であるが，2の奇数べき乗の場合にはその有効性が失われる．

本文では，二次元配列に基づく分類網の構成過程で得られる半順序の保存性に関する定理を導くことにより，入力数が2の奇数べき乗の場合に，文献 4) の有効性を生かせる構成法を提案する．さらに，分類網の構成における基本セルとして4入力分類回路を用いた場合に，経済的構成の観点から特に有効な方法を提案し，それに対するセル数の評価を与える．

2. 諸定義と基本的考察

本文では，自然数の集合 $I=\{1,2,\cdots,N\}$ の任意の順列を N この入力として与えたとき，出力側で常にそれを昇順に分類した系列を得る回路網の構成を考える．このように限定しても一般性を失わないことは明らかである．また，議論を明白にするためにデータを転送する信号線相互の順序は入力側から出力側まで一定に保つものとし（**Fig. 1**（次頁参照）），信号線の番号の集合を $A=\{0,1,\cdots,N-1\}$ で表す．さらに，$i\in A$ に対して，$\phi(i)$ は信号線 i 上のデータ値（$\in I$）を表すものとする．上述のことから，ϕ は A から I への全単射な写像で，データ値関数とよぶ．

* Some Results on Syntheses of Sorting Networks based on Two-dimensional Arrangement of Signal Lines by Toru KAWATA, Hiroshi OZAKI (Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering, OSAKA University) and Toshiaki CHIBA (Tokyo Shibaura Electric Co., Ltd. Research of Development Center, Integrated Circuits Laboratory)
** 大阪大学工学部電子工学科
*** 東京芝浦電気(株)総合研究所集積回路研究所

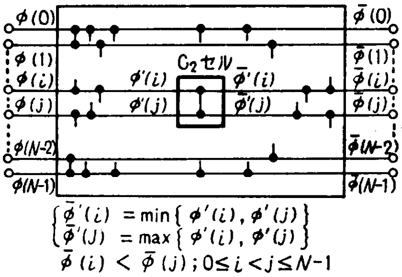


Fig. 1 Sorting network S_N with N inputs and its component (C_2-cell, usually called comparator).

〔定義1〕 入力数，出力数が共に N であるスイッチング回路網に，入力列として I の全要素の任意の順列を与えたとき，それに対応する出力列 $\langle\phi(0),\phi(1),\cdots,\phi(N-1)\rangle$ が A 上で定められた半順序 P_0 に対して，“$(i,j)\in P_0$, $i\neq j$ ならば $\phi(i)<\phi(j)$ である” なる条件を満足するとき，この回路網を N 入力分類網とよび，S_N で表す．

前述の通り，本文では，“$i<j$ ならば $(i,j)\in P_0$” であるとする．

〔定義2〕 比較器(2入力分類網)を以下では C_2 セルとよぶ．信号線 $i,j\,(i<j)$ を入力とする C_2 セルを接続することを $(i:j)$ で表す．そして，信号線の集合上の2つのデータ列 $X=\langle\phi_1(0),\phi_1(1),\cdots,\phi_1(N-1)\rangle$, $Y=\langle\phi_2(0),\phi_2(1),\cdots,\phi_2(N-1)\rangle$ に対して，式(1)の条件が満足されるとき，$X(i:j)=Y$ と表す．このように，$(i:j)$は信号線上のデータ列に作用する演算子とみなすことができる．

$$\left.\begin{array}{l}\phi_2(i)=\min\{\phi_1(i),\phi_1(j)\}\\ \phi_2(j)=\max\{\phi_1(i),\phi_1(j)\}\\ \phi_2(k)=\phi_1(k),\ k\neq i,j\end{array}\right\}\qquad(1)$$

〔定義3〕 C_2 セルを任意に配列接続して得られる N 入力，N 出力の回路網を C_2 網とよぶ．また，C_2 網 θ を構成する C_2 セルの個数を $|\theta|$ で表す．さらに，C_2 網 θ の出力側での信号線 i のデータ値を $\phi_\theta(i)$ と表し，ϕ_θ によって規定される A 上の半順序を P_θ で表す．θ であることが明らかなとき，入力側で ϕ，出力側で $\bar{\phi}$ と表すこともある．

〔定義4〕 α を C_2 網，$T=\{t_i|t_i$ は非負整数で，$i<j$ のとき $t_i<t_j\}$ とするとき，α を構成するすべてのセル $(i:j)$ を $(t_i:t_j)$ にそれぞれ置きかえて得られる C_2 網を $S(\alpha,T)$ と表す．

以下では，自然数 p,q (p は0でもよい) に対して，p/q で整数演算における商を，$p\,/\!/\,q$ でその際の剰余を表すものとする．

A 上の半順序 P に関して，

$$C_P=\{(i,j)|(i,j)\in P;\ i\neq j;\ (i,j)\in P \text{ かつ } (k,j)\in P\Rightarrow i=k \text{ または } j=k\}$$

とおけば，C_P は P において推移的に得られる関係を除去したものである．いま，A 上の二項関係 R,S に関して，

$$R\circ S=\{(i,j)|(i,k)\in R,(k,j)\in S\}$$

$$R^0=\{(i,i)\},\ R^{t+1}=R^t\circ R,\ R^*=\bigcup_{t=0}^{\infty}R^t$$

と定義すれば，$P=C_P{}^*$ が成立する．

〔定義5〕 集合 A から集合 I への全単射 ϕ がつぎの条件を満足するとき，ϕ は半順序 P に無矛盾であるという．すなわち，

“$(i,j)\in P,\ i\neq j\Rightarrow\phi(i)<\phi(j)$”

〔定義6〕 A 上の二項関係 F が以下の性質をもつとき，F をシフトとよぶ．

(i) $(i,j)\in F,(i',j)\in F\Rightarrow i=i'$

(ii) $(i,j)\in F,(i,j')\in F\Rightarrow j=j'$

(iii) $(i,j)\in F^k,(i,j)\in F^{k'}\Rightarrow k=k'$

さらに，A の要素からなる系列 $i_1i_2i_3\cdots i_k$ が $F(i_j)=i_{j+1}\,(0\leq j\leq k-1)$ で，$F(i_k)$ が定義されてなく，また $F(i_m)=i_1$ なる i_m が存在しないとき，この系列をシフト F の鎖という．

シフト F は集合 A を適当に(鎖に)分割し，分割されたおのおのの部分集合(鎖)に関して並列的に分類網を構成することに対応する概念である．ここで，F が定義されていない孤立した要素はそのときの操作の対象外であることを意味する．

定義6より，つぎのことが容易に導ける[2]．

“データ値関数 ϕ_1 と，A 上のシフト F が与えられたとき，F の任意の鎖 $i_1i_2\cdots i_k$ に関して，つぎの条件(i),(ii)を満足するデータ値関数 ϕ_2 がただ1つ存在する．

(i) $\phi_2(i_1),\cdots,\phi_2(i_k)$ は $\phi_1(i_1),\cdots,\phi_1(i_k)$ の置換である．

(ii) $p<q\Rightarrow\phi_2(i_p)<\phi_2(i_q)$.”

さらに，上記の ϕ_1,ϕ_2 が A 上の半順序 P に無矛盾であるとき，シフト F は P を保存するという．

分類網の構成過程で，C_2 網 θ がすでに構成されているとする．いま，あるシフト F を考え，F の各々の鎖 $C_i=i_1i_2\cdots i_k\ (i_j\in A,1\leq j\leq k)$ に対応して，$\phi_{\theta\circ\tau}(i_p)<\phi_{\theta\circ\tau}(i_q)$* (*は次頁)，$(p<q)$ が成立するよ

うに C_2 網 τ を θ に従続接続する．この操作を C_2 網 θ にシフト F を適用するという．また，C_2 網 τ をシフト F を実現する C_2 網という．

〔定義7〕 集合 A の要素を二次元配列状に並べたものを $A=A(d_1, d_2)$ で表す．すなわち，

$$A(d_1, d_2)=\{0,1,\cdots,d_1-1\}\times\{0,1,\cdots,d_2-1\}$$

このとき，A の要素を順序対 (x_1, x_2) で表すが，これは信号線の番号 $(x_2+d_2x_1)$ に対応する．

〔定義8〕 二次元配列 A において，半順序 P をつぎのように定義する．

任意の2つの要素 (x_1, x_2) と (x_1', x_2') に関して，$x_1=x_1'$ かつ $x_2<x_2'$，または $x_2=x_2'$ かつ $x_1<x_1'$ ならば，$(x_1, x_2)P(x_1', x_2')$ である．

このとき，データ値関数 $\phi: A\rightarrow I$ がこの半順序 P に無矛盾であるとき，集合 A は二次元格子関係にあるという．さらに，つぎのような分類網の構成を考える．まず，二次元格子関係を生成する C_2 網 θ_1 を構成し，その後 C_2 網 $\theta_1\theta_2$ が分類網となるような C_2 網 θ_2 を構成して，θ_1 に従続接続する．この構成法を二次元格子配列法とよぶ．ここで，配列の寸法を明記する必要があるとき，それぞれ $\theta_1(d_1, d_2)$，$\theta_2(d_1, d_2)$ と表す．

さて，任意に与えられた入力数に対して最小セル数の分類網を構成する方法は今まで知られておらず，実際極めて困難な問題である．現在考えうるのは，ある一貫した接近法を再帰的に適用して，これまでに提案されている方法よりより経済的な構成法を求めることである．このような立場で，組織的構成法を考える際，ある C_2 網 α に，あるシフトを実現する C_2 網 β を従続接続したとき，α によって生成された半順序が C_2 網 $\alpha\beta$ の出力側で保存されるか否かが基本的な問題となる．これに関しては，つぎの定理が知られている．

〔定理1〕[2] シフト F が半順序 P を保存するための必要十分条件は，つぎの（i），（ii）が成立することである．

（i） $x, y\in A$ に対して，$xF^+y\Rightarrow(y, x)\notin P$

（ii） $C_{11}, C_{12}, \cdots, C_{1m}$，および $C_{21}, C_{22}, \cdots, C_{2n}$ を相異なる F の鎖とし，$C_1=\{C_{11}, \cdots, C_{1m}\}$，$C_2=\{C_{21}, \cdots, C_{2n}\}$ とする．任意の i, j および $|D|=j$ なる $D\subset C_2$ に対して，$(C_{1i}, C_{2j})\in P\Rightarrow|P^{-1}(D)\cap C_1|$** $\geq i$.

さらに，この定理から，二次元格子配列法の基礎となるつぎの性質が導かれる．

〔定理2〕[2] $A(d_1, d_2)$ において，つぎのようなシフト F_a, F_b を定義する．すなわち，$X=(x_1, x_2)$，$Y=(y_1, y_2)$，$(X, Y\in A)$ に対して，$(X, Y)\in F_a\Longleftrightarrow x_i+a_i=y_i$ $(i=1,2)$；$(X, Y)\in F_b\Longleftrightarrow x_i+b_i=y_i$ $(i=1, 2)$ とする．ただし，$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2)$で，$a_1^2+a_2^2\neq 0$，$b_1^2+b_2^2\neq 0$ とする．

このとき，つぎの（i），（ii）は同値である．

（i） F_a は F_b^* を保存し，F_b は F_a^* を保存する．

（ii） $a_ib_i\geq 0$ $(i=1, 2)$.

〔系3〕 $\boldsymbol{a}_1=(a_{11}, 0)$，$\boldsymbol{a}_2=(0, a_{22})$ で，$a_{11}\neq 0$，$a_{22}\neq 0$ とする．このとき，F_{a_i} は $F_{a_j}^*$ を保存する．ただし，$i\neq j$ で，$1\leq i\leq 2$，$1\leq j\leq 2$ とする．

この系において，$a_{11}=a_{22}=1$ とすれば，$A(d_1, d_2)$ において，各行（列）に関して分類を行った後，各列（行）に関して分類を行えば，各行（列）が分類されているという性質が保存される．

一方，つぎのことが知られている．

〔定理4〕[5),6)] N 入力分類網が与えられているとする．この分類網の信号線 $N-1$ とその線上にある C_2 セルのすべてを削除して得られる C_2 網は $(N-1)$ 入力分類網である．

この定理をくり返し適用すれば，入力数がある特定の形で表せる場合に有効な構成アルゴリズムが得られたとき，その形で表せない入力数の分類網を同じ構成法のもとで得ることができる．文献 4）の方法を例にとれば，4のべき乗の形の入力数に対しては，文献 1）の方法よりセル数で $0.145N\log_2 N+0(N)$ 少ない構成が得られ，かつ4のべき乗に近い入力数では，定理4を用いて構成すれば，この有効性は保たれる．しかし，$N=4^r$ の分類網から定理4をくり返し適用して入力数 2^{2r-1} に対する分類網を得ても，**Table 1** に示す通りセル数は文献 1）の方法による結果より劣る．

Table 1 Neumerical results of comparison with three typical synthesis methods

方法 ＼ 入力数	32	128	512	2048	8192
I	191	1471	9727	58376	327679
II	198	1455	9888	60628	340636
III	187	1419	9347	54533	309972

I：Batcher の方法
II：4のべき乗における Van Voohis の方法に定理4をくり返し適用する方法
III：本文の方法

* $\phi_{\theta\circ\tau}(i_p)=\phi_\tau(\phi_\theta(i_p))$

** S を集合するとき，$|S|$ は S の要素数を表す．また，$P^{-1}(D)=\{x|\exists y\in D, (x, y)\in P\}$.

3. 二次元配列における半順序の保存性

二次元配列 $A(d_1, d_2)$ において，2つのシフト F_1, F_2 をつぎのように定める．

$$(i, j)F_1(i, j+1)\,;\ 0 \leqq i \leqq d_1-1,\ 0 \leqq j \leqq d_2-2$$
$$(i, j)F_2(i+1, j)\,;\ 0 \leqq i \leqq d_1-2,\ 0 \leqq j \leqq d_2-1$$

系3により F_2 は $F_1{}^*$ を保存する．すなわち，二次元配列 A の各行について分類を行った後，各列について分類を行えば，二次元格子関係が得られる．

いま，C_2 網 $\alpha(d_1), \alpha(d_2)$ がそれぞれ S_{d_1}, S_{d_2} の一つの実現であるとする．定義7により $A(d_1, d_2)$ の要素 (i, j) が信号線 id_2+j を表していることを考慮すれば，シフト F_1, F_2 を実現する C_2 網 α_1, α_2 は，式(2),(3)で与えられる．

$$\alpha_1 = \alpha(d_2)\mathcal{S}(\alpha(d_2), \{\lambda \mid (\lambda/d_2)=1\}) \cdots \mathcal{S}(\alpha(d_2), \{\lambda \mid (\lambda/d_2)=d_1-1\}) \quad (2)$$
$$\alpha_2 = \mathcal{S}(\alpha(d_1), \{\lambda \mid (\lambda /\!/ d_2)=0\}) \cdots \mathcal{S}(\alpha(d_1), \{\lambda \mid (\lambda /\!/ d_2)=d_2-1\}) \quad (3)$$

このとき，定義8より $\theta_1(d_1, d_2)=\alpha_1\alpha_2$ である．

このように，二次元配列 $A(d_1, d_2)$ に C_2 網 $\theta_1(d_1, d_2)$ を用いて二次元格子関係を生成した後，さらに集合 A を式(4)のように p この部分集合に分割する．

$$Q_k{}^p = \{X \mid ((X/d_2) /\!/ p)=k\},\ 0 \leq k \leq p-1 \quad (4)$$

以下では，$d_1=d_1'\cdot p$ の場合のみを扱うが，一般に $d_1=(d_1'-1)p+q$ $(0<q<p)$ のときは，信号線 $N+i$ $(0 \leq i \leq d_2(p-q)-1)$ にデータ値 $N+i+1$ が入力されるものと考え，信号線 $N+i$ を入力とする C_2 セルは構成された C_2 網から削除するものとすれば，全く同じ議論で構成できる．

式(4)で定義された $Q_k{}^p$ に対して，C_2 網 β_p を式(5)のように定義し，シフト F_p を式(6),(7)のように定めれば，β_p は F_p の一つの実現である．

$$\beta_p = \mathcal{S}(\theta_2(d_1', d_2), Q_0{}^p) \cdots \mathcal{S}(\theta_2(d_1', d_2), Q_i{}^p) \cdots \mathcal{S}(\theta_2(d_1', d_2), Q_{p-1}{}^p) \quad (5)$$

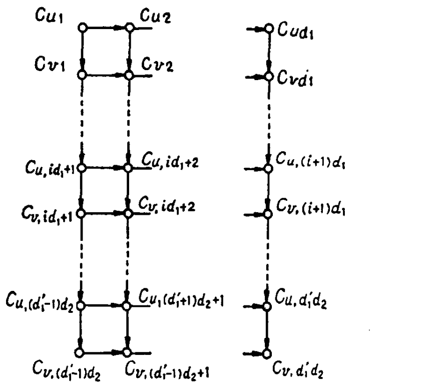
$$\begin{cases} (i, j)F_p(i, j+1)\,;\ 0 \leqq i \leqq d_1-1,\ 0 \leqq j \leqq d_2-2 & (6) \\ (i, d_2-1)F_p(i+p, 0)\,;\ 0 \leqq i \leqq d_1-p-1 & (7) \end{cases}$$

このとき，次の定理が成立する．

〔定理5〕 シフト F_p は C_P が以下のように定義される半順序 $P(=C_p{}^+)$ を保存する．

$$\begin{cases} (i, j)C_P(i, j+1)\,;\ 0 \leqq i \leqq d_1-1,\ 0 \leqq j \leqq d_2-2 \\ (i, j)C_P(i+1, j)\,;\ 0 \leqq i \leqq d_1-2,\ 0 \leqq j \leqq d_2-1 \end{cases}$$

(証明) $A(d_1, d_2)$ の要素 (i, j) が信号線の番号 id_2+j に対応していることを考慮すれば，シフト F が p この鎖 $Q_0{}^p, Q_1{}^p, \cdots, Q_{p-1}{}^p$ からなることは明らかで



$$Q_u^p = \{C_{uk} = (((k-1)/d_2)p+u, (k-1)/\!/d_2) \mid 1 \leq k \leq d_1'd_2\}$$
$$Q_v^p = \{C_{vk} = (((k-1)/d_2)p+v, (k-1)/\!/d_2) \mid 1 \leq k \leq d_1'd_2\}$$

Fig. 2 C_P of partial ordering relation P between chains $Q_u{}^p$ and $Q_v{}^p$, $(u<v)$ of a shift F_p.
$$\begin{cases} (i, j)F_p(i, j+1)\,;\ 0 \leq i \leq d_1-1,\ 0 \leq j \leq d_2-2 \\ (i, d_2-1)F_p(i+p, 0)\,;\ 0 \leq i \leq d_1-p-1 \end{cases}$$

ある．いま，$0 \leqq u < v \leqq p-1$ なる任意の u, v に対して，

$$Q_u{}^p = \{C_{uk} = (((k-1)/d_2)p+u, (k-1) /\!/ d_2) \mid 1 \leqq k \leqq d_1'd_2\}$$
$$O_v{}^p = \{C_{vk} = (((k-1)/d_2)p+v, (k-1 /\!/ d_2) \mid 1 \leqq k \leqq d_1'd_2\}$$

とすれば，任意の i, j $(1 \leqq i, j \leqq d_1'd_2)$ と $|D|=j$ なる $D \subseteq Q_v{}^p$ に対して，**Fig. 2** に示すように，$(C_{ui}, C_{vi}) \in P, (C_{ui}, C_{vi'}) \notin P (i'<i)$ であるから，

$$(C_{ui}, C_{vj}) \in P \Rightarrow j \geqq i.$$

いま，$j'=\max\{j \mid C_{vj} \in D\}$ とすれば，$|D|=j$ であるから，$j' \geqq j$ である．また，鎖 $Q_v{}^p$ の定め方から $(C_{vj}, C_{vj'}) \in P$ である．ゆえに，$(C_{ui}, C_{vj'}) \in P$ が成立する．

一方，$0 \leqq i' \leqq i$ なるすべての i' に対して，$(C_{ui'}, C_{ui}) \in P$ であるから，推移律を適用して，

$$(C_{ui'}, C_{vj'}) \in P,\ (0 \leqq i' \leqq i)$$

したがって，$|P^{-1}(D) \cap Q_u{}^p| \geqq i$ が成立し，定理1の条件(ii)が満たされる．一方，条件(i)が満足されることは明らかであるから，シフト F_p は半順序 P を保存する．

(証明終)

4. $S_{2^{2r+1}}$ の構成法とセル数の評価

入力数が $N=2^{2r+1}$ で，$d_1=2^r$, $d_2=2^{r+1}$ の二次元配列 $A(d_1, d_2)$ を考える．式(2),(3)から得られる C_2 網 $\alpha_1\alpha_2$ によって，$A(2^r, 2^{r+1})$ の各行各列が分類され，二次元格子関係が得られる．

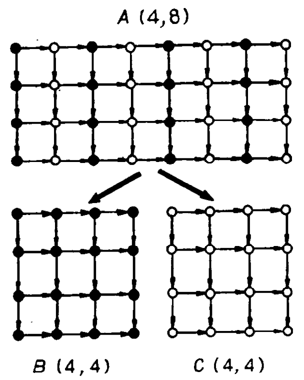


Fig. 3 An example of odd-even column decomposition of two-dimensional array $A(2^r, 2^{r+1})$with grid relation

いま，$A(2^r, 2^{r+1})$ の要素 (i, j) のうち，$j=0, 2, \cdots, 2^{r+1}-2$ である要素からなる集合は，やはり二次元格子関係にあり，これを $B(2^r, 2^r)$ とする．また，$j=1, 3, \cdots, 2^{r+1}-1$ である要素からなる集合を $C(2^r, 2^r)$ とする (**Fig. 3** 参照).

いま，定義8の C_2 網 $\theta_2(2^r, 2^r)$ を格子関係にある配列 $B(2^r, 2^r), C(2^r, 2^r)$ に適用すれば各々の配列が分類された状態になる．すなわち，

$$\beta_2'=\mathcal{S}(\theta_2(2^r, 2^r), Q_0^2)\mathcal{S}(\theta_2(2^r, 2^r), Q_1^2)$$

とすれば，C_2 網 β_2' によって，集合 B, C の要素が始めに定めた要素番号の順に分類される．

このとき，つぎの性質が成り立つ．

〔定理6〕 二次元配列 $A(2^r, 2^{r+1})$ に C_2 網 $\alpha_1\alpha_2\beta_2'$ を適用して得られるデータ値関数 $\bar{\phi}_{\alpha_1\alpha_2\beta_2'}: A \to I$ は，式(8)～(10)の C_P により定義される半順序 P に無矛盾である．

$$\begin{cases}(i, i+2)\in C_P;\ 0\leqq i\leqq 2^{2r+1}-3 & (8)\\ (i, i+1)\in C_P;\ i=0, 2, \cdots, 2^{2r+1}-2 & (9)\\ (i, i+2^{r+1}-1)\in C_P;\ i=1, 3, \cdots, 2^{2r+1}-2^{r+1}-1 & (10)\end{cases}$$

ただし，$A(2^r, 2^{r+1})$ の要素 (i, j) を $i\times 2^{r+1}+j$ に対応させるものとする．

(証明) $A(2^r, 2^{r+1})$ の要素 (i, j) を $i\times 2^{r+1}+j$ に対応させるかわりに，$i+j\times 2^r$ に対応させ，C_2 網 β_2' のかわりに，

$$\beta_2''=\mathcal{S}(\theta_2(2^r, 2^r), \{\lambda|((\lambda/2^r)/\!/2)=0\})\circ$$
$$\mathcal{S}(\theta_2(2^r, 2^r), \{\lambda|((\lambda/2^r)/\!/2)=1\})$$

なる C_2 網 β_2'' を用いれば，定理5より $\bar{\phi}_{\alpha_1\alpha_2\beta_2''}$ は

$$\begin{cases}(i, j)C_{P'}(i, j+1);\ 0\leqq i\leqq 2^r-1, 0\leqq j\leqq 2^{r+1}-2 & (11)\\ (i, j)C_{P'}(i+1, j);\ 0\leqq i\leqq 2^r-2, 0\leqq j\leqq 2^{r+1}-1 & (12)\\ (2^r-1, j)C_{P'}(0, j+2);\ 0\leqq j\leqq 2^{r+1}-3 & (13)\end{cases}$$

により定義される半順序 P' に無矛盾である．

β_2' と β_2'' とは，ともに Q_0^2, Q_1^2 を分類する C 網であって，昇順の要素の列の $A(2^r, 2^{r+1})$ 上での並べ方が，互いに行と列を転置した形になっているだけである．したがって，β_2'' を用いるときの A 上の要素 (s, t) は，t が偶数のとき，β_2' を用いるときの要素 $(t/2, 2s)$ に対応し，t が奇数のときは，$((t-1)/2, 2s+1)$ に対応する．このことから，式(11)～(13)を，β_2' を用いるときの A 上の要素と信号線の番号との対応づけのもとで表現しなおせば，以下の式(11′)～(13″)のようになる．

(i) j が偶数のとき，

$$(j\times 2^r+2i, j\times 2^r+2i+1)\in C_{P'} \qquad (11')$$
$$(j\times 2^r+2i, j\times 2^r+2i+2)\in C_{P'} \qquad (12')$$
$$(j\times 2^r+2^{r+1}-2, (j+2)\times 2^r)\in C_{P'} \qquad (13')$$

(ii) j が奇数のとき，

$$((j-1)\times 2^r+2i+1, (j+1)\times 2^r+2i)\in C_{P'} \qquad (11'')$$
$$((j-1)\times 2^r+2i+1, (j-1)\times 2^r+2i+3)\in C_{P'} \qquad (12'')$$
$$((j-1)\times 2^r+2^{r+1}-1, (j+1)\times 2^r+1)\in C_{P'} \qquad (13'')$$

式(12′), (13′), (12″), (13″)は式(8)に，式(11′)は式(9)に，式(11″)は式(10)にそれぞれ一致する．ゆえに，$\bar{\phi}_{\alpha_1\alpha_2\beta_2''}$ が P' に無矛盾であることは，$\bar{\phi}_{\alpha_1\alpha_2\beta_2'}$ が P に無矛盾であることを意味する． (証明終)

この定理における半順序を図示すれば，**Fig. 4** (次頁参照) のようになる．

そこで，C_2 網 δ をつぎのように定義する．

$$\delta={}_{r-1}\delta_{r-2}, \cdots, \delta_0$$

ただし，$\delta_j=(1:2^{j+1})(3:2^{j+1}+2)\cdots$
$(2^{2r+1}-2^{j+1}-1:2^{2r+1}-2),\ 0\leqq j\leqq r-1.$

このとき，つぎの定理が成立する．

〔定理7〕[3] C_2 網 $\alpha_1\alpha_2\beta_2'\delta_{r-1}\delta_{r-2}\cdots\delta_{j+1}$ $(0\leqq j\leqq r-2)$ に C_2 網 δ_j を従続接続したとき，$\bar{\phi}_{\alpha_1\alpha_2\beta_2'\delta_{r-1}\cdots\delta_{j+1}\delta_j}$ は式(2), (3), (5)と，$\delta_{r-1}, \cdots, \delta_{j+1}$ の適用によって付加された関係とで規定される半順序を保存する．

C_2 網 $\alpha_1\alpha_2\beta_2'\delta_{r-1}\cdots\delta_0$ において，上述の定理を $j=0$ で適用することにより，

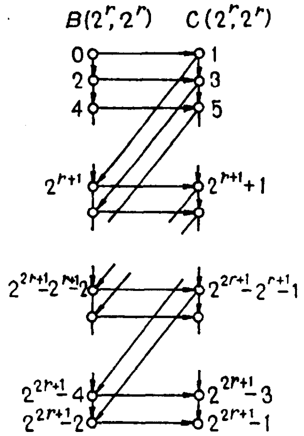
$$\bar{\phi}(i)<\bar{\phi}(i+1);\ i=1, 3, \cdots, 2^{2r+1}-3$$

一方，$\bar{\phi}$ は式(2)の関係を保存するので，

$$\bar{\phi}(i)<\bar{\phi}(i+1);\ i=0, 2, \cdots, 2^{2r+1}-2$$

これら2つの関係式より，C_2 網 $\alpha_1\alpha_2\beta_2'\delta$ は分類網 $S_{2^{2r+1}}$ の一実現であることが示された．

さて，上述の構成法がセル数の点で所期の目的を達



$B(2^r, 2^r)$: Subset of A, whose elements are in even-numbered columns in array A $(2^r, 2^{r+1})$

$C(2^r, 2^r)$: Subset of A, whose elements are in odd-numbered columns in A $(2^r, 2^{r+1})$.

Fig. 4 Partial ordering relation C_P. $P=C_P{}^+$ and P is generated at the output of C_2-network $\alpha_1\alpha_2\beta_2'$.

成していることを以下で考察する．定義 7，および 8 の自然な一般化として，k 次元配列，k 次元格子関係を導入する．

k 次元配列をもとに，k 次元格子関係を生成する C_2 網を構成することから始める分類網の構成においては，必要なセル数は，

$$\frac{1}{4}N(\log_2 N)^2-\lambda N\log_2 N+0(N)$$

で表されることが知られている[4]．

上述の構成法の場合 $\lambda=\lambda_1$，文献 4)による場合 $\lambda=\lambda_2$ と置けば，$N=2^{2r+1}$ で r が奇数のとき，

$$|\alpha_1|=2^r\left\{\frac{1}{4}\times 2^{r+1}(r+1)^2-\lambda_2\times 2^{r+1}(r+1)+0(2^{r+1})\right\}$$

$$|\alpha_2|=2^{r+1}\left\{\frac{1}{4}\times 2^r\times r^2-\lambda_1\times 2^r\times r+0(2^r)\right\}$$

$$|\beta_2'|=2\left[\frac{1}{4}\times 2^{2r}(2r)^2-\lambda_2 2^{2r}(2r)+0(2^{2r})\right.$$
$$\left.-2\times 2^r\left\{\frac{1}{4}\times 2^r\times r^2-\lambda_1 2^r\times r+0(2^r)\right\}\right]$$

$$|\delta|=r\times 2^{2r}-2^r+1$$

$$|\alpha_1\alpha_2\beta_2'\delta|=|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\beta_2'|+|\delta|$$

$$|\alpha_1\alpha_2\beta_2'\delta|=\frac{1}{4}\times 2^{2r+1}\times(2r+1)^2-\lambda_1 2^{2r+1}\times(2r+1)$$
$$+0(2^{2r+1})$$

以上の関係から，λ_1 と λ_2 の間に次の関係式が成立する．

$$\frac{1}{4}2^{2r+1}\times(2r+1)^2-\lambda_1 2^{2r+1}\times(2r+1)+0(2^{2r+1})$$
$$=\frac{1}{4}2^{2r+1}\times(4r^2+4r+1)-\left(\frac{3\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)\times 2^{2r+1}$$
$$\times(2r+1)\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)\times 2^{2r+1}+20(2^{2r})-2^{r+1}$$
$$\times 0(2^r)+2^r\times 0(2^{r+1})-2^r+1$$

この式の右辺の第 3 項以下はまとめて，$0(2^{2r+1})$ であるから，

$$\lambda_1=(3\lambda_2-\lambda_1)/2,\ \text{すなわち}\ \lambda_1=\lambda_2.$$

r が偶数のときは上と同様にして，

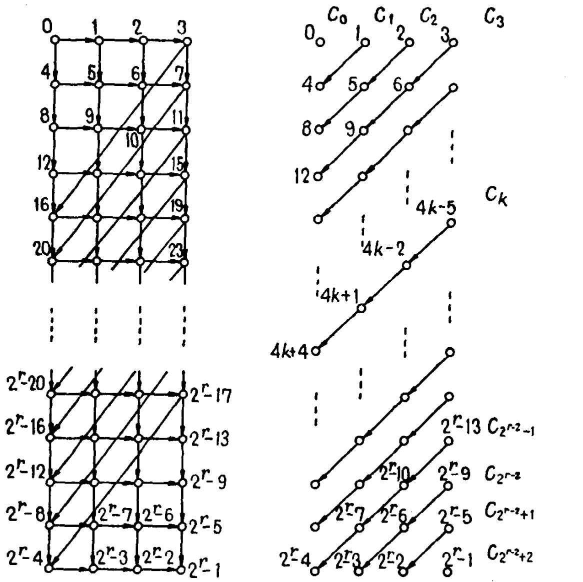
$$\lambda_1=(\lambda_1+\lambda_2)/2,\ \text{すなわち}\ \lambda_1=\lambda_2.$$

以上のことは，本節で導いた構成法が，文献 4) の経済性を保存するものであることを示している．実際，Table 1 に数値例を示すごとく，Batcher の方法(Ⅰ)，Van Voorhis の方法に定理 4 を適用した結果(Ⅱ)，よりも本節の方法(Ⅲ)が明らかにセル数の少ない構成を与えている．

5. 4 入力分類回路を基本セルとする S_{2^r} の構成法

分類網の構成には通常 C_2 セルが基本回路として用いられる．集積回路技術の近年の進歩からすれば，一般に C_i セル（i 入力分類回路；$i\geqq 3$）を基本回路として用いることは経済性の面で妥当性がある．この章では，基本構成要素として C_4 セルを用いたとき，従来の方法を応用したものより経済的な構成法を述べる．その方法は，$N=16$ のとき，Shapiro の結果[5]と一致するもので，**3.** で考察した定理 5 の $p=4$，$d_2=4$ の場合を基礎にしている．．分類網としての妥当性を述べるために，始め C_2 セルによる構成として考察する．

$N=2^r$ $(r\geq 4)$ に対して，$d_1=2^{r-2}, d_2=4$ とする二次元配列 $A(2^{r-2},4)$ を考え，式(2)，(3)で d_1, d_2 を上述のように置いて得られる C_2 網 $\alpha_1\alpha_2$ によって，二次元格子関係を生成する．その後，集合 A を，式(4)において $p=4$ として得られる 4 つの部分集合 $Q_0{}^4, Q_1{}^4, Q_2{}^4, Q_3{}^4$ に分割し，式(5)に対応する C_2 網 β_4 を適用すれば，$\bar{\phi}_{\alpha_1\alpha_2\beta_4}$ は **Fig. 5** (a) に示される C_{P_4} で規定される半順序 P_4 に無矛盾であることが定理 5 の $p=4$ の場合として得られる．ここで，半順序が成立している集合 A 上で，つぎのように定められ



(a) C_{P_4} (Partial ordering relation $P_4=C_{P_4}^{+}$ and $\bar{\varphi}_{\alpha_1\alpha_2\beta_4}$ is consistent with P_4).
(b) A shift F_t, which consist of $(2^{r-2}+3)$ chains $C_0, C_1, \cdots, C_{2^{r-2}+2}$, and conserves the partial ordering relation P_4.

Fig. 5 Partial ordering relation C_{P_4} ($P_4=C_{P_4}^{+}$, and P_4 is generated at the output of C_s-network $\alpha_1\alpha_2\beta_4$) and a shift F_t, which conserves P_4.

るシフト F_t を導入する．

$$\begin{cases}(4i+1, 4i+4)\in F_t\,;\ 0\leq i\leq 2^{r-2}-2\\(4i+2, 4i+5)\in F_t\,;\ 0\leq i\leq 2^{r-2}-2\\(4i+3, 4i+6)\in F_t\,;\ 0\leq i\leq 2^{r-2}-2\end{cases}$$

このシフトを図示すると，Fig. 5(b) に示す通りであり，このとき，つぎの定理が成立する．

〔定理8〕 シフト F_t は半順序 P_4 を保存する．

（証明） Fig. 5(b) から明らかなように，シフト F_t の鎖は，つぎの $2^{r-2}+3$ こからなる．

$C_0=\{0\}$，$C_1=\{1, 4\}$，$C_2=\{2, 5, 8\}$

$C_k=\{4k-5, 4k-2, 4k+1, 4k+4\}$

ただし，$3\leq k\leq 2^{r-2}-1$

$C_{2^{r-2}}=\{2^r-9, 2^r-6, 2^r-3\}$

$C_{2^{r-2}+1}=\{2^r-5, 2^r-2\}$，$C_{2^{r-2}+2}=\{2^r-1\}$．

また，以下では鎖 C_i の j 番目の要素を C_{ij} で表すこともある．

F_t が半順序 P_4 に対して，定理1の条件(ｉ)を満足することは Fig. 5 の(a)，(b)より明らかである．条件(ⅱ)を考察するには，鎖と鎖の組合せとして 11 個の場合をそれぞれ検討する必要があるが，他の場合も同様であるので，C_u と C_v $(3\leq u<v\leq 2^{r-2}-1)$ の場合を考える．鎖 C_u と C_v の間で成立する半順序 P_4 上での関係は **Fig. 6** に示す通りである．C_v のどの要素 C_{vj} $(1\leq j\leq 4)$ に対しても，$|P_4^{-1}(\{C_{vj}\})\cap C_u|=2$ であるから，$(C_{u1}, C_{v1}), (C_{u1}, C_{v4}), (C_{u2}, C_{v1})\in P_4$ および $(C_{u2}, C_{v2})\in P_4$ に関して条件(ⅱ)が満足される．また，$|D|=2$ なる $D\subseteq C_v$ に対して，$|P_4^{-1}(D)\cap C_u|=3$ となるから，$(C_{u3}, C_{v2}), (C_{u3}, C_{v3})\in P_4$ に関しても条件(ⅱ)は満足される．さらに，$|E|\geq 3$ なる $E\cap C_v$ に対しては，$|P_4^{-1}(E)\cap C_u|=4$ であるから，(C_{u4}, C_{u3})，$(C_{u4}, C_{v4})\in P_4$ に関しても条件(ⅱ)が満足される．

以上のように鎖 C_u と鎖 C_v に関して条件(ⅱ)が満

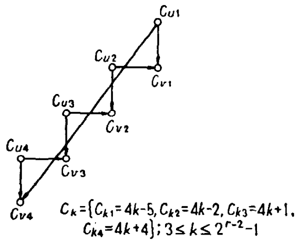


Fig. 6 Partial ordering relation P_4 between chains C_u and C_v of a shift F_t depicted in Fig. 5 (b). $(3\leq u<v\leq 2^{r-2}-1)$

足される．他の組についても同様である．（証明終）

シフト F_i を実現する C_2 網を γ とすれば，

$$\gamma=(1:4)\mathcal{S}(S_3, C_2)\mathcal{S}(S_4, C_3)\cdots$$
$$\mathcal{S}(S_4, C_{2^{2r-2}-1})\mathcal{S}(S_3, C_{2^{r-2}})(2^r-5:2^r-2)$$

で与えられる．

一方，Fig. 5 (a), (b) を参照すれば，定理8から，A 上の全順序を成立させるために，この時点で不明な関係として残っているのは，$\{4k-2, 4k-1, 4k, 4k+1\}$ $(1\leq k\leq 2^{r-2}-1)$ である．そこで，C_2 網 δ を

$$\delta=\delta_1\delta_2\cdots\delta_{2^{r-2}-1}$$

ただし，$\delta_k=(4k-2:4k)(4k-1:4k+1)(4k-1:4k)$ とすれば，C_2 網 $\alpha_1\alpha_2\beta_4\gamma\delta$ は分類網である．

$\alpha(d_1)$ が 2^{r-2} 入力分類網を C_4 セルで構成する問題に帰着され，β_4 の各 $Q_i{}^4$ に対する C_4 網が 2^{r-2} 入力分類網から各行各列を分類する C_4 網を除去したものであり，さらに，$(1:4)\mathcal{S}(S_3, C_1)$ と δ_1，および $\mathcal{S}(S_3, C_{2^{r-2}})(2^r-5:2^r-2)$ と $\delta_{2^{r-2}-1}$ に対して Shapiro の結果が使えること，から上述の構成法で得られる分類網に必要な C_4 セル数 $K_4(N)$ は，$K_4(2^r)=8K_4(2^{r-2})-16K_4(2^{r-4})+2^{r-1}-1$ となる．これを解けば，以下に示す解が得られる．

（i） r が偶数のとき

$$K_4(2^r)=4K_4(2^{r-2})+r\times 2^{r-2}-\frac{1}{3}(2^r-1)$$

$$K_4(N)=\frac{1}{16}N(\log_2 N)^2-\frac{1}{24}N\log_2 N+\frac{1}{9}N-\frac{1}{9}$$

（ii） r が奇数のとき，

$$K_4(2^r)=4K_4(2^{r-2})+r\times 2^{r-2}-\frac{7}{24}2^r+\frac{1}{3}$$

$$K_4(N)=\frac{1}{16}N(\log_2 N)^2-\frac{1}{48}N\log_2 N+\frac{1}{72}N-\frac{1}{9}$$

一方，これまでの C_2 セルを基本セルとした構成法を C_4 セルを用いた構成に適用するには，信号線2本を組にして扱う方法がベースとなる．この場合の C_4 セル数を $V_4(N)$ とすれば，

$$V_4(N)=\frac{1}{8}N(\log_2 N)^2-\left(\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{2}\right)N\log_2 N+0(N)$$

となり，本章の方法の方が第1項の係数ですでに良い結果を与えている．ただし，$0.25\leq\lambda\leq 0.395$ である．

6. あとがき

本文では，信号線の二次元配列に基づく分類網の構成過程における，信号線上のデータ値の間の半順序の保存性に関する性質を考察した．この性質の応用として，2の奇数べき乗で表現される入力数に対して文献4)と $N\log_2 N$ の係数まで一致するセル数の評価式をもつ構成法を導き，数値的にも従来の手法と比較して有効であることを示した．

さらに，もう一つの応用として，4入力分類回路を基本セルとする経済的な構成法と C_4 セル数の評価式を導いた．この方法は，集積回路技術の進歩と相まって，実用上従来の C_2 セルに基づくものより有効であろう．

参 考 文 献

1) K. E. Batcher: Sorting networks and their applications, Proc. SJCC, p. 307 (1968).
2) D. Gale, R. M. Karp: A phenomenon in the theory of sorting, IEEE Conf. Rec. of 11th Ann. Symp. on SWAT, p. 51 (1970).
3) 河田，千葉，尾崎：分類回路網の組織的構成法，信学会，回路とシステム理論研資，CST 74-56 (1974).
4) D. C. Van Voorhis: An economical construction for sorting networks, AFIPS Conf. Proc., Vol. 43, p. 921 (1974).
5) D. E. Knuth: Sorting and searching, The Art of Computer Programming Vol. 3, Addison Wesley, p. 220 (1973).
6) M. W. Green: Some improvements in nonadaptive sorting algorithms, Proc. of 6th Ann. Princeton Conf. on ISS, p. 387 (1972).

（昭和51年1月16日受付）